

Opponensi vélemény Hartung Ferenc
Differentiability of solutions with respect to parameters
in differential equations with state-dependent delays
című MTA doktori értekezéséről

Az értekezés olyan differenciálegyenleteket vizsgál, amelyekben időkéseletetés fordul elő, és az időkéseletetés magától a megoldástól is függ. Egy ilyen egyenlet már Poisson egy 1806-os dolgozatában is előfordult, de szisztematikus vizsgálatuk csak az elmúlt 10-15 évben kezdődött. Az utóbbi években született ugyan olyan eredmények, amelyek azt mutatják, hogy az ilyen egyenletek bizonyos típusai beilleszthetők a végtelen dimenziós dinamikai rendszerek elméletébe. A probléma nehézsége s a terület jrdonsga miatt azonban nincs kialakult, általánosan elfogadott elmélet, csak bizonyos speciális esetekre. A megoldásoperátor C^2 -simaságát eddig nem sikerült igazolni (csak C^1 -et bizonyos esetekre). Nem tisztázott, mi lehetne a legalkalmasabb fázistér? A helyzetet talán azzal az időszakkal lehetne jellemezni, amikor a parciális differenciálegyenletek elméletében a Szoboljev-terek használata még kialakulóban volt, nem látszott világosan, hogy milyen kérdések tanulmányozására melyik fázistér a legcélszerűbb, a legtermészetesebb.

A legegyszerűbb időkéseletetést tartalmazó nemlineáris differenciálegyenlet

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t-r))$$

alakú, ahol $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ adott sima függvény, r az időkéseletetés, $x(\cdot)$ az ismeretlen függvény. Ha $r \equiv h > 0$ állandó, akkor a folytonos függvények $C([-h, 0], \mathbf{R})$ tere egy alkalmas fázistér a probléma vizsgálatára, és az elmúlt 60 évben egy többé-kevésbé teljes, a közönséges differenciálegyenletek elméletével sok tekintetben analóg elmélet fejlődött ki, amely azonban a probléma végtelen dimenziós természete miatt sok rokon tulajdonságot mutat a parabolikus és hiperbolikus parciális differenciálegyenletek elméletével is. Többek között elektrodinamikai, fiziológiai, vezérlési, populációdinamikai problémák modellezése motiválta a megoldástól függő r időkéseletetés bevezetését, pl. $r = \tau(x(t))$, ahol $\tau : \mathbf{R} \rightarrow [0, h]$ adott sima függvény, $h > 0$ állandó. Ha $X \subset \mathbf{R}^{[-h, 0]}$ a fázistér a probléma kezelésére, akkor egy megfelelő alapelmélet (a megoldások létezése, egyértelműsége, folytathatósága, kezdeti adatoktól való folytonos/differenciálható függése, linearizálás, invariáns sokaságok, stb.) kidolgozásában alapvető szerepet játszik az

$$X \ni \phi \mapsto f(\phi(-\tau(\phi(0)))) \in \mathbf{R}$$

függvény simasága. Sima f és τ függvények esetén ez a

$$H : X \times [-h, 0] \ni (\phi, s) \mapsto \phi(s) \in \mathbf{R}$$

leképezés simasági tulajdonságain múlik. Ha $X = C([-h, 0], \mathbf{R})$, akkor H nem lokálisan Lipschitz-folytonos. Ha azonban $X = W^{1,\infty}([-h, 0], \mathbf{R})$, akkor már H lokálisan Lipschitz-folytonos. (Az is igaz, hogy $X = C^k([-h, 0], \mathbf{R})$ esetén H k -szor folytonosan differenciálható.) A H lokális Lipschitz-folytonossága teszi lehetővé pl. a megoldások egyértelmű létezésének bizonyítását (az $X = C([-h, 0], \mathbf{R})$ esetben ez nem igaz a fenti problémára). Ezért a $W^{1,\infty}$ tér a kezdőfüggvények tere az értekezés nagy részében.

Az értekezés a fenti problémánál általánosabb alakú, több paramétert is tartalmazó egyenleteket vizsgál. Az eredmények újak, még nem jelentek meg, de szorosan kapcsolódnak a szerző e területen publikált dolgozataihoz.

Az angol nyelven írt értekezés 4 fejezetből áll, 112 oldal terjedelmű.

Az 1. fejezet rövid bevezetés után jelöléseket vezet be és közöl néhány elszűt eredményt. Ezek közül kiemelendő az 1.2.11. lemma, amely Brokate és Colonius egy kulcsfontosságú technikai eredményének az általánosítása.

A fő eredmények a további három fejezetben találhatók. Egy-egy speciális alakú egyenletre vannak kimondva az állítások és kidolgozva a bizonyítások azzal a megjegyzéssel, hogy általánosabb esetre értelemszerűen, különösebb nehézség nélkül átvihetők.

A 2. fejezet az

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta)$$

alakú nem-autonóm, egyetlen állapotfüggő késleltetést tartalmazó egyenletet vizsgálja, amely emellett tartalmazhat többféle paramétert és tetszőleges állandó időkésleltetéseket az x_t tagon keresztül. A $\Gamma = W^{1,\infty} \times \Theta \times \Xi$ paraméterter tipikus eleme kezdeti függvényt és a szokásos értelemben vett paramétereket tartalmaz. Az értekezés azonban a kezdeti függvényt mint a paraméter első komponensét tekinti. A 2.2.1. tétel standard Lipschitz-folytonosság mellett igazolja egyetlen megoldás létezését és a paramétertől való Lipschitz-folytonos függést. Az eredmény jól mutatja a $W^{1,\infty}$ tér szerepét.

A 2.3–2.4 részek a megoldás paraméter szerinti első- és másodrendű deriváltjának létezését és folytonossági tulajdonságait bizonyítják. A bizonyítás egyik technikai nehézsége az állapotfüggő késleltetést tartalmazó $t \mapsto x(t - \tau(x_t, \xi))$ függvény regularitási tulajdonságainak igazolásában, a megfelelő feltételek megtalálásában rejlik. Az értekezés eredménye nagyobb paramétertartományon alkalmazható, mint Hartung Ferenc korábbi eredményei, speciálisan a PhD értekezésének eredményei. Megfogalmaz egy lineáris variációs egyenletet Carathéodory-értelemben, és megmutatja, hogy a megoldás paraméter szerinti deriváltja kielégíti a lineáris variációs egyenletet. A 2.3.9. tétel az $\Gamma \ni \gamma \mapsto x(t, \gamma) \in \mathbf{R}^n$ és a $\Gamma \ni \gamma \mapsto x(t, \gamma) \in C([-h, 0], \mathbf{R}^n)$ leképezések differenciálhatóságát, a deriváltak folytonosságát állítja és bizonyítja Γ alkalmas részhalmazaira. A 2.3.8. lemma a derivált Lipschitz-folytonosságára ad feltételt.

A paraméter szerinti másodrendű derivált létezésének igazolásához először az alkalmas $\Gamma_2 = W^{2,\infty} \times \Theta \times \Xi$ paraméterter megtalálása kellett. Ugyanezt már bevezette korábban Chen–Hu–Wu szintén a paraméter szerinti második derivált létezésének igazolására, Hartung és Turi egy korábbi módszerének az alkalmazásával. A 2.3.9. tétel (ami a másodrendű differenciálhatóságot mondja ki) igazolása ugyan meglehetősen bonyolult, de azt a standard elvet követi, hogy a második derivátnak egy újabb lineáris variációs egyenletet kell kielégítenie.

A 3. fejezet a 2. fejezet eredményének egy szép és hasznos alkalmazását adja. A gyakorlati szempontból is érdekes probléma a következő: Tegyük fel, hogy a γ paraméter ismeretlen, de a megoldás értékét ismerjük véges sok $t_0, \dots, t_k$ időpontban. Olyan paraméterértéket keresünk, amelyhez tartozó megoldás az adott $t_0, \dots, t_k$ időpontokban az ismert megoldásértékekhez legközelebb van a négyzetes eltérésben. Ez az ún. kvázilinearizációs módszerrel oldható meg, ami megköveteli a megoldás paraméter szerinti deriváltjának ismeretét. A módszert állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletekre Hartung Ferenc vezette. Az eljárás lokális konvergenciáját az értekezésben igazolja először.

A 4. fejezet neutrális egyenletek egy osztályát vizsgálja. Ez elsősorban abban különbözik a 2. és 3. fejezetekben vizsgáltaktól, hogy az egyenletben szereplő deriváltakban is lehet állapotfüggő időkésleltetés. A vizsgált egyenletet implicitnek nevezi Hartung szemben azon egyenletekkel, ahol $\dot{x}(t)$ explicit módon ki van fejezve. 2006-ban Hartung Ferenc paraméter szerinti differenciálhatóságot olyan egyenletekre bizonyított, ahol az x keresett függvény $\dot{x}$ deriváltjában állapotfüggő időkésleltetés nem fordult elő, hanem csak az x megoldásban. A fejezet a korábban alkalmazott technikát továbbfejleszti arra az esetre, amikor az $\dot{x}$ deriváltban állapotfüggő időkésleltetés is lehet.

Az értekezés bizonyításai technikailag meglehetősen összetettek. Ellenőriztem őket, számomra meggyőzőek. A bizonyítások menete nem különösebben meglepő. Az igazi nehézséget az alkalmas feltételek, a megfelelő paraméterterek, fázisterek, a problémákhoz illő normák megtalálása jelentik. Ezek messze nem triviális problémák. Megoldásuk egyértelműen Hartung Ferenc nevéhez köthető.

Összefoglalva: Hartung Ferenc értekezését — annak ellenére, hogy csak lokális eredményeket tartalmaz — az állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek elméletének kialakulása felé fontos előrelépésnek értékelem. A paraméter szerinti differenciálhatósághoz az alkalmas fázisterek megtalálása, a differenciálhatósághoz vezető technikai lépések kidolgozása az ő érdeme, az eredmények paraméterbecslésre való használata egy szép alkalmazás. Mindezek alapján az értekezés nyilvános vitára bocsátását és a fokozat odaítélését melegen támogatom.

Néhány kérdés:

1. Mi motiválja a két különböző típusú paraméter, ξ és θ bevezetését? Van olyan alkalmazás által motivált példa, ahol ez fontos?
2. A paraméter kezelésére standard technika az, hogy a paramétert is független változónak tekintjük, azaz az értekezés (2.1.1) egyenletében $\xi(t)$ és $\theta(t)$ ismeretlenek, és az egyenlethez hozzávesszük az

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = 0, \quad \frac{d}{dt}\theta(t) = 0$$

egyenleteket. A nem-autonóm esetben még az explicit időfüggés is megszüntethető, a független változók számának növelésével. Tehát feltehető sok esetben az, hogy az egyenlet autonóm és nincs benne paraméter. Ennek az átírásnak vannak-e itt előnyei?

3. Folytonos szemidinamikai rendszerhez (semiflow) kell a $t \mapsto x_t$ leképezés folytonossága. Ha $W^{1,\infty}$ a fázistér, akkor ez nem feltétlenül folytonos. Ez motiválta a Krisztin–Wu cikket, majd Walthert a C^1 tér bevezetésében? Alkalmas fázistér a $W^{1,\infty}$, ha a t -ben való folytonosságot szeretnénk? Mi itt a kompatibilitási feltétel szerepe?
4. Több példában (az elektrodinamikai modell, küszöbfeltétellel definiált késleltetés, szabályozás visszhanggal, adaptív késleltetés) a késleltetés nem egy explicit függvénnyel adott, hanem azt egy függvényegyenlet, differenciálegyenlet definiálja. Viszont ennek következtében a $t \mapsto t - \tau()$ szigorú monotonitása automatikusan teljesül. Segíthet-e ez a simasági kérdésekben?
5. Mi a kapcsolat Chen–Hu–Wu eredménye és az értekezés 2.4 részének eredménye között?
6. A bizonyításokat technikailag áttekinthetőbbé tenné-e, ha valamivel absztraktabb módon lenne az állapotfüggő késleltetés megfogalmazva?
7. A 4. fejezet eredményei alkalmazhatók-e a Driver által is vizsgált elektrodinamikai kéttest-problémára?

Szeged, 2012. május 18.

Krisztin Tibor
Bolyai Intézet