

Opponensi vélemény Hartung Ferenc:
Differentiability of solutions with respect to
parameters in differential equations with
state-dependent delays című MTA doktori
értekezéséről

A múlt század 70-es éveitől kezdve intenzív fejlődésnek indult a késleltetett argumentumú, illetve általánosabban a funkcionál differenciálegyenletek és rendszerek elmélete, amelyekben a keresett függvény deriváltjának t időpontbeli értéke egyenlő egy olyan kifejezéssel, amely az ismeretlen függvénynek más (t -től eltérő, általában korábbi) időbeli értékeit tartalmazza. Az ilyen egyenleteket általában ilyen alakban írják:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \text{ ahol } x_t(\tau) = x(t + \tau), \quad \tau \in [-r, 0]. \quad (1)$$

A funkcionál differenciálegyenletek elméletében a nehézséget a közönséges differenciálegyenletek elméletéhez képest elsősorban az jelenti, hogy itt a fázistér végtelen dimenziós.

A különböző (műszaki, fizikai, biológiai) alkalmazások szempontjából is fontos speciális esete a funkcionál differenciálegyenleteknek az olyan késleltetett argumentumú differenciálegyenlet (rendszer), ahol a t időpontbeli késleltetés függ az ismeretlen függvénynek a t előtti értékeitől. Az ilyen egyenletet nevezik állapotfüggő késleltetésű egyenleteknek. Ezek egyszerű esetben így írhatók:

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t - \tau(t, x_t))), \text{ ahol } \tau \in [0, r]. \quad (2)$$

Ezek is (1) alakban írhatók, azonban a nehézséget az okozza, hogy még sima g esetén is a megfelelő f (kompozíció) függvény az x_t változóban nem teljesíti a Lipschitz-feltételt. Így ezek vizsgálata a funkcionál differenciálegyenletek elméletében alkalmazott módszerekhez képest új módszereket igényel, továbbá a megoldások állapotterének új, a folytonos függvények terétől eltérő függvényteret kell választani.

Hartung Ferenc több, mint 15 éve kapcsolódott be az állapotfüggő késleltetésű egyenletek vizsgálatába, azóta számos publikációja jelent meg neves folyóiratokban (részben társszerzőkkel) ebben a témakörben. Külön kiemelésre kívánczik a Krisztin Tiborral, H.O. Walther-rel és J. Wu-val közösen

írt [42] könyvrészlet, amelyben több, mint 200 publikáció eredményeit foglalják össze az állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletekről.

A jelen disszertáció elsősorban az állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek és neutrális egyenletek megoldásának paraméterek szerinti differenciálhatóságával foglalkozik. Pontosabban, az

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta), \quad (3)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0] \quad (4)$$

kezdeti érték feladatnak és a

$$\frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x_t, x(t - \rho(t, x_t, \chi)), \lambda)) = f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta), \quad (5)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0] \quad (6)$$

kezdeti érték feladat megoldásának a ξ, θ, φ , illetve a χ, λ, φ paraméterek szerinti differenciálhatóságát vizsgálja, emellett megmutatja az utóbbi feladat megoldásának létezését és egyértelműségét, amely szintén új eredmény. A (3) és (5) egyenletekben f, g sima a második változóban. Továbbá megmutatja, hogyan alkalmazható a paraméterek szerinti differenciálhatóság a paraméter becslés témakörében.

Az értekezés eredményeit eddig a szerző még nem publikálta, illetve az eredmények részben publikálás alatt vannak, de az eredmények szorosan kapcsolódnak Hartung Ferenc korábbi publikációihoz, az ottani eredmények különféle irányú kiterjesztéseit tartalmazzák.

Nevezetesen, a (3), (4) feladat megoldásának a ξ, θ, φ paraméterek szerinti differenciálhatóságát korábban a

$$\varphi \in C^1, \quad \dot{\varphi}(0-) = f(0, \varphi, \varphi(-\tau(0, \varphi, \xi)), \theta) \quad (7)$$

kompatibilitási feltétel mellett, majd a

$$\text{ess } \inf_{0 \leq t \leq a} \frac{d}{dt}(t - \tau(t, x_t, \xi)) > 0 \quad (8)$$

monotonitási feltétel teljesülése esetén igazolta, az értekezés 2. fejezetében pedig (8) helyett csak azt tette fel, hogy a $t \mapsto t - \tau(t, x_t, \xi)$ függvény (megfelelő értelemben) szakaszonként monoton (2.3.9 tétel). Hartung Ferenc egyúttal igazolta, hogy a (3), (4) feladat megoldásának a paraméterek szerinti deriváltjára igazak a (2.3.37), (2.3.38) összefüggések. A (8) feltétel előnye a (7) kompatibilitási feltétellel szemben, hogy ha ez teljesül egy ξ, θ, φ paraméterre, akkor teljesül ennek egy kis környezetében is.

Az értekezés 3. fejezetében pedig bebizonyította a retardált, állapotfüggő késleltetésű egyenletre a korábban vizsgált paraméter becslési módszer konvergenciáját (3.2.2, 3.2.3 tételek).

Az értekezés 4. fejezetében az (5) neutrális egyenletet vizsgálja a (6) kezdeti feltétel mellett, korábban a szerző (5)-nél speciálisabb alakú egyenleteket vizsgált. Az értekezésben igazolja az (5), (6) probléma megoldásának létezését és egyértelműségét (4.2.2 tétel), ez az irodalomban csak speciálisabb neutrális egyenletekre volt ismert, továbbá igazolja a megoldásnak a χ, λ, φ paraméterek szerinti differenciálhatóságát egy megfelelő kompatibilitási feltétel teljesülése esetén (4.3.4 tétel), és egyúttal igazolta, hogy a derivált természetes módon kapcsolatba hozható (4.3.5)-(4.3.6) lineáris kezdeti érték feladat megoldásával. Más szerzőnek alig volt korábban eredménye a megoldás paraméterek szerinti differenciálhatóságáról állapotfüggő késleltetésű neutrális egyenletek esetén.

A (3), (4) és az (5), (6) probléma megoldása paraméterek szerinti differenciálhatóságának bizonyításához Hartung Ferenc lényegesen továbbfejlesztette a korábbi módszereket, így többek között az M. Brokate, F. Colonius által igazolt 1.2.6 lemma általánosításaként bizonyította az 1.2.8, 1.2.11 lemmákat a $g \circ u$ összetett függvényről úgy, hogy azokban csak azt tette fel, hogy az u függvény szakaszonként monoton. Kiemelendő, hogy a fent idézett tételek bizonyítása meglehetősen bonyolult, gyakorlott bizonyítási technikát igényel.

Összefoglalva: az értekezés egy fontos, aktuális témában mutat be értékes új eredményeket, amelyek eléréséhez új módszerek kidolgozására, jelentős technikai nehézségek legyőzésére volt szükség. Hartung Ferenc az állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek és neutrális egyenletek nemzetközileg elismert képviselője, a PhD értekezés megvédése után számos fontos, a jelen értekezésben nem szereplő eredményt publikált. Ami az értekezés formai részét illeti, a megfogalmazás pontos, világos, megfelelő tömörségű, elírás alig található. Egyetlen formai kifogásom: az értekezés olvasását megkönnyítette volna, ha bizonyos részeket más szerkezetben írt volna le. Nevezetesen, a tételek feltételeit nem egy helyen, hanem az egyes tételek előtt fogalmazta volna meg, és a lemmákat is nem "egyszerre", hanem (részben) felhasználásuknak megfelelően helyezte volna el. Így könnyebben lett volna követhető a bizonyítások logikai felépítése. Némileg szokatlan, hogy pl. az (A1) (iii) feltételből következik az (A1) (ii) feltétel, de a 2.3.9 tételben azt teszi fel, hogy (A1) (i–iii) teljesül.

A fentiek természetesen nem érintik az értekezés tartalmi értékét, ezért egyértelműen javaslom az értekezés nyilvános vitára tűzését és sikeres védeés esetén Hartung Ferencnek az MTA doktora fokozat odaítélését.

Az alábbi kérdéseket teszem fel a jelöltnek.

1. A (8) monotonitási feltétel és az említett szakaszonkénti monotonitási feltétel csak a megoldás ismeretében ellenőrizhető. Tud-e egyszerű, az f, τ, φ adatokra vonatkozó elegendő feltételeket adni ezekre? Ez fontos lenne a 3.2.2 tétel feltételeinek teljesüléséhez is. Tud-e mondani olyan példát, ahol (8) nem teljesül, de a szakaszonkénti monotonitás igen. Mondhatjuk-e azt, hogy P_2 általában nem nyílt halmaz?

2. Van-e olyan példa, ahol a megoldás nem differenciálható valamelyik paraméter szerint?

3. A neutrális egyenlet megoldásának paraméter szerinti differenciálhatóságáról szóló 4.3.4 tételben feltesszük a 84. oldalon található kompatibilitási feltételt. Van-e eredmény a paraméter szerinti differenciálhatóságról abban az esetben, ha a kompatibilitási feltétel helyett a (8) monotonitási feltétel teljesül?

Budapest, 2012. január 3. (Simon László)