

dc_225_11

Reziduált monoidok vizsgálata

Jenei Sándor

MTA doktori értekezés tézisei

2011

1. Kutatási terület

A reziduáció alapvető algebrai koncepció [19]. Szoros kapcsolatban áll a Galois-leképezésekkel [41] és a lezárás operátorokkal. A reziduált műveletek definíciója az egységelemes kommutatív gyűrűk ideálméletéből nőtt ki. A magyar vonatkozásokat tekintve e koncepció Fuchs László munkásságáig nyúlik vissza [38] (lásd még [62, 63] és [18]). A reziduált félcsoporthok bevezetése és vizsgálata a múlt század 30-as éveiben Ward és Dilworth nevéhez fűződik [68]. Napjainkban a hálókön értelmezett reziduált félcsoporthok (más néven reziduált hálók) kutatásának intenzitása felerősödött; reziduált hálókról szóló monográfia is megjelent [40]. Ennek oka a reziduált hálók szubstrukturális logikákkal való szoros kapcsolatának felfedezése [58, 57]. A szubstrukturális logikák olyan elmélet, mely teljesen eltérő motivációjú, módszertanú, izolált csoportok által kutatott nem-klasszikus logikákat fog közös elméleti keretbe, egységes módszertant és tárgyalást biztosítva. Ilyenek, a teljesség igénye nélkül, a klasszikus logika, az intuicionista logika, a szuperintuicionista logikák, a releváns logika, a többértékű logikák, a t-norma alapú logikák, a lineáris logika, a Lambek kalkulus és ezek nem-kommutatív változatai. A közös elméleti keret és módszertant éppen a reziduált hálókkal való kapcsolat teszi lehetővé. Példák reziduált hálókra a Boole-algebrák, a Heyting algebrák [46], az MV-algebrák [26], a BL-algebrák [42] és a hálórendezett csoportok. Számos más struktúra is reziduált hálóvá tehető. A szubstrukturális logikák és reziduált hálók alkalmazásra találtak a bizonyításelméletben, az algebrában, a játékelméletben, a kódelméletben és a számítástudományban is.

E disszertáció reziduált félcsoporthok geometriai, analitikus és algebrai kutatását tűzi ki célul. Ennek megfelelően a disszertáció eredményei három fő részre tagolódnak: a geometria szemléletmód, a beágyazás és a struktúratételek részre.

2. Alapfogalmak

Egy $(M, \leq)$ részbenrendezett halmazon értelmezett $\circ$ műveletet reziduálnak nevezünk, ha létezik két művelet, $\rightarrow_\circ$ és $\rightsquigarrow_\circ$, melyekre $x \circ y \leq z \iff x \leq y \rightarrow_\circ z$ és $y \circ x \leq z \iff x \leq y \rightsquigarrow_\circ z$ teljesül $(x, y, z \in M)$. A fenti definíció ekvivalens azzal, hogy minden $y, z \in M$ esetén az $\{x \in M \mid x \circ y \leq z\}$ illetve az $\{x \in M \mid y \circ x \leq z\}$ halmazoknak van legnagyobb eleme. Ha a $\circ$ művelet kommutatív, akkor a két művelet egybeesik, ekkor $\rightarrow_\circ$ -al jelöljük. Egy $(M, \leq)$ részbenrendezett halmazon értelmezett $\bullet$ kommutatív műveletet ko-reziduálnak nevezünk, ha reziduált a duális részben-rendezésre nézve, azaz ha létezik egy olyan $\leftarrow_\bullet$ művelet M -en, amelyre $x \bullet y \geq z \iff x \leftarrow_\bullet z \leq y$. Ekkor $\leftarrow_\bullet$ -t a $\bullet$ ko-reziduumának nevezzük. A fenti definíció ekvivalens azzal, hogy minden $y, z \in M$ esetén a $\{z \mid x \bullet z \geq y\}$ halmazoknak van legkisebb eleme. A t-normák kommutatív integrál monoidok a $[0, 1]$ valós intervallumon. Az integrálitás jelentése, hogy az egységelem az alaphalmaz legnagyobb eleme. Egy t-norma pontosan akkor reziduált, ha balról-folytonos mint kétváltozós valós függvény. Egy folytonos t-norma archimédeszi, ha tetszőleges $1 > x, y > 0$ esetén létezik y -nak olyan hatványa, amely kisebb x -nél. Egy $(M, \leq)$ részbenrendezett halmazon értelmezett $\neg : M \rightarrow M$ függvényt involúciónak nevezünk, ha $\neg$ egy rendezést megfordító művelet, melyre $\neg\neg x = x$ ($x \in M$) igaz. Legyenek továbbá $c \in M$

esetén $\neg^c x = x \rightarrow_* c$ és $\bar{x}^c = \neg^c(\neg^c x)$ $M \rightarrow M$ típusú függvények (c -komplementum vagy másképpen c -szintvonal és c -lezárt). Egy integrál monoid alaphalmazának c eleme involutív, ha az $x \mapsto \neg^c x$ ($M_{\geq c} \rightarrow M$ típusú) leképezés az $M_{\geq c}$ involúciója. Más szóval, $c \in M$ involutív, ha minden c -nél nagyobb elem c -zárt. Egy $(M, \leq)$ részbenrendezett halmazon reziduált $\circ$ műveletre azt mondjuk, hogy forgatás-invariáns $\neg^c$ -re nézve, ha igaz rá $x \circ y \leq \neg^c z \implies z \circ x \leq \neg^c y$ ($x, y, z \in M$).

Azt mondjuk, hogy $(L, \circ, \rightarrow, \vee, \wedge, 1)$ reziduált háló, ha $(L, \vee, \wedge, 1)$ egy háló az 1 legnagyobb elemmel és $(L, \circ, \rightarrow, 1)$ egy reziduált monoid. Egy reziduált háló kommutatív, ha $\circ$ kommutatív; involutív, ha van legkisebb eleme és az involutív. Azt mondjuk, hogy $(L, \circ, \rightarrow, \vee, \wedge, 1, 0)$ *MTL*-algebra, ha $(L, \circ, \rightarrow, \vee, \wedge, 1)$ egy kommutatív reziduált háló, 0 az L legkisebb eleme és prelineáris, azaz $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$ igaz. Egy részbenrendezett grupoid osztható, ha $x, y \in M$, $x \leq y$ esetén $x \in y \circ M$ és $x \in M \circ y$ teljesül. Az oszthatóság a természetesen rendezett tulajdonság duálisa [38, 18]. Egy involutív *MTL*-algebrát *IMTL*-algebrának, egy osztható *IMTL*-algebrát *MV*-algebrának nevezünk [26].

3. Kutatási problémák, eredmények és alkalmazásaik

3.1. Geometria

Az elő fejezet egyik fő eredménye a kommutatív, reziduált műveletek asszociativitásának szimmetriacsaldokkal való geometriai jellemzése. A kommutatív műveletek asszociativitása persze ekvivalens a művelet négydimenziós grafikonjának három szimmetriájával, melyek az $(x \circ y) \circ z$ függvény argumentumainak felcseréléseihez kapcsolódnak. A reziduált műveleteknél egy bizonyos feltétel megléte esetén e szimmetria “nyoma” láthatóvá válik, mint a művelet háromdimenziós grafikonjának invarianciája egy bizonyos forgatásra nézve, sőt, e grafikon kétdimenziós metszeteinek egyfajta tükörszimmetriájaként is. Amennyiben a kérdéses feltétel nem teljesül a műveletre, akkor át lehet térni a művelet egy kvantál-hányadosára [60], melyre e feltétel mindig igaz. Mivel a műveletről a kvantál-hányadosára való áttérés ugyancsak megfogható geometriai módok, valójában akkor is látható egy kommutatív, reziduált művelet asszociativitása a művelet háromdimenziós grafikonjáról, ha a kérdéses feltétel nem teljesül.

A továbbiakban legyen $\circ$ egy $(M, \leq)$ részbenrendezett halmazon értelmezett kommutatív reziduált művelet. Megmutatjuk, hogy

3.1. Tétel. $\circ$ asszociativitása ekvivalens azzal, hogy a művelet forgatás-invariáns minden $\neg^c$ minden $c \in M$ esetén.

Továbbá, ha $\neg$ egy involúció, akkor a művelet pontosan akkor forgatás-invariáns $\neg$ -re nézve, ha az M^3 halmaznak a művelet grafikonja feletti része invariáns a $\sigma : M^3 \rightarrow M^3$, $(x, y, z) \mapsto (\neg z, x, \neg y)$ leképezésre nézve. E σ az M^3 háromrendű bijekciója, azaz $\sigma \circ \sigma \circ \sigma = id_{M^3}$. Speciálisan, ha $M = [0, 1]$ és $\neg x = 1 - x$ akkor σ megegyezik a $[0, 1]^3$ valós egységkockának azzal a 120° -kal történő ρ geometriai fogatásával, amely a $(0, 0, 1)$ és a $(1, 1, 0)$ pontokat fixen hagyja. Továbbá belátjuk, hogy mivel tetszőleges $\neg$ involúció a $[0, 1]$ -en rendezés-izomorf az $1 - x$ függvényrel, azaz létezik a $[0, 1]$ -nek olyan φ növekvő bijekciója, amelyre $\neg x = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$ igaz

([66]), ezért algebrai szempontból elegendő a fenti $\neg x = 1 - x$ esetet tekinteni, amelyre van világos geometriai leírás.

Ha $\neg^c$ ($c \in M$) nem involúció, akkor az $x \sim_c y \iff \bar{x}^c = \bar{y}^c$ ekvivalenciareláció $M_c = \{[x]_c \mid x \in M\}$ ekvivalenciaosztályain definiált $[x]_c \circ_c [y]_c = [\bar{x}^c \circ \bar{y}^c]_c$ művelet szintén reziduált, a $[x]_c \rightarrow_{\circ_c} [y]_c = [\bar{x}^c \rightarrow_{\circ} \bar{y}^c]_c$ reziduummal, és a $\circ$ művelet asszociativitása ekvivalens a $\circ_c$ műveletek asszociativitásával ($\forall c \in M$). A $\circ_c$ műveleteknél az alaphalmazuk legkisebb eleme által megadott reziduális komplementum mindig involúció, azaz a fenti eset szemléletes geometriai leírása alkalmazható.

Íly módon a kommutatív reziduált műveletek asszociativitását a forgatás-invarianciával jellemezzük, ami egy háromdimenziós geometriai forgatással áll szoros kapcsolatban.

Majd belátjuk, hogy a kommutatív, reziduált műveletek asszociativitása a művelet grafikonjának síkokkal való metszeteiből is látható. Metszet alatt itt a $\cdot \circ x$ és $\neg^c$ alakú egyváltozós függvényeket értjük, melyek kétdimenziós objektumok. Az antitón műveletek pszeudo-inverzét a valószínűségi metrikus terek elméletében a következőképpen szokás definiálni: Legyenek M és H részbenrendezett halmazok, 0 az M legkisebb eleme. Továbbá legyen $f : M \rightarrow H$ egy antitón leképezés amelyre minden $y \in H$ esetén a $\{t \in M \mid f(t) \geq y\}$ halmaznak létezik legkisebb felső korlátja M -ben. A $\sup \emptyset = 0$ konvencióval legyen $f^{(-1)} : H \rightarrow M$, $f^{(-1)}(y) = \sup\{t \in M \mid f(t) \geq y\}$ az f pszeudo-inverze. Könnyű látni, hogy az f függvény grafikonjából az $f^{(-1)}$ függvény grafikonja nagyon hasonlóan áll elő, mint a fogyó bijekciók inverz függvényének grafikonja, ami egy egyszerű tengelyes tükrözés eredménye. Azaz, ha egy függvény megegyezik a saját pszeudo-inverzével, akkor majdnem szimmetrikus egy tengelyes tükrözésre nézve. Az 1. ábra felső sora a forgatásinvarianciát, a második a pszeudo-inverz tulajdonságot illusztrálja. Azt mondjuk, hogy $\circ$ -ra igaz a pszeudo-inverz tulajdonság $c \in M$ -re nézve, ha $x \rightarrow_{\circ} \neg^c y = \neg^c(x \circ y)$ ($x, y, z \in M$) teljesül, és belátjuk, hogy

3.2. Tétel. $\circ$ pontosan akkor forgatás-invariáns $\neg^c$ -re nézve, ha teljesül rá a pszeudo-inverz tulajdonság c -re nézve, amely továbbá ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $x \in M$ esetén az $f_x : M \rightarrow M$, $y \mapsto \neg^c(x \circ y)$ függvény megegyezik a saját pszeudo-inverzével (azaz majdnem szimmetrikus egy tengelyes tükrözésre nézve). Például az $M = [0, 1]$, $c = 0$, $\neg^0(x) = 1 - x$ esetet tekintve ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in [0, 1]$ esetén a $v_x : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $y \mapsto x \circ y$ egyváltozós függvény, azaz $\circ$ grafikonjának függőleges metszete, majdnem szimmetrikus egy tengelyes tükrözésre nézve.

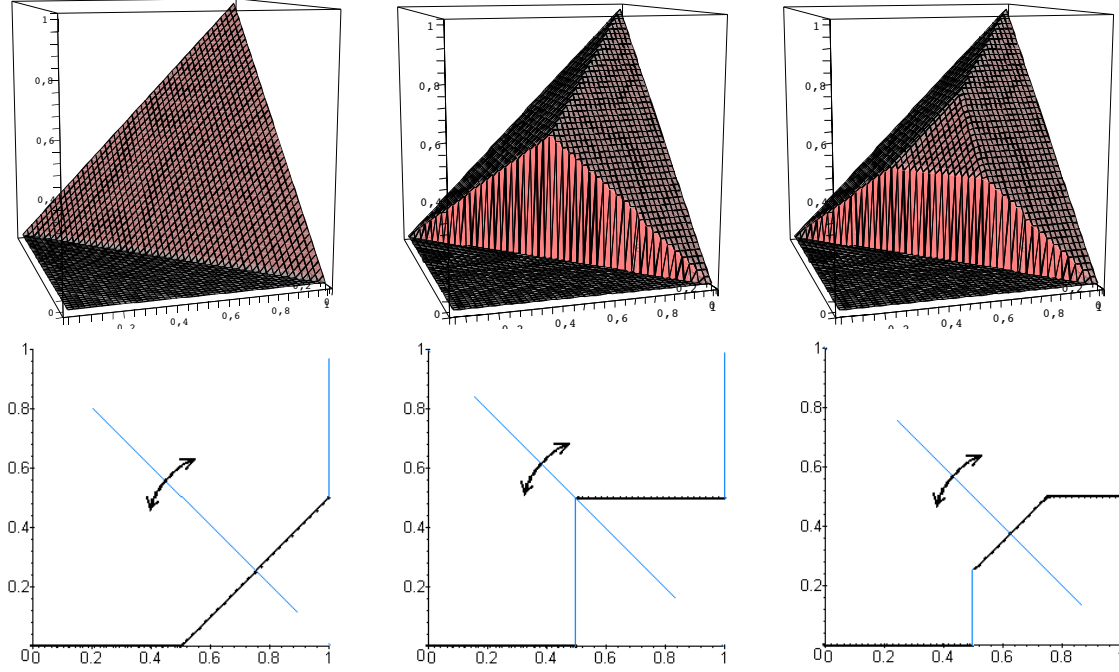
A geometriai rész másik fő eredménye az a felfedezés, hogy a művelet grafikonjának bizonyos részei invariánsak egy középpontos tükrözésre nézve:

3.1. Definíció. Tetszőleges $x, y \in M$ esetén legyen

$$x \circ_{co} y = \begin{cases} \inf\{x_1 \circ y_1 \mid x_1 > x, y_1 > y\} & \text{ha sem } x \text{ sem } y \text{ nem az alaphalmaz legnagyobb eleme,} \\ \inf\{x_1 \circ y \mid x_1 > x\} & \text{ha } y \text{ az alaphalmaz legnagyobb eleme, de } x \text{ nem,} \\ \inf\{x \circ y_1 \mid y_1 > y\} & \text{ha } x \text{ az alaphalmaz legnagyobb eleme, de } y \text{ nem,} \\ x \circ y & \text{ha mind } x \text{ mind } y \text{ az alaphalmaz legnagyobb eleme,} \end{cases}$$

amennyiben az infimum létezik.

Belátjuk, hogy



1. ábra. Kommutatív monoidok $[0, 1]$ -en (fent) és metszeteik $x = 0.5$ -nél (lent)

3.3. Tétel. ha $\circledast$ alaphalmaz teljes lánc, és $a, b, c \in M$ olyan elemek, melyekre igaz $a = b \rightarrow_{\circledast} c$, továbbá $(x, y) \in M \times M$ olyan pontja $a \circledast$ (mint kétváltozós függvény) értelmezési tartományának, melyre sem x sem y nem a legnagyobb eleme az alaphalmaznak, $x \circledast y = x \circledast_{co} y$, x a -zárt, y b -zárt, és vagy $\sup\{t \rightarrow_{\circledast} c \mid t > x \circledast y\} = x \circledast y \rightarrow_{\circledast} c$ vagy $\sup\{t \rightarrow_{\circledast} c \mid t > (x \rightarrow_{\circledast} a) \circledast (y \rightarrow_{\circledast} b)\} = (x \rightarrow_{\circledast} a) \circledast (y \rightarrow_{\circledast} b) \rightarrow_{\circledast} c$ teljesül, akkor $(x \rightarrow_{\circledast} a) \circledast (y \rightarrow_{\circledast} b) = x \circledast y \rightarrow_{\circledast} c$. Ha az alaphalmaz még sűrűn rendezett is (azaz, ha tetszőleges $x, y \in M$, $x < y$ esetén létezik $z \in M$, amelyre $x < z < y$) akkor $x \circledast y = x \circledast_{co} y$ feltétel pont azt jelenti, hogy az (x, y) pont $a \circledast$ függvény folytonossági pontja a rendezés topológiában, az utolsó feltétel jelentése pedig, hogy $a \rightarrow_{\circledast} c$ függvény folytonos vagy $a \rightarrow_{\circledast} c$ vagy $a \rightarrow_{\circledast} c$ pontban.

Bizonyos feltételek teljesülése esetén az $(x, y) \mapsto (x \rightarrow_{\circledast} a, y \rightarrow_{\circledast} b)$ hozzárendelés egy középpontos tükrözés az $x \geq a, y \geq b$ által meghatározott tartományon. Egy illusztráció látható a 2. ábrán: a függvény értéke az (x, y) (kék) pontban meghatározza a függvény értékét az $(x \rightarrow_{\circledast} a, y \rightarrow_{\circledast} b)$ (narancssárga) pontban; hasonló igaz a fehér téglalap minden pontjára. Általában is, ha a és b involutívak, és a c -komplementum függvény folytonos akkor egy egész tartomány összes folytonosság pontjára igaz ez a tükrözés-invariancia tulajdonság. Így módon a tükrözés-invariancia tulajdonság nemcsak azt jelenti, hogy a művelet grafikonjának egy része egyértelműen meghatározza egy másik részét, hanem a művelet folytonossági pontjainak "struktúrájába" is bepillantást enged:

3.4. Tétel. A folytonossági pontok e középpontos tükrözésnél származóképe is folytonossági pont.

A fent tárgyalt geometriai jellemzés algebrai összefüggések szemléletes, geometriai leírását is lehetővé teszi. Ilyenek például az involutív elemek “struktúrájáról” szóló eredmény, vagy a természetesen rendezett tulajdonság és az egyszerűsítési szabály egy változata közötti ekvivalencia: Belátjuk, hogy

Azt mondjuk, hogy egy részbenrendezett reziduált grupoid szigorúan növekvő a leszűkített tartóján, ha $x > {}^0y$, $y < y_1$, $x < x_1$ esetén $x * y < x * y_1$ és $x * y < x_1 * y$. Belátjuk, hogy

Ha az alaphalmaz legkisebb eleme involutív, akkor a félcsoport egységeleme mindig a legnagyobb elem:

Továbbá e geometriai jellemzés adta az ötletet az ú.n. IMTL logika egy ekvivalens Hilbert-féle axiomatizációjához (erre itt nem térünk ki részletesen), valamint a forgatás-konstrukció bevezetéséhez, melyet a hetedik fejezetben tárgyalunk. E geometriai szemléletmód lehetővé teszi például az alábbi állítás tisztán geometriai bizonyítását:

3.8. Tétel. *Egy részbenrendezett halmazon értelmezett félcsoporth-művelet mindig részben-rendezett, reziduált, integrál monoid, feltéve, hogy az alaphalmaz (létező) legkisebb eleme involutív.*

Végül, de nem utolsó sorban, e geometriai szemléletmód biztosította az intuíciót egy, a függvényegyenletek három nagynevű képviselője által feltett, asszociatív függvényekről szóló nyitott kérdés megválaszolásához. Figyelemre méltó, hogy e geometriai módszerrel a logikai problémák algebrai problémává való visszavezetése, amely az algebrai logikában szokásos, néha kiegészíthető egy algebra-geometria redukcióval. Sok esetben az így nyert geometriai problémára adott heurisztikus geometriai bizonyítás lépésről-lépésre lefordítható precíz algebrai bizonyítással.

A második fejezetben az asszociativitás geometriai jellemzését aknázzuk ki az asszociatív függvények egyértelműségi tartományainak problémakörében. Asszociatív függvényekről először Abel írt az 1826-os [14] munkájában ([49]), azóta számos matematikus vizsgálta e területet; a matematikai és történeti részleteket bővebben lásd Aczél János klasszikussá vált könyvében [15]. Az asszociatív függvények egy speciális osztályát, a t -normákat, számos matematikai területen alkalmazzák: ilyenek a valószínűségi metrikus terek elmélete, a játékelmélet, a nem-additív mérték- és integrálmélet, a mértékfüggetlen feltételes operátorok elmélete, a t -norma alapú logikák, a preferenciamodellezés és döntésmélet. Eredetileg a valószínűségi metrikus terek elméletében vezették be őket [61], de vizsgálták a félcsoporth-elmélet és a függvényegyenletek módszertanával is [50, 37, 47]. Az asszociatív függvények egyértelműségi tartományainak vizsgálata régóta kutatott probléma ([17, 48, 61, 23, 34, 65]). Egy függvény értelmezési tartományának részhalmazát egyértelműségi tartománynak nevezzük, ha egy megadott függvényosztályból választott két különböző függvény nem egyezhet meg teljesen ezen a részhalmazon. Más szóval, ha e tartományon előírt értékek egyértelműen meghatározzák a függvényt az egész tartományon. A forgatás-invariancia és a tükrözés-invariancia felhasználásával folytonos archimédeszi és balról-folytonos t -normák egyértelműségi tartományaira adunk új eredményeket: A tükrözés-invariancia felhasználásával belátjuk, hogy

3.9. Tétel. $\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid y \geq \neg x\}$ egyértelműségi tartomány a folytonos archimédeszi t -normák osztályára nézve tetszőleges fogyó $\neg, [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ típusú függvényre, amelyre $x > 0$ esetén $\neg x < 1$ igaz.

Másfelől, az involutív elemek struktúrájára vonatkozó tételt felhasználva, melyet a forgatás-invariancia motivált, a következő tételeket bizonyítjuk:

3.10. Tétel. *Legyen $\circledast$ tetszőleges balról-folytonos t -norma amelyhez létezik $\{c_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset]0, 1]$, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ és $x \in [0, 1]$ esetén*

$$x \rightarrow_{\circledast} c_n = \min(1, 1 + c_n - x). \quad (1)$$

Ekkor $\circledast$ a Łukasiewicz t -norma, azaz $x \circledast y = \max\{x + y - 1, 0\}$.

3.11. Tétel. *Legyen $\circledast$ egy balról-folytonos t -norma, amelyre létezik $\{c_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset]0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = 1$ és $x \in [0, 1]$ esetén*

$$x \rightarrow_{\circledast} c_n = \min\left(1, \frac{c_n}{x}\right). \quad (2)$$

Ekkor $\circledast$ a valós számok szorzása a $[0, 1]$ -en.

3.12. Tétel. Legyen $A = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset]0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Tetszőleges nullosztós folytonos archimédeszi t -normára a c_n -szintvonalai egyértelműségi tartomány. Továbbá, ha feltesszük, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = 1$ akkor tetszőleges folytonos archimédeszi nullosztómentes t -normára a c_n -szintvonalai egyértelműségi tartomány.

Példák mutatják, hogy e tartományok minimálisak, azaz lényegében nem szűkíthetők és a feltételek sem enyhíthetők. Figyelemre méltó, hogy a függvényegyenletek módszereivel már a folytonos eset (azaz, ha nem kell egyéb ú.n. regularitási feltételeket feltenni, mint például a folytonosan differenciálhatóság) sikeres vizsgálata is nagy fegyvertény; ennél tovább menni azonban nem lehet. A folytonosság itteni, algebrai megfelelője az oszthatóság, ami a természetesen rendezettség duálisa; ez sokkal szűkebb függvényosztály, mint a reziduált osztály. A geometriai módszer erejét mutatja, hogy segítségével a reziduált osztályról is bizonyíthatóak eredmények, mind ebben a témakörben, mind a következőben:

Az harmadik fejezetben a függvényegyenletek három jeles képviselője által feltett nyitott kérdést [16] válaszoljuk meg: Megmutatjuk, hogy bizonyos asszociatív függvények súlyozott szám-tani közepe sosem asszociatív:

3.13. Tétel. Legyen A és B két különböző balról-folytonos t -norma. Tegyük fel, hogy $c \in]0, 1]$ involutív A -ra nézve, valamint, hogy A és B c -szintvonala megegyezik. Ekkor $p \cdot A(x, y) + (1 - p) \cdot B(x, y)$, az A és B (nemtriviális) súlyozott számtani közepe nem asszociatív.

Sem a balról-folytonosság, sem a közös involutív szintvonal feltétele nem enyhíthető. Az eredmény érdekessége, hogy geometriai motiváció alapján algebrai módszerekkel visszavezetünk egy, a függvényegyenletek témakörében felmerült problémát valós, egyváltozós függvények szimmetriájáról szóló problémára, amit végül integrálokkal oldunk meg.

3.2. Beágyazás

A negyedik fejezetben bebizonyítjuk Esteve és Godo sejtését, miszerint az MTL logika a balról-folytonos t -normák logikája [36]. Az MTL logikának két konjunkciója van ($\hat{\wedge}$ multiplikatív és $\wedge$ additív), egy $\rightarrow$ (multiplikatív) implikációja és egy $\bar{0}$ konstansa. Az $\vee$ additív diszjunkciót és az $\bar{1}$ konstanst a következőképpen definiáljuk: $A \vee B \equiv ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \wedge ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ és $\bar{1} \equiv \bar{0} \rightarrow \bar{0}$. Egyetlen szabály van, a Modus Ponens: $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$. Az MTL logika axiómái:

$$(A1) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

$$(A2) \quad (A \hat{\wedge} B) \rightarrow A.$$

$$(A3) \quad (A \hat{\wedge} B) \rightarrow (B \hat{\wedge} A).$$

$$(A4) \quad (A \wedge B) \rightarrow A.$$

$$(A5) \quad (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A).$$

$$(A6) \quad (A \hat{\wedge} (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \wedge B).$$

$$(A7) \ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C).$$

$$(A8) \ ((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)).$$

$$(A9) \ ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow C).$$

$$(A10) \ \bar{0} \rightarrow A.$$

A szokásos standard eljárással, a prelinearitást kihasználva, Esteva és Godo belátták a [36] cikkben, hogy az MTL logika teljes a rendezett *MTL*-algebrák osztályára nézve, azaz tetszőleges *A* MTL formulára $MTL \vdash A$ akkor és csak akkor, ha tetszőleges *A* rendezett *MTL*-algebrára és *e* értékelésre az *A*-ba, $e(A) = 1$. Fő eredményünk egy beágyazási tétel:

3.14. Tétel. *Legyen $\mathcal{S} = \langle S, \star, \rightarrow, \leq_S, 0_S, 1_S \rangle$ egy megszámlálható, rendezett MTL-algebra. Ekkor létezik egy $\langle X, \preceq \rangle$ megszámlálható, sűrűn rendezett, rendezett halmaz az m legkisebb és az M legnagyobb elemekkel, rajta egy kétváltozós $\circ$ művelet, valamint egy $\Phi : S \rightarrow X$ leképezés, melyekre $\langle X, \circ, \preceq, M \rangle$ egy kommutatív integrál monoid, $\circ$ balról-folytonos a $\langle X, \preceq \rangle$ rendezés topológiájában, és Φ olyan beágyazása az $\langle S, \star, \leq_S, 0_S, 1_S \rangle$ -nek az $\langle X, \circ, \preceq, m, M \rangle$ -be, amelyre $s, t \in S$ esetén $\Phi(s \rightarrow t)$ a $\Phi(s)$ -nek és a $\Phi(t)$ -nek a reziduuma $\langle X, \circ, \preceq, m, M \rangle$ -ben. (Azaz nem állítjuk, hogy $\langle X, \circ, \preceq, m, M \rangle$ reziduált, csak a Φ képterében lévő elemek reziduumainak létezését követeljük meg.)*

Majd e tételt felhasználva belátjuk, hogy

3.15. Tétel. *tetszőleges megszámlálható, rendezett MTL-algebra beágyazható egy standard algebrába (azaz egy $[0, 1]$ -en értelmezett MTL-algebrába; itt a monoid művelet egy balról-folytonos t -norma).*

Mindezekből már következik, hogy

3.16. Következmény. *az MTL logika teljes a standard MTL-algebrák osztályára nézve.*

Az eredmény három tekintetben is alapvető jelentőségű: Egyfelől igazolja, hogy az MTL logika a legáltalánosabb t -norma alapú logika, szemben P. Hájek logikájával [42], melyet a szerző Basic Logic-nak nevezett, és amely a folytonos t -normák logikája [25]. Másfelől lehetővé teszi a t -norma alapú logikák és a szubstrukturális logikák szoros kapcsolatának kimutatását [40, 51]. Harmadrészt a bizonyítás alapja, az említett eredeti beágyazási módszer, azóta saját jogon is fontossá vált. Számos más logika standard teljeségét bizonyították be e módszer kis megváltoztatásával [29, 30, 35, 52], valamint olyan cikk is megjelent, ahol belátták, hogy a “Jenei-Montagna” beágyazás létezése nem csak elégséges, de szükséges feltétele is egy logika erős standard teljeségének [31].

Az 5. fejezetben egy olyan konstrukciót vezetünk be, amely a fent említett beágyazási tételt felhasználva eddig nem ismert balról-folytonos t -normákat gyárt: Belátjuk, hogy tetszőleges megszámlálható, rendezett, kommutatív, integrál monoid (nem feltétlen reziduált) beágyazható egy balról-folytonos t -normába. E tétel bizonyításában van egy, a kiválasztási axiómát felhasználó elem. Egyes esetekben azonban analitikus képlet is adható a beágyazásra, s így konkrét balról-folytonos t -normákat lehet gyártani. Ilyen eset például, ha a beágyazandó monoid alaphalmaza véges vagy végtelen lexikografikus szorzat. A véges esetről szóló tétel az alábbi:

3.17. Tétel. Egy részbenrendezett $\circ$ grupoidról azt mondjuk, hogy konjunktív, ha $x \circ y \leq x$ és $x \circ y \leq y$. Legyen $a \in]0, 1[$, $j \in \mathbf{N}$. Legyen $\varphi_{a,j}(x)$ a rendezést megtartó $]a^{j+1}, a^j]$ -ről $]0, 1]$ -re képező lineáris izomorfizmus, azaz legyen $\varphi_{a,j}(x) = \frac{x-a^{j+1}}{a^j-a^{j+1}}$. Ha $j = 0$ akkor jelölje φ_a $\varphi_{a,0}$ -t. Legyen $k \in \mathbf{N}$ és T tetszőleges nullosztómentes t -norma. Legyen $\oplus_i$ egy kommutatív, diszjunktív, monoid művelet $\mathbf{N}$ -en a 0 nullelemmel $1 \leq i \leq k$ esetén.

i. Az alábbi három $T_{\langle k \rangle}$ -ra adott definíció ekvivalens.

1. Legyen $\varepsilon > 0$ egy infinitezimális,

$$X_k = \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{k+1} n_i \cdot \varepsilon^i \mid n_i \in \mathbf{N} \ (1 \leq i \leq k), \ n_{k+1} \in \mathbf{R}^+ \right\}.$$

Válasszunk tetszőlegesen $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \alpha_{k+1} < 1$ számokat és legyen $a_i = \varphi_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)$ ($1 \leq i \leq k+1$). Legyen a $\mathbf{R}^+$ -on megadott $\oplus_T$ művelet a következő:

$$r \oplus_T s = \log_{a_{k+1}} \left(T \left(a_{k+1}^r, a_{k+1}^s \right) \right),$$

és legyen az X_k -n megadott $\circ$ művelet

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{k+1} n_i \cdot \varepsilon^i \right) \circ \left(1 - \sum_{i=1}^{k+1} m_i \cdot \varepsilon^i \right) = 1 - \left(\sum_{i=1}^k (n_i \oplus_i m_i) \cdot \varepsilon^i \right) - (n_{k+1} \oplus_T m_{k+1}) \cdot \varepsilon^{k+1}.$$

Legyen $\phi_\emptyset = id|_{]0,1]}$, $\phi_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \varphi_{a_1, n_1}^{-1} \circ \varphi_{a_2, n_2}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{a_k, n_k}^{-1}$ és legyen $\eta_k : X_k \rightarrow]0, 1]$ az alábbi

$$\eta_k \left(1 - \sum_{i=1}^{k+1} n_i \cdot \varepsilon^i \right) = \phi_{n_1, n_2, \dots, n_k} \left(a_{k+1}^{n_{k+1}} \right). \quad (3)$$

Ekkor η_k egy rendezést megőrző bijekció X_k -ről $]0, 1]$ -re. Végül, legyen $T_{\langle k \rangle}$ a $]0, 1]$ -en a következő művelet:

$$T_{\langle k \rangle}(x, y) = \eta_k \left(\eta_k^{-1}(x) \circ \eta_k^{-1}(y) \right). \quad (4)$$

2. Tetszőleges $x \in]0, 1]$ esetén legyen $n_{k,0}(x) = 0$, $x_{k,0} = x$. Rekurzívan definiáljuk a következőket:

$$n_{k,i}(x) = \lfloor \log_{a_i} (x_{k,i-1}) \rfloor,$$

$$x_{k,i} = \varphi_{a_i} \left(\frac{x_{k,i-1}}{a_i^{n_{k,i}(x)}} \right)$$

$1 \leq i \leq k$ esetén és legyen $n_{k,k+1}(x) = \log_{a_{k+1}} (x_{k,k})$. Definiáljuk a $]0, 1]$ -en a $T_{\langle k \rangle}$ műveletet a következőképpen:

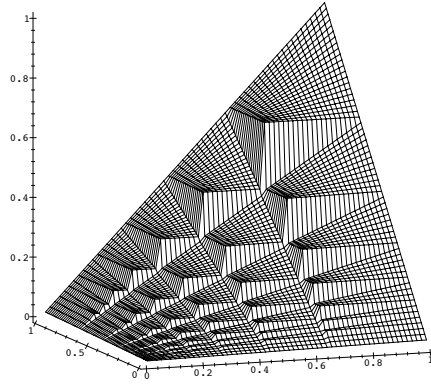
$$T_{\langle k \rangle}(x, y) = \phi_{n_{k,1}(x) \oplus_1 n_{k,1}(y), n_{k,2}(x) \oplus_2 n_{k,2}(y), \dots, n_{k,k}(x) \oplus_k n_{k,k}(y)} \left(a_{k+1}^{n_{k,k+1}(x) \oplus_T n_{k,k+1}(y)} \right). \quad (5)$$

3. Legyen $T_{\langle 0 \rangle} = T$. Az $1 \leq i \leq k$ értékekre legyen $T_{\langle i \rangle}$ az alábbi $]0, 1]$ -en definiált művelet

$$T_{\langle i \rangle}(x, y) = \varphi_{a_{k+1-i}, n_{i,1}(x) \oplus_{k+1-i} n_{i,1}(y)}^{-1} \left(T_{\langle i-1 \rangle} \left(\varphi_{a_{k+1-i}} \left(\frac{x}{a_{k+1-i}^{n_{i,1}(x)}} \right), \varphi_{a_{k+1-i}} \left(\frac{y}{a_{k+1-i}^{n_{i,1}(y)}} \right) \right) \right) \quad (6)$$

Továbbá,

- ii. $T_{\langle k \rangle}$ egy nullosztómentes t -norma.
- iii. $T_{\langle k \rangle}$ pontosan akkor balról-folytonos, ha T az.
- iv. $T_{\langle k \rangle}$ szigorúan monoton növekvő akkor és csak akkor, ha T az.
- v. A 3. definíciót használva $T_{\langle k \rangle} \mid_{] \alpha_1, 1]}$ rendezés-izomorf $T_{\langle k-1 \rangle}$ -gyel.



3. ábra. Egy példa $T_{\langle 2 \rangle}$ -re. $T_{\langle 3 \rangle}, T_{\langle 4 \rangle}$, stb “textúrája” egyre finomabb, határátmenettel “asszociatív fraktálokat” is gyárthatunk.

A végtelen lexikografikus szorzat esetről szóló tétel:

3.18. Tétel. *Tetszőleges $i \in \mathbf{N}$ esetén legyen $\oplus_i$ egy kommutatív, diszjunktív, monoid művelet $\mathbf{N}$ -en a 0 nullelemmel.*

i. *Az alábbi három $T_{\langle \infty \rangle}$ -re adott definíció ekvivalens.*

I. *Legyen $\varepsilon > 0$ egy infinitezimális, $X = \{1 - \sum_{i=1}^{\infty} n_i \cdot \varepsilon^i \mid n_i \in \mathbf{N}, i \in \mathbf{N}\}^1$. Válasszunk tetszőlegesen $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_i < \dots < 1, \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 1$ számokat és legyen $a_i = \varphi_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)$ ($i \in \mathbf{N}$).*

Legyen az X_k -n megadott $\circledast$ művelet

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} n_i \cdot \varepsilon^i\right) \circledast \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} m_i \cdot \varepsilon^i\right) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} (n_i \oplus_i m_i) \cdot \varepsilon^i\right).$$

Legyen X_k , $\phi_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ és η_k ugyanaz, mint az előző tételben, továbbá legyen $\eta_{\infty} : X \rightarrow]0, 1]$

$$\eta_{\infty} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} n_i \cdot \varepsilon^i\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k \left(1 - \sum_{i=1}^{k+1} n_i \cdot \varepsilon^i\right). \quad (7)$$

¹It az összeg formálisan értendő.

Ekkor η_∞ egy rendezést megőrző bijekció X -ről $]0, 1[-$ -re. Végül, legyen $T_{\langle\infty\rangle}$ a $]0, 1[-$ -en a következő művelet:

$$T_{\langle\infty\rangle}(x, y) = \eta_\infty(\eta_\infty^{-1}(x) * \eta_\infty^{-1}(y)). \quad (8)$$

2. Tetszőleges $x \in]0, 1]$ esetén legyen $n_0(x) = 0$, $x_0 = x$. Rekurzívan definiáljuk a következőket:

$$n_i(x) = \lfloor \log_{a_i}(x_{i-1}) \rfloor,$$

$$x_i = \varphi_{a_i} \left(\frac{x_{i-1}}{a_i^{n_i(x)}} \right)$$

$i \in \mathbf{N}$, $i > 0$ esetén. Természetes számok tetszőleges $\varsigma = \langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle$ sorozatára legyen $\phi_\varsigma = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{n_1, n_2, \dots, n_i}$. Továbbá, legyen $\varsigma(x, y) = \langle n_1(x) \oplus_1 n_1(y), n_2(x) \oplus_2 n_2(y), \dots, n_i(x) \oplus_i n_i(y), \dots \rangle$, és definiáljuk a $]0, 1[-$ -en a $T_{\langle\infty\rangle}$ műveletet a következőképpen:

$$T_{\langle\infty\rangle}(x, y) = \phi_{\varsigma(x, y)}(1). \quad (9)$$

3. Legyen T tetszőleges balról-folytonos t -norma és legyen $T_{\langle i \rangle}$ megadva a (6) képlettel $i \in \mathbf{N}$ esetén. Legyen $T_{\langle\infty\rangle}$ az alábbi $]0, 1[-$ -en definiált művelet

$$T_{\langle\infty\rangle}(x, y) = \lim_{i \rightarrow \infty} T_{\langle i \rangle}(x, y) \quad (10)$$

Továbbá,

ii. $T_{\langle\infty\rangle}$ szigorúan monoton növekvő, nullosztómentes, balról-folytonos t -norma.

iii. Ha $\oplus_i = \oplus_1$ $i \in \mathbf{N}$, $i > 0$ -ra akkor $T_{\langle\infty\rangle} \upharpoonright_{]0, 1]}$ rendezés-izomorf $T_{\langle\infty\rangle}$ -nel.

Ez utóbbi tétel segítségével olyan balról-folytonos t -normákat is konstruálhatunk, melyeknek a szakadási pontjainak halmaza sűrű.

A folytonos t -normák struktúrájának kielégítő leírása és osztályozásuk is már régóta ismert Mostert és Shields topologikus félcsoportokról írt munkája nyomán [53]. A csak balról-folytonos t -normák tekintetében sokáig még példa sem volt ismert, habár számos t -normákat használó elmélet csupán balról-folytonos műveleteket igényelt. Azon túl, hogy új balról-folytonos t -normákat vezettünk be, e módszer új szempontból láttatja Chang MV-algebráját [24], egy különös t -normát [64] és Hájek Π -MTL logikájának standard szemantikáját; ezekre itt nem térünk ki részletesen.

A balról-folytonos t -normák struktúrája sokkal bonyolultabb, mint a folytonosaké [44], Mostert és Shields típusú strukturális leírásuk és osztályozásuk ([53]) igen nehéznek tűnik, talán lehetetlen is. A hatodik fejezetben a balról-folytonos t -normákat vizsgáljuk, különös tekintetek a folytonossági pontjainak halmazára. Belátjuk, hogy

3.19. Tétel. *a balról-folytonos t -normák folytonossági pontjainak halmaza mindig sűrű, sőt, a szakadási pontok halmaza nullmértékű, első kategóriájú halmaz.*

Ezután azokat a balról-folytonos t -normákat jellemezzük, melyek izomorfak a racionális egységintervallumon értelmezett folytonos t -normák (értsd: osztható, kommutatív, integrál monoidok)

lezárásaival, ahol a lezártat a $x \hat{*} y = \sup\{d \otimes e : (d, e) \in \mathbf{Q} \cap [0, 1], d \leq x \text{ and } e \leq y\}$ képlettel értelmezzük. Belátjuk, hogy az összes olyan balról-folytonos t -norma ide tartozik, amely gyengén cancellatív (azaz, amely szigorúan növekvő $(0, 1]^2$ -en):

3.20. Tétel. *Tetszőleges gyengén cancellatív balról-folytonos t -norma előáll egy, a racionális egységintervallumon értelmezett folytonos t -norma lezárásaként. Másfelől létezik olyan balról-folytonos t -norma, amely nem áll elő semmilyen a racionális egységintervallumon értelmezett folytonos t -norma lezárásaként.*

3.3. Struktúra

A hetedik fejezetben az involutív reziduált hálók általánosításaként bevezetjük a forgatás-invariáns félcsoporthoz fogalmát: Legyen $(M, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, $\neg$ az M egy involúciója. Egy $\otimes$ műveltre az M -en azt mondjuk, hogy forgatás-invariáns $\neg$ -ra nézve, ha $x, y, z \in M$ esetén $x \otimes y \leq z \Rightarrow y \otimes \neg z \leq \neg x$. Az első fejezet geometriai jellemzésétől motiválva bevezetjük a forgatás és a forgatás-annihilálás konstrukciókat, mindegyik lehet érintkezéses vagy érintkezés nélküli. E konstrukciók bizonyos reziduált félcsoporthozból involutív reziduált félcsoporthozat gyártanak:

Jelölje $\mathcal{M}^T$ a legnagyobb elemmel bíró részbenrendezett halmazok, $\mathcal{M}^B$ a korlátos részbenrendezett halmazok, $\mathcal{M}^{BT}$ az involutív, korlátos részbenrendezett halmazok osztályát, valamint $\mathcal{L}^T$ a legnagyobb elemmel bíró hálók, $\mathcal{L}^B$ a korlátos hálók és $\mathcal{L}^{BT}$ az involutív, korlátos hálók osztályát.

3.2. Definíció. (ϑ -operátor) Definiáljuk a $\vartheta : \mathcal{M}^T \rightarrow \mathcal{M}^{BT}$ operátort a következőképpen: Legyen $(M, \leq, 1)$ egy részbenrendezett halmaz, 1 a legnagyobb eleme. Tekintsük M diszjunkt másolatát, M' -t és lássuk el M duális rendezésével. Azaz, legyen $M' := \{x' \mid x \in M\}$ és $x', y' \in M'$ -re legyen $x' \leq' y'$ pontosan akkor, ha $y \leq x$. Legyen $\vartheta(M) = M \cup M'$ és definiáljunk egy $\leq_\vartheta$ részbenrendezést $\vartheta(M)$ -en: $x, y \in \vartheta(M)$ esetén legyen

$$x \leq_\vartheta y \text{ ha } \begin{cases} x, y \in M \text{ és } x \leq y \\ x, y \in M' \text{ és } x \leq' y \\ x \in M' \text{ és } y \in M \end{cases} \quad (11)$$

Ekkor $(\vartheta(M), \leq_\vartheta, 1, 0)$ egy korlátos részbenrendezett halmaz az 1 legnagyobb és $0 := 1'$ legkisebb elemmel, és $\neg : \vartheta(M) \rightarrow \vartheta(M)$

$$\neg x = \begin{cases} x' & \text{if } x \in M \\ y & \text{if } x \in M' \text{ és } y' = x \end{cases}$$

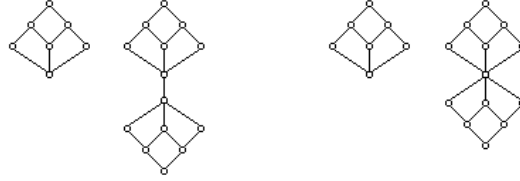
egy involúció $\vartheta(M)$ -en. Továbbá, $(\vartheta(M), \leq_\vartheta)$ pontosan akkor háló, ha $(M, \leq)$ az.

3.3. Definíció. (θ -operátor) Definiáljuk a $\theta : \mathcal{M}^B \rightarrow \mathcal{M}^{BT}$ operátort a következőképpen: Legyen $(M, \leq, 1, \iota)$ egy korlátos részbenrendezett halmaz az 1 legnagyobb és ι legkisebb elemmel. Tekintsük $M \setminus \{\iota\}$ diszjunkt másolatát M' -t és lássuk el M duális rendezésével. Azaz, legyen $M' := \{x' \mid x \in M \setminus \{\iota\}\}$ és $x', y' \in M'$, $x' \leq' y'$ pontosan akkor, ha $y \leq x$. Legyen

$\theta(M) = M \cup M'$ és definiáljunk egy $\leq_\theta$ részbenrendezést a $\theta(M)$ -n: $x, y \in \theta(M)$ esetén legyen $x \leq_\theta y$ a (11) által megadva Ekkor $(\theta(M), \leq_\theta, 1, 0)$ egy korlátos részbenrendezett halmaz az 1 legnagyobb és $0 := 1'$ legkisebb elemmel, és $\neg : \theta(M) \rightarrow \theta(M)$

$$\neg x = \begin{cases} \iota & \text{if } x = \iota \\ x' & \text{if } x \in M \setminus \{\iota\} \\ y & \text{if } x \in M' \text{ és } y' = x \end{cases}$$

egy involúció $\theta(M)$ -en. Továbbá, $(\theta(M), \leq_\theta)$ pontosan akkor háló, ha $(M, \leq)$ az.



4. ábra. Illusztrációk: ϑ -operátor (balra) és θ -operátor (jobbra)

3.21. Tétel. (érintkezés nélküli forgatás) Legyen $(M, \leq, 1) \in \mathcal{M}^T$ és $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_\otimes)$ egy kommutatív, reziduált, részbenrendezett félcsoport. Legyen $M_\vartheta = \vartheta(M)$ és definiáljunk rajta két műveletet: Legyen $M^+ := M$, $M^- := M_\vartheta \setminus M^+$ és legyen $x \otimes_\vartheta y =$

$$\begin{cases} x \otimes y & \text{if } x, y \in M^+ \\ \neg(x \rightarrow_\otimes \neg y) & \text{if } x \in M^+ \text{ és } y \in M^- \\ \neg(y \rightarrow_\otimes \neg x) & \text{if } x \in M^- \text{ és } y \in M^+ \\ 0 & \text{if } x, y \in M^- \end{cases}, \quad (12)$$

és $x \rightarrow_{\otimes_\vartheta} y =$

$$\begin{cases} x \rightarrow_\otimes y & \text{if } x, y \in M^+ \\ \neg(x \otimes \neg y) & \text{if } x \in M^+ \text{ és } y \in M^- \\ 1 & \text{if } x \in M^- \text{ és } y \in M^+ \\ \neg y \rightarrow_\otimes \neg x & \text{if } x, y \in M^- \end{cases}. \quad (13)$$

Ekkor $(M_\vartheta, \leq_\vartheta, \otimes_\vartheta, \rightarrow_{\otimes_\vartheta}, \neg, 1, 0)$ egy kommutatív, forgatás-invariáns, részbenrendezett félcsoport, melyet az $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_\otimes)$ érintkezés nélküli forgatásának nevezünk.

Továbbá,

- A. $(M_\vartheta, \leq_\vartheta, \otimes_\vartheta)$ pontosan akkor konjunktív, ha $(M, \leq, \otimes)$ az.
- B. $(M_\vartheta, \leq_\vartheta, \otimes_\vartheta, \rightarrow_{\otimes_\vartheta}, \neg, 1, 0)$ integrál monoid és 0 involutív pontosan akkor, ha $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_\otimes)$ integrál monoid.
- C. $(M_\vartheta, \leq_\vartheta)$ pontosan akkor hálórendezett, ha $(M, \leq)$ háló.

D. $(M_\theta, \leq_\theta, \otimes_\theta, \rightarrow_{\otimes_\theta}, \neg, 1, 0)$ pontosan akkor involutív reziduált háló, ha $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_\otimes)$ egy integrál hálórendezett monoid.

3.22. Tétel. (érintkezéssel forgatás) Legyen $(M, \leq, 1, \iota) \in \mathcal{M}^B$ és $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_\otimes)$ egy kommutatív, reziduált, részbenrendezett félcsoporthoz, amelynek vagy

1. nincs nullosztója vagy

2. van nullosztója. Ezen esetben tegyük fel, hogy létezik $c \in M$ úgy, hogy tetszőleges x nullosztóra $x \rightarrow_\otimes \iota = c$.

Legyen $M_\theta = \theta(M)$ és definiáljuk két műveletet M_θ -en: Legyen $M^+ := M \setminus \{\iota\}$, $M^- := M_\theta \setminus M^+$ és legyen $x \otimes_\theta y$ és $x \rightarrow_{\otimes_\theta} y$ megadva a (12) és (13) definícióval.

Ekkor $(M_\theta, \leq_\theta, \otimes_\theta, \rightarrow_{\otimes_\theta}, \neg, 1, 0)$ egy kommutatív, forgatás-invariáns, részbenrendezett félcsoporthoz, melyet az $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_\otimes)$ érintkezéssel forgatásának nevezünk.

Továbbá,

A. $(M_\theta, \leq_\theta, \otimes_\theta)$ pontosan akkor konjunktív, ha $(M, \leq, \otimes)$ az.

B. $(M_\theta, \leq_\theta, \otimes_\theta, \rightarrow_{\otimes_\theta}, \neg, 1, 0)$ integrál monoid és 0 involutív pontosan akkor, ha $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_\otimes)$ integrál monoid.

C. $(M_\theta, \leq_\theta, \otimes_\theta)$ pontosan akkor hálórendezett, ha $(M, \leq)$ háló.

D. $(M_\theta, \leq_\theta, \otimes_\theta, \rightarrow_{\otimes_\theta}, \neg, 1, 0)$ pontosan akkor involutív reziduált háló, ha $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_\otimes, 1)$ egy integrál hálórendezett monoid.

A két tétel közötti lényeges különbség az, hogy az elsőben a $\neg$ involúciónak nincs fixpontja, míg a másodikban pontosan egy fixpontja van. Mindkét tétel éles, azaz a kiindulási műveletek nem választhatók tágabb osztályból. E konstrukciók azonnali alkalmazása a következő

3.23. Tétel. Egy kommutatív, hálórendezett csoport negatív kúpjának érintkezés nélküli forgatása MV-algebra.

Az érintkezéssel és érintkezés nélküli forgatás konstrukciók alapvető szerepet játszanak a perfekt és bipartit IMTL-algebrák [54], a szabad nilpotens minimum algebrák [20], a szabad Glivenko MTL-algebrák [28], a Nelson algebrák [21] strukturális leírásánál, valamint a végesen generált szabad nilpotens minimum algebrák spektrális dualitásának leírásánál [22].

3.24. Tétel. (annihiláció) Legyen $(M, \leq, \otimes, \neg)$ egy involutív, konjunktív részbenrendezett grupoid. Egészítsük ki az alaphalmazát egy új elemmel, a 0-val és legyen $0 \leq x$ minden $x \in M$ -re. Definiáljunk egy $\underline{\otimes}$ műveletet az $M \cup \{0\}$ -n

$$x \underline{\otimes} y = \begin{cases} 0 & \text{ha vagy } x \text{ vagy } y \text{ egyenlő } 0\text{-val, vagy } x, y \in M \text{ és } x \leq \neg y \\ x \otimes y & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ekkor

- Ha $(M, \otimes)$ kommutatív akkor $(M \cup \{0\}, \otimes)$ is az.
- Ha $(M, \otimes)$ hálórendezett akkor $(M \cup \{0\}, \otimes)$ is az.
- Ha $(M, \leq, \otimes, \neg)$ egy involutív, konjunktív, forgatás-invariáns részbenrendezett félcsoport akkor $(M \cup \{0\}, \leq, \otimes)$ is részbenrendezett félcsoport, továbbá $(M, \leq, \otimes)$ és $(M \cup \{0\}, \leq, \otimes)$ reziduált, M -nek van $\top$ legnagyobb eleme és $\perp$ legkisebb eleme, és a $\otimes$ reziduuma

$$x \rightarrow_{\otimes} y = \begin{cases} x \rightarrow_{\otimes} y & \text{if } x, y \in M \\ \neg x & \text{if } x \in M \text{ és } y = 0 \\ \top & \text{if } x = 0 \end{cases} . \quad (14)$$

- Ha $(M, \otimes)$ monoid vagy integrál monoid akkor $(M \cup \{0\}, \otimes)$ is az.

3.4. Definíció. (ω -operátor) Defináljuk a $\omega : \mathcal{M}^T \times \mathcal{M}^{BT} \rightarrow \mathcal{M}^{BT}$ operátort a következőképpen: Legyen $M \cap M_1 = \emptyset$, $(M, \leq, 1)$ egy részbenrendezett halmaz legnagyobb elemmel és $(M_1, \preceq, \neg, \top, \perp)$ egy korlátos, involutív részbenrendezett halmaz. Tekintsük M -nek egy diszjunkt M' másolatát amely diszjunkt M_1 -től a $\leq$ duális rendezésével. Azaz, legyen $M' := \{x' \mid x \in M\}$ és $x', y' \in M'$, $x' \leq' y'$ pontosan akkor, ha $y \leq x$. Legyen $\omega(M, M_1) = M \cup M_1 \cup M'$ és definiáljunk egy $\leq_{\omega}$ részben-rendezést $\omega(M, M_1)$ -en: $x, y \in \omega(M, M_1)$ esetén legyen

$$x \leq_{\omega} y \quad \text{iff} \quad \begin{cases} x, y \in M & \text{and } x \leq y \\ x, y \in M' & \text{and } x \leq' y \\ x, y \in M_1 & \text{and } x \preceq y \\ x \in M' & \text{and } y \in M \\ x \in M' & \text{and } y \in M_1 \\ x \in M_1 & \text{and } y \in M \end{cases}$$

Ekkor $(\omega(M, M_1), \leq_{\omega}, 1, 0)$ egy korlátos háló az 1 legnagyobb és a $0 := 1'$ legkisebb elemmel, és $\neg : \omega(M, M_1) \rightarrow \omega(M, M_1)$

$$\neg x = \begin{cases} x' & \text{if } x \in M \\ x^{\neg} & \text{if } x \in M_1 \\ y & \text{if } x \in M' \text{ és } y' = x \end{cases}$$

egy involúció $\omega(M, M_1)$ -en. Továbbá, $(\omega(M, M_1), \leq_{\omega})$ háló ha $(M, \leq)$ és $(M_1, \preceq)$ is az.

3.5. Definíció. (ϖ -operátor) Defináljuk a $\varpi : \mathcal{M}^B \times \mathcal{M}^{BT} \rightarrow \mathcal{M}^{BT}$ operátort a következőképpen: Legyen $M \cap M_1 = \emptyset$, $(M, \leq, 1, \iota)$ egy részbenrendezett halmaz az 1 legnagyobb és az ι legkisebb elemmel, és legyen $(M_1, \preceq, \neg, \top, \perp)$ egy korlátos, involutív, részbenrendezett halmaz. Tekintsük az M M' másolatát, amely diszjunkt mind M -től, mind M_1 -től a $\leq$ duális rendezésével. Azaz, legyen $M' := \{x' \mid x \in M\}$ és $x', y' \in M'$ esetén $x' \leq' y'$ pontosan akkor, ha $y \leq x$.

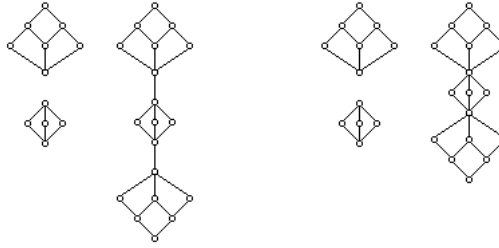
Legyen $\dot{M}_1 = M_1 \setminus (\{\top\} \cup \{\perp\})$ és legyen $\varpi(M, M_1) = M \cup \dot{M}_1 \cup M'$. Definiáljunk egy $\leq_\varpi$ részben-rendezést $\varpi(M, M_1)$ -en: $x, y \in \varpi(M, M_1)$ esetén legyen

$$x \leq_\varpi y \quad \text{iff} \quad \begin{cases} x, y \in M & \text{and } x \leq y \\ x, y \in M' & \text{and } x \leq' y \\ x, y \in \dot{M}_1 & \text{and } x \preceq y \\ x \in M' & \text{and } y \in M \\ x \in M' & \text{and } y \in \dot{M}_1 \\ x \in \dot{M}_1 & \text{and } y \in M \end{cases}$$

Ekkor $(\varpi(M, M_1), \leq_\varpi, 1, 0)$ egy korlátos részbenrendezett halmaz az 1 legnagyobb és a $0 := 1'$ és legkisebb elemmel, és $\neg : \varpi(M, M_1) \rightarrow \varpi(M, M_1)$

$$\neg x = \begin{cases} x' & \text{if } x \in M \\ y & \text{if } x \in M' \text{ és } y' = x \\ x^\sharp & \text{if } x \in \dot{M}_1 \end{cases}$$

egy involúció $\varpi(M, M_1)$ -en. Ha $\iota = \top$ -ot és $\iota' = \perp$ -ot azonosítjuk, akkor beágyazhatjuk M -et, M_1 -et és M' -t $\varpi(M, M_1)$ -be. Továbbá, $(\varpi(M, M_1), \leq_\varpi)$ pontosan akkor háló, ha $(M, \leq)$ és $(M_1, \preceq)$ hálók.



5. ábra. Illusztráció: ω -operátor (balra) és ϖ -operátor (jobbra)

3.25. Tétel. (érintkezés nélküli forgatás-annihiláció) Legyen $M \cap M_1 = \emptyset$, $(M, \leq, 1) \in \mathcal{M}^T$, $(M_1, \preceq, \top, \perp) \in \mathcal{M}^{BI}$, $M_\omega = \omega(M, M_1)$ és $\neg$ az involúciója. Legyen

$(M, \leq, \otimes, \rightarrow_\otimes)$ egy kommutatív, reziduált, részbenrendezett félcsoporth,

$(M_1, \preceq, \odot, \rightarrow_\odot, \top, \perp)$ egy kommutatív, konjunktív, forgatás-invariáns részbenrendezett félcsoporth,

Definiáljunk két műveletet M_ω -n: Először legyen a $\oplus$ művelet megadva $M_1 \subset M_\omega$ -en a

$$x \oplus y = \begin{cases} 0 & \text{if } x \preceq \neg y \\ x \odot y & \text{egyébként} \end{cases} \quad (15)$$

képlettel. Majd legyen $M^+ = M$, $M^0 = M_1$, $M^- = M_\omega \setminus (M^+ \cup M^0)$ és legyen $x \circledast_\omega y =$

$$\begin{cases} x \circledast y & \text{if } x, y \in M^+ \\ \neg(x \rightarrow_\circ \neg y) & \text{if } x \in M^+, y \in M^- \\ \neg(y \rightarrow_\circ \neg x) & \text{if } x \in M^-, y \in M^+ \\ 0 & \text{if } x, y \in M^- \\ x \circledast y & \text{if } x, y \in M^0 \\ y & \text{if } x \in M^+, y \in M^0 \\ x & \text{if } x \in M^0, y \in M^+ \\ 0 & \text{if } x \in M^-, y \in M^0 \\ 0 & \text{if } x \in M^0, y \in M^- \end{cases} \quad (16)$$

és $x \rightarrow_{\circledast_\omega} y =$

$$\begin{cases} x \rightarrow_\circ y & \text{if } x, y \in M^+ \\ \neg(x \circledast \neg y) & \text{if } x \in M^+, y \in M^- \\ 1 & \text{if } x \in M^-, y \in M^+ \\ \neg y \rightarrow_\circ \neg x & \text{if } x, y \in M^- \\ x \rightarrow_\circ y & \text{if } x, y \in M^0 \text{ és } x \not\leq y \\ 1 & \text{if } x, y \in M^0 \text{ és } x \leq y \\ y & \text{if } x \in M^+, y \in M^0 \\ 1 & \text{if } x \in M^0, y \in M^+ \\ 1 & \text{if } x \in M^-, y \in M^0 \\ \neg x & \text{if } x \in M^0, y \in M^- \end{cases} \quad (17)$$

Ekkor $(M_\omega, \leq_\omega, \circledast_\omega, \rightarrow_{\circledast_\omega}, \neg, 1, 0)$ egy kommutatív, forgatás-invariáns, részbenrendezett félcsoporth, melyet az $(M, \leq, \circledast, \rightarrow_\circ)$ és $(M_1, \preceq, \circ, \rightarrow_\circ, \top, \perp)$ érintkezés nélküli forgatás-annihilációjának nevezzük.

Továbbá,

- A. $(M_\omega, \leq_\omega, \circledast_\omega)$ pontosan akkor konjunktív, ha $(M, \leq, \circledast)$ az.
- B. $(M_\omega, \leq_\omega, \circledast_\omega, \rightarrow_{\circledast_\omega}, \neg, 1, 0)$ egy integrál monoid és 0 involutív pontosan akkor, ha $(M, \leq, \circledast, \rightarrow_\circ)$ egy integrál monoid.
- C. $(M_\omega, \leq_\omega, \circledast_\omega, \rightarrow_{\circledast_\omega}, \neg, 1, 0)$ pontosan akkor hálórendezett, ha $(M_\omega, \leq_\omega)$ háló.
- D. $(M_\omega, \leq_\omega, \circledast_\omega, \rightarrow_{\circledast_\omega}, \neg, 1, 0)$ pontosan akkor involutív reziduált háló, ha $(M, \leq, \circledast, \rightarrow_\circ)$ egy integrál monoid és $(M_\omega, \leq_\omega)$ egy háló.

3.26. Tétel. (érintkezésses forgatás-annihiláció) Legyen $M \cap M_1 = \emptyset$, $(M, \leq, 1, \iota) \in \mathcal{M}^B$, $|M| \geq 2$ és $(M_1, \preceq, \circ, \top, \perp) \in \mathcal{M}^{BI}$, $M_1 \neq \emptyset$, $M_\omega = \varpi(M, M_1)$ és $\neg$ az involúciója.

Legyen

$(M, \leq, \circledast, \rightarrow_\circ)$ egy kommutatív, reziduált, részbenrendezett félcsoporth,

$(M_1, \preceq, \odot, \rightarrow_{\odot}, \top, \perp)$ egy kommutatív, forgatás-invariáns, integrál részbenrendezett monoid,

vagy legyen

$(M, \leq, \otimes, \rightarrow_{\otimes})$ egy kommutatív, reziduált, nullosztómentes részbenrendezett félcsoporth,

$(M_1, \preceq, \odot, \rightarrow_{\odot}, \neg, \top, \perp)$ egy kommutatív, konjunktív, forgatás-invariáns részbenrendezett félcsoporth.

Definiáljunk két műveletet M_{ϖ} -en: Először legyen megadva $\odot \subseteq M_1 \subset M_{\varpi}$ -n a (15) képlettel. Majd legyen $M^+ = M$, $M^0 = M_1 \setminus (\{\top\} \cup \{\perp\})$, $M^- = M_{\varpi} \setminus (M^+ \cup M^0)$ és legyen $x \otimes_{\varpi} y$ és $x \rightarrow_{\otimes_{\varpi}} y$ megadva a (16) és (17) képletekkel.

Ekkor $(M_{\varpi}, \leq_{\varpi}, \otimes_{\varpi}, \rightarrow_{\otimes_{\varpi}}, \neg, 1, 0)$ egy kommutatív, forgatás-invariáns, részbenrendezett félcsoporth, melyet az $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_{\otimes})$ és $(M_1, \preceq, \odot, \rightarrow_{\odot}, \top, \perp)$ érintkezésses forgatás-annihilációjának nevezzük.

Továbbá,

- A. $(M_{\varpi}, \leq_{\varpi}, \otimes_{\varpi})$ pontosan akkor konjunktív, ha $(M, \leq, \otimes)$ az.
- B. $(M_{\varpi}, \leq_{\varpi}, \otimes_{\varpi}, \rightarrow_{\otimes_{\varpi}}, \neg, 1, 0)$ egy integrál monoid és 0 involutív pontosan akkor, ha $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_{\otimes})$ integrál monoid.
- C. $(M_{\varpi}, \leq_{\varpi}, \otimes_{\varpi}, \rightarrow_{\otimes_{\varpi}}, \neg, 1, 0)$ hálórendezett pontosan akkor, ha $(M, \leq)$ és $(M_1, \preceq)$ háló.
- D. $(M_{\varpi}, \leq_{\varpi}, \otimes_{\varpi}, \rightarrow_{\otimes_{\varpi}}, \neg, 1, 0)$ pontosan akkor involutív reziduált háló, ha $(M, \leq, \otimes, \rightarrow_{\otimes})$ integrál monoid és $(M, \leq)$ és $(M_1, \preceq)$ háló.

Mindkét tétel éles, azaz a kiindulási műveletek nem választhatóak tágabb osztályból, sőt nem definiálhatóak általánosabb alaphalmazokon. A prelinearitás öröklődik mind a forgatás, mind a forgatás-annihilációs konstrukciónál. Az érintkezés nélküli forgatás konstrukció rámutat, hogy az involutív reziduált hálók osztályozása nem könnyebb, mint a reziduált hálóké, hiszen részalgebraként tetszőleges reziduált háló beágyazható a forgatásába.

Az érintkezés nélküli forgatás konstrukció egy triviális, közvetlen logikai alkalmazása a következő tétel: Jelölje DN az $A \leftrightarrow \neg\neg A$ axiómát, ahol $B \leftrightarrow C$ a $(B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)$ rövidítése. Az alábbi állítást szintaktikusan bizonyították a [57] cikkben:

3.27. Tétel. *i. Az $\mathbf{FL}_e + DN$ logika konzervatív kiterjesztése az $\mathbf{FL}_e$ logikának azon formulákra, amelyekben nem szerepel $\perp$ és $\neg$.*

ii. Az $\mathbf{FL}_{ew} + DN$ logika konzervatív kiterjesztése az $\mathbf{FL}_{ew}$ logikának azon formulákra, amelyekben nem szerepel $\perp$ és $\neg$.

Azaz, ha A nem tartalmaz $\perp$ -t és $\neg$ -t, akkor $\mathbf{FL}_e + DN \vdash A$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{FL}_e \vdash A$ (és $\mathbf{FL}_{ew} + DN \vdash A$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{FL}_{ew} \vdash A$).

Érdekes észrevenni, hogy ez a tétel nem igaz az intuicionista logikára [59], azaz $\mathbf{IL}$ -re és $\mathbf{IL} + DN$ -re, amely a klasszikus logika $\mathbf{CL}$. Valóban, $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ -ban nem szerepel $\perp$ és

$\neg$, és tétele CL-nek de nem tétele IL-nek. Ezt a jelenséget egyszerűen magyarázza az, hogy a forgatás konstrukció átörökíti a kommutativitást (exchange), az intergalitást (weakening) de nem örökíti a $x \leq x * x$ tulajdonságot (contraction [55, 58]).

A geometriai rész tükrözés szimmetriáját felhasználva a nyolcadik fejezetben rámutatunk arra, hogy a reziduált műveletek strukturális leírásához elengedhetetlen a ko-reziduált műveletek használata: Azaz, a reziduált és ko-reziduált műveletek nem egyszerűen duális fogalmak, melyek közül elég az egyiket vizsgálni, hanem együtt vannak jelen és egyszerre vizsgálándók bizonyos reziduált félcsoporthoz. Bevezetjük a ferde-szimmetrizáció konstrukciót, amely a rendezett csoportok kúprezentációjának olyan általánosítása, amely egyszerre használ reziduált és ko-reziduált műveleteket. E konstrukció segítségével leírást adunk a sűrűn rendezett, teljes láncon definiált involutív kommutatív reziduált monoidokra: Belátjuk, hogy minden ilyen művelet előáll egy kúpjának (pozitív vagy negatív) a ferde szimmetrizációjaként, valamint, hogy a két kúp kölcsönösen egyértelműen meghatározza egymást.

3.6. Definíció. Legyen $\langle X, \leq \rangle$ egy teljes, sűrűn rendezett lánc. Tetszőleges $\langle X, \leq, \odot, \rightarrow_{\odot}, 1 \rangle$ kommutatív reziduált láncra legyen $\odot : X \times X \rightarrow X$

$$x \odot y = \inf \{ u \odot v \mid u > x, v > y \}$$

a $\odot$ ferde módosítása.

Tetszőleges $\langle X, \leq, \odot, \leftarrow_{\odot}, 1 \rangle$ kommutatív ko-reziduált láncra legyen $\odot : X \times X \rightarrow X$

$$x \odot y = \sup \{ u \odot v \mid u < x, v < y \}$$

a $\odot$ ferde módosítása. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $(\odot, \odot)$ egy ferde pár.

3.7. Definíció. Legyen $(L_2, \leq)$ egy teljes, sűrűn rendezett lánc, L_1 egy részhalmaza. Legyen $(L_1, \oplus, \rightarrow_{\oplus}, \leq, \top)$ egy kommutatív reziduált lánc és $\neg$ egy involúció L_2 -n. A $\odot$ műveletről azt mondjuk, hogy $\oplus$ *duálisa* a $\neg$ -ra nézve ha $\odot$ az alábbi művelet $\neg(L_1) = \{\neg x \mid x \in L_1\}$ -n:

$$x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y).$$

Azt mondjuk, hogy $\odot$ a $\oplus$ *ferde duálisa* a $\neg$ -ra nézve, ha $\odot$ a $\odot$ ferde módosítása.

E fejezetben a t-norma kifejezést kicsit általánosabb értelemben használjuk: kommutatív integrál monoidokat jelölünk velük (nem feltétlen a $[0, 1]$ intervallumon). Uninormának nevezünk egy kommutatív monoidot, t-konormának nevezünk egy kommutatív monoidot, melynek az egységelem az alaphalmaz legnagyobb eleme.

3.8. Definíció. Az $\langle X, \leq, \perp, \top, t, f, * \rangle$ algebrát *involutív uninorma algebrának* nevezzük, ha

- i. $\mathcal{C} = \langle X, \leq, \perp, \top \rangle$ egy korlátos részbenrendezett halmaz,
- ii. $*$ egy uninorma $\mathcal{C}$ -n az t egységelemmel,
- iii. $x \in X$ esetén $x \rightarrow_* f = \max \{ z \in X \mid x * z \leq f \}$ létezik, és

iv. $x \in X$ esetén $(x \rightarrow_{\bullet} f) \rightarrow_{\bullet} f = x$.

A monoid műveletét involutív uninormának nevezzük. Egy involutív uninorma algebrát *kúposnak* nevezünk, ha minden elem összehasonlítható az egységelemmel, *t-involutív* nevezünk, ha $t = f$. Egy involutív uninorma pozitív és negatív kúpjai rendre az egységelem feletti és alatti elemek halmazára megszorított részmonoidjai, melyek monoid művelete mindig t-konorma ill. t-norma. Involutív uninorma algebrákban definiálható egy involúció: $\neg x = x \rightarrow_{\bullet} f$.

3.9. Definíció. Legyen $\langle X, \leq, \top, \perp \rangle$ egy korlátos, teljes, sűrűn rendezett lánc. Egy $\oplus$ reziduált t-konormát X -en *határ-folytonosnak* nevezünk, ha $x \in X$ esetén $\inf\{u \oplus v \mid u > x, v > \perp\} = x$.

3.10. Definíció. (ferde szimmetrizáció) Legyen $\mathcal{C} = \langle X, \leq, \perp, \top \rangle$ egy teljes, sűrűn rendezett, korlátos lánc, és $\neg$ egy involúció X -en az $e \in X$ fixponttal. Tetszőleges $\odot$ reziduált t-normára a $[\perp, t]$ -n definiáljuk a ferde szimmetrizációját ($\neg$ -ra nézve) $\odot_{\bar{s}} : X \rightarrow X$:

$$x \odot_{\bar{s}} y = \begin{cases} \neg(\neg x \odot \neg y) & \text{if } x, y \in [t, \top] \\ \neg x \leftarrow_{\odot} y & \text{if } x \in [t, \top] \text{ és } y \in [\perp, t] \text{ és } x \leq \neg y \\ \neg y \leftarrow_{\odot} x & \text{if } x \in [\perp, t] \text{ és } y \in [t, \top] \text{ és } x \leq \neg y \\ \neg(y \rightarrow_{\odot} \neg x) & \text{if } x \in [t, \top] \text{ és } y \in [\perp, t] \text{ és } x > \neg y \\ \neg(x \rightarrow_{\odot} \neg y) & \text{if } x \in [\perp, t] \text{ és } y \in [t, \top] \text{ és } x > \neg y \\ x \odot y & \text{if } x, y \in [\perp, t] \end{cases}, \quad (18)$$

ahol $\odot$ a $\odot$ ferde módosítása.

Tetszőleges $\oplus$ reziduált határ-folytonos t-konormára az $[t, \top]$ -n definiáljuk a $\oplus_{\bar{s}} : X \rightarrow X$ ferde szimmetrizációját ($\neg$ -ra nézve):

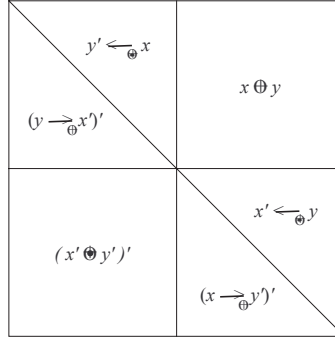
$$x \oplus_{\bar{s}} y = \begin{cases} x \oplus y & \text{if } x, y \in [e, \top] \\ \neg(x \rightarrow_{\oplus} \neg y) & \text{if } x \in [t, \top] \text{ és } y \in [\perp, t] \text{ és } x \leq \neg y \\ \neg(y \rightarrow_{\oplus} \neg x) & \text{if } x \in [\perp, t] \text{ és } y \in [t, \top] \text{ és } x \leq \neg y \\ \neg(\neg x \odot \neg y) & \text{if } x, y \in [\perp, t] \\ \neg x \leftarrow_{\odot} y & \text{if } x \in [\perp, t] \text{ és } y \in [t, \top] \text{ és } x > \neg y \\ \neg y \leftarrow_{\odot} x & \text{if } x \in [t, \top] \text{ és } y \in [\perp, t] \text{ és } x > \neg y \end{cases}, \quad (19)$$

ahol $\odot$ a $\oplus$ ferde módosítása.

Megadjuk a sűrűn rendezett, teljes láncokon definiált *t*-involutív uninormák egy alosztályának kúpreprezentációs tételét:

3.28. Tétel. *Teljes, sűrűn rendezett láncon definiált t-involutív uninorma, amelynek folytonossági pontjainak halmaza sűrű, előáll mind a pozitív, mind a negatív kúpjának ferde szimmetrizációjaként a $\neg x = x \rightarrow_{\bullet} t$ involúcióra nézve. A pozitív és negatív kúpjai kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást; egymás ferde módosításai ($\neg$ -ra nézve).*

Majd a kilencedik fejezetben osztályozzuk azokat az *t*-involutív uninormákat a $[0, 1]$ intervallumon, melyeknek folytonosak a kúpműveletei:



6. ábra. Illusztráció a ferde szimmetrizációra

3.29. Tétel. Tetszőleges t -involutív uninorma a $[0, 1]$ valós egységintervallumon melynek folytonos valamelyik kúpművelete izomorfizmus erejéig előáll mint az alábbi három műveletosztályból vett művelet ferde szimmetrizációja:

1. a szorzat a $[0, 1]$ intervallumon
2. a minimum $[0, 1]$ intervallumon
3. egy lexikografikus összeg a $[0, 1]$ intervallumon [32, 33, 43], melynek minden összeadandója szorzat vagy minimum.

A tizedik fejezetben bevezetjük az iker-forgatás konstrukciót:

3.11. Definíció. (iker-forgatás) Legyen X_1 egy részbenrendezett halmaz a t legnagyobb elemmel, és X_2 egy részbenrendezett halmaz a t legkisebb elemmel, és tegyük fel, hogy $X_1 \cup X_2$ -n van egy $\neg$ involúció. Legyen $\otimes$ és $\oplus$ egy-egy kommutatív, reziduált félcsoporthoz az X_1 -en és az X_2 -n, mindkettőnek t az egységeleme. Továbbá, tegyük fel, hogy

1. ha $\neg t \in X_1$ akkor $x \rightarrow_{\otimes} \neg t = \neg x$ igaz $x \in X_1, x \geq \neg t$ esetén, és
2. ha $\neg t \in X_2$ akkor $x \rightarrow_{\oplus} \neg t = \neg x$ igaz $x \in X_2, x \leq \neg t$ esetén.

Legyen

$$\mathcal{U}_{\otimes}^{\oplus} = \langle \text{osc}\langle X_1, X_2 \rangle, *, \leq, t, f \rangle$$

ahol $f = \neg t$ és

$$x * y = \begin{cases} x \otimes y & \text{if } x, y \in X_1 \\ x \oplus y & \text{if } x, y \in X_2 \\ \neg(x \rightarrow_{\oplus} \neg y) & \text{if } x \in X_2, y \in X_1, \text{ és } x \leq \neg y \\ \neg(y \rightarrow_{\oplus} \neg x) & \text{if } x \in X_1, y \in X_2, \text{ és } x \leq \neg y \\ \neg(y \rightarrow_{\otimes} (\neg x \wedge t)) & \text{if } x \in X_2, y \in X_1, \text{ és } x \not\leq \neg y \\ \neg(x \rightarrow_{\otimes} (\neg y \wedge t)) & \text{if } x \in X_1, y \in X_2, \text{ és } x \not\leq \neg y \end{cases} \quad (20)$$

Ekkor a $\circledast$ műveletet a $\otimes$ és a $\oplus$ iker-forgatásának, az $\mathcal{U}_{\otimes}^{\oplus}$ algebrát pedig a két kiindulási algebra iker-forgatásának nevezzük.

Belátjuk, hogy

3.30. Tétel. *Tetszőleges kúpos involutív uninorma algebra előáll a kúpjainak iker-forgatásaként.*

A véges láncokon értelmezett involutív uninormák vizsgálatához bevezetjük a rang fogalmát:

3.12. Definíció. Tekintsünk egy rendezett $\mathcal{U}$ involutív uninorma algebrát, melynek $n \in \mathbb{N}$ eleme van. $\mathcal{U}$ izomorf egy involutív uninorma algebrával, melynek alaphalmaza $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, jelöljük ezt így

$$\mathcal{U}_n = \langle \{1, 2, \dots, n\}, \circledast, \leq, 1, n, t, f \rangle.$$

A $t - f$ különbséget az $\mathcal{U}$ algebra *rangjának* hívjuk (vagy a $\circledast$ rangjának).

3.13. Definíció. Legyen $n \geq 1$.

1. Legyen $\mathcal{U} = \langle \{1, 2, \dots, n\}, \circledast, \leq, t, f \rangle$ egy pozitív rangú involutív uninorma algebra. Defináljuk az alábbi algebrát:

$$\mathcal{U}_{\nabla} = \langle \{1, 2, \dots, n+1\}, \circ, \leq, f+1, t \rangle,$$

ahol

$$x \diamond y = \begin{cases} x \circledast y & \text{if } x, y \in \{1, 2, \dots, n\} \\ n+1 & \text{if } \max(x, y) = n+1 \end{cases}$$

és $x \circ y = \neg(\neg x \diamond \neg y)$, ahol $\neg$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz involúciója.

2. Legyen $\mathcal{U} = \langle \{1, 2, \dots, n+1\}, \circledast, \leq, t, f \rangle$ egy nemnegatív rangú involutív uninorma algebra. Defináljuk az alábbi algebrát:

$$\mathcal{U}_{\Delta} = \langle \{1, 2, \dots, n\}, \circ, \leq, f, t-1 \rangle,$$

ahol $\circ$ a $\circledast$ duálisának megszorítása az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazra.

3.31. Tétel. (véges ferde dualizáció) Legyen $n > 1$.

1. Tetszőleges $k > 0$ rangú $\mathcal{U}$ involutív uninorma algebrára az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon $\mathcal{U}_{\nabla}$ egy $1 - k$ rangú involutív uninorma algebra az $\{1, 2, \dots, n+1\}$ alaphalmazon.
2. Tetszőleges $k \leq 0$ rangú $\mathcal{U} = \langle \{1, 2, \dots, n+1\}, \circledast, \leq, t, f \rangle$ involutív uninorma algebrára a $\mathcal{U}_{\Delta}$ egy $1 - k$ rangú involutív uninorma algebra az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon.

Továbbá,

$$(\mathcal{U}_{\Delta})_{\nabla} = \mathcal{U} \quad \text{és} \quad (\mathcal{U}_{\nabla})^{\nabla} = \mathcal{U}.$$

Azaz elegendő a továbbiakban csak a pozitív rangú algebrákat vizsgálni.

3.14. Definíció. Egy $\langle \{1, 2, \dots, n\}, *, \leq, t, f \rangle$ véges involutív uninorma algebrát $\top \perp$ -felbonthatatlannak nevetünk ha nincs részalgebrája a $[2, \dots, n-1]$ -en.

Belátjuk, hogy ha egy ilyen algebra nem $\top \perp$ -felbonthatatlan, akkor Cayley-táblája visszavezethető egy kettővel kisebb alaphalmazú algebra Cayley-táblájára; azaz elegendő a $\top \perp$ -felbonthatatlan algebrákat vizsgálni. Ekkor a rang szerint néhány alosztályt osztályozni is lehet:

3.32. Tétel. • **(rang 0, rang 1)** Legyen $n \geq 1$. Ekkor, $*$ egy véges involutív uninorma az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon 0 (respektíve 1) ranggal akkor és csak akkor, ha n páratlan (respektíve páros) és

$$x * y = \begin{cases} \min(x, y) & \text{if } x \leq \neg y \\ \max(x, y), & \text{if } x > \neg y \end{cases} \quad (21)$$

• **(rang 2)** Legyen $n \geq 3$ páratlan. Ekkor, $*$ egy 2-rangú $\top \perp$ -felbonthatatlan véges involutív uninorma az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon akkor és csak akkor, ha a negatív kúpja a $\odot$ művelet a $\frac{n+3}{2}$ -elemű láncon, ahol

$$x \odot y = \begin{cases} 1 & \text{if } x, y < n \\ \min(x, y) & \text{egyébként} \end{cases}, \quad (22)$$

és pozitív kúpja tetszőleges t -konorma a $\frac{n-1}{2}$ -elemű láncon.

- **(rang n-1)** Legyen $n \geq 1$. Ekkor, $*$ egy véges $n-1$ -rangú involutív uninorma az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon akkor és csak akkor, ha a negatív kúpja egy tetszőleges involutív reziduált háló az n -elemű láncon, és pozitív kúpja a triviális monoid az egyelemű halmazon.
- **(rang n-3)** Legyen $n \geq 3$. Ekkor, $*$ egy véges $n-3$ -rangú involutív uninorma az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon akkor és csak akkor, ha negatív kúpja kielégíti a 3.11 definíció 1 feltételét és a pozitív kúpja a maximum művelet a kételemű láncon.
- **(rang -1)** Legyen $n \geq 4$ páros. Ekkor, $*$ egy -1 -rangú véges involutív uninorma az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon, amely kielégíti a $(n-1)*(n-1) = n$ feltételt akkor és csak akkor, ha a negatív kúpja egy tetszőleges $\otimes$ t -norma a $\frac{n}{2}$ -elemű láncon, amely kielégíti a $2 \otimes 2 = 2$ feltételt, és pozitív kúpja az $\odot$ duálisa az $\frac{n+2}{2}$ -elemű láncon.
- **(rang 3-n)** Legyen $n \geq 2$. Ekkor, $*$ egy véges $3-n$ -rangú involutív uninorma az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon akkor és csak akkor, ha negatív kúpja a minimum a kételemű láncon, pozitív kúpja pedig tetszőleges involutív reziduált háló duálisa az $n-1$ -elemű láncon.
- **(rang 5-n)** Legyen $n \geq 5$. Ekkor, $*$ egy véges $5-n$ -rangú involutív uninorma az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon akkor és csak akkor, ha negatív kúpja a minimum művelet a háromelemű láncon, pozitív kúpja pedig a kielégíti a 3.11 definíció 2 feltételét.

A 3.32 tétel egyszerűen belátható következménye, hogy

3.33. Következmény. az **IUL** logika kibővíítve a $\mathbf{t} \leftrightarrow \mathbf{f}$ axiómával nem elégíti ki a véges modell tulajdonságát,

ahol az **IUL** az alábbi szubstrukturális logika [39]:

- (L1) $A \rightarrow A$
- (L2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (L3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (L4) $((A \odot B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
- (L5) $(A \wedge B) \rightarrow A$
- (L6) $(A \wedge B) \rightarrow B$
- (L7) $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$
- (L8) $A \rightarrow (A \vee B)$
- (L9) $B \rightarrow (A \vee B)$
- (L10) $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$
- (L11) $A \leftrightarrow (\mathbf{t} \rightarrow A)$
- (L12) $\perp \rightarrow A$
- (L13) $A \rightarrow \top$
- (PRL) $(A \rightarrow B) \wedge \mathbf{t} \vee ((B \rightarrow A) \wedge \mathbf{t})$
- (INV) $\neg\neg A \rightarrow A$

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} (mp) \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B} (adj)$$

Hivatkozások

A disszertáció alapjául szolgáló cikkek:

- [1] S. Jenei, Erratum "On the reflection invariance of residuated chains, *Annals of Pure és Applied Logic* 161 (2009) 220-227", *Annals of Pure és Applied Logic* 161 (2010), pp. 1603-1604
- [2] S. Jenei, On the convex combination of left-continuous t-norms, *Aequationes Mathematicae*, 72 (2006) 47–59.
- [3] S. Jenei, On the determination of left-continuous t-norms és continuous Archimedean t-norms on some segments, *Aequationes Mathematicae*, 70 (2005) 177–188.
- [4] S. Jenei, On the geometry of associativity, *Semigroup Forum*, 74 (3): 439–466 (2007)
- [5] S. Jenei, On the relationship between the rotation construction és ordered abelian groups, *Fuzzy Sets és Systems*, 161 (2010), 277–284.
- [6] S. Jenei, On the reflection invariance of residuated chains, *Annals of Pure és Applied Logic*, (2009) 220–227.
- [7] S. Jenei, On the structure of rotation-invariant semigroups, *Archive for Mathematical Logic*, 42 (2003), 489–514.
- [8] S. Jenei, Structural description of a class of involutive uninorms via skew symmetrization, *Journal of Logic és Computation*, doi:10.1093/logcom/exp060
- [9] S. Jenei, F. Montagna: A general method for constructing left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets és Systems*, 136 (2003), 263–282.
- [10] S. Jenei, F. Montagna: A proof of standard completeness for Esteva's és Godo's logic MTL. *Studia Logica*, 70, 184–192 (2002)
- [11] S. Jenei, F. Montagna, A proof of standard completeness for non-commutative monoidal t-norm logic, *Neural Network World*, 5 (2003), 481–489.
- [12] S. Jenei, F. Montagna, On the continuity points of left-continuous t-norms, *Archive for Mathematical Logic*, 42 (2003), 797–810.
- [13] S. Jenei, H. Ono, On involutive FLe-algebras (benyújtva)

További hivatkozások

- [14] N. H. Abel, Untersuchungen der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen x und y wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, dass $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function von x, y und z ist, J. Reine Angew. Math. 1 (1826), 11–15. Oeuvres Complètes de N.H. Abel, Vol. 1, Christiana, 1881, 61–65.
- [15] J. Aczél, Lectures on Functional Equations és Their Applications, Academic Press, New York-London (1966)
- [16] C. Alsina, M. J. Frank, B. Schweizer, Problems on Associative Functions, Aequationes Mathematicae 66 (2003), 128–140.
- [17] J. P. Bézivin, M. S. Tomás, On the determination of strict t-norms on some diagonal segments, Aequationes Math. 45 (1993) 239–245.
- [18] G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math Soc. Colloquium Publications, third edition (Amer. Math. Soc., RI), 1973.
- [19] T. S. Blyth, M. F. Janowitz, Residuation Theory, Pergamon Press, 1972.
- [20] M. Busaniche, Free nilpotent minimum algebras, Mathematical Logic Quartely 52 (3) (2006) 219–236.
- [21] M. Busaniche, R. Cignoli, Constructive Logic with Strong Negation as a Substructural Logic, Journal of Logic és Computation 20 (4) (2010) 761–793.
- [22] S. Aguzzoli, M. Busaniche, Spectral duality for finitely generated nilpotent minimum algebras, with applications, Journal of Logic és Computation, 17 (4) (2007) 749–765.
- [23] C. Burgués, Sobre la sección diagonal y la región cero de una t-norma, Stochastica 5 (1981) 79–87.
- [24] C. C. Chang, Algebraic analysis of many valued logics, TAMS 88 (1958) 467–490.
- [25] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo, A. Torrens, Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms és their residua, Soft Computing 4 (2000) 106–112
- [26] R. Cignoli, I. M. L. D’Ottaviano, D. Mundici, Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning, Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [27] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo, A. Torrens, Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms és of their residua, Soft Computing 4 (2000), 106–112.
- [28] R. Cignoli, A. Torrens, Free algebras in varieties of Glivenko MTL-algebras satisfying the equation $2(x^2) = (2x)^2$, Studia Logica 83 (1-3) (2006) 157–181

- [29] P. Cintula, F. Esteva, J. Gispert, L. Godo, F. Montagna, C. Noguera, Algebraic characterization of completeness properties for core fuzzy logics I: propositional logics, Abstracts of the International Conference on Order, Algebra, és Logics, Nashville, USA, 2007
- [30] P. Cintula, F. Esteva, J. Gispert, L. Godo, F. Montagna, C. Noguera, Algebraic characterization of completeness properties for core fuzzy logics II: predicate logics, Abstracts of the International Conference on Order, Algebra, és Logics, Nashville, USA, 2007
- [31] P. Cintula, F. Esteva, J. Gispert, L. Godo, F. Montagna, C. Noguera, Distinguished algebraic semantics for t-norm-based fuzzy logics: Methods és algebraic equivalencies, *Annals of Pure és Applied Logic*, 160 (2009), 53–81.
- [32] A. H. Clifford, Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. J. Math.* 76 (1954), 631–646.
- [33] A. C. Climescu, Sur l'équation fonctionnelle de l'associativité, *Bull. École Polytechn. Iassy*, 1 (1946), 1–16.
- [34] W. Darsow, M. Frank, Associative functions és Abel-Schroeder systems, *Publ. Math. Debrecen*, 30 (1983) 253–272.
- [35] F. Esteva, J. Gispert, L. Godo, F. Montagna, On the standard és rational completeness of some axiomatic extensions of the monoidal t-norm logic, *Studia Logica* 71 (2002) 199–226.
- [36] Esteva, F. és Godo, L.: Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms. *Fuzzy Sets és Systems* 124, 271–288 (2001)
- [37] M. J. Frank, On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Math.*, 19 (1979), 194–226.
- [38] L. Fuchs, *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris (1963)
- [39] D. Gabbay, G. Metcalfe, Fuzzy logics based on $[0, 1[$ -continuous uninorms, *Archive for Mathematical Logic*, 46(6): 425–469, 2007.
- [40] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono, *Residuated Lattices – An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*, Elsevier, 2007, 532 pp.
- [41] G. K. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. W. Mislove, D. S. Scott, *Continuous Lattices és Domains*, *Encycl. of Math. és its Appl.* 93, Cambridge U. Press, 2003.
- [42] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [43] K. H. Hofmann, J. D. Lawson, *Linearly Ordered Semigroups: Historical Origins és A. H. Clifford's Influence*, in: K. H. Hofmann, M. W. Mislove, Eds, *Semigroup Theory és its Applications*, *Lond. Math. Soc. Lecture Notes* 231, 1996, 15–39.

- [44] S. Jenei, How to construct left-continuous triangular norms – state of the art, *Fuzzy Sets és Systems*, 143 (2004), 27–45.
- [45] S. Jenei: Structure of left-continuous t-norms with strong induced negations (I). Rotation construction. *Journal of Applied non-classical Logics* 10, 83–92 (2000)
- [46] P.T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [47] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2000).
- [48] C. Kimberling, On a class of associative functions, *Publ. Math. Debrecen*, 20 (1973) 21–39.
- [49] J. D. Lawson, The earliest semigroup paper?, *Semigroup Forum*, 52 (1996), 55–60.
- [50] C-H. Ling, Representation of associative functions, *Publ. Math. Debrecen*, 12 (1965) 189–212.
- [51] G. Metcalfe, F. Montagna, Substructural fuzzy logics, *Journal of Symbolic Logic*, 72(3): 834–864, 2007.
- [52] F. Montagna, H. Ono, Kripke semantics, undecidability és standard completeness for Esteva és Godo’s Logic $MTL\forall$, *Studia Logica*, 71/2, (2002), 227–245.
- [53] P.S. Mostert, A.L. Shields, On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary, *Ann. Math.*, 65 (1957), 117–143.
- [54] C. Noguera, F. Esteva, J. Gispert, Perfect és bipartite IMTL-algebras és érintkezés nélküli rotations of basic semihoops, *Archive for Mathematical Logic*, 44 (2005), 869–886.
- [55] H. Ono: Logics without the contraction rule and residuated lattices I. *Festschrift on the occasion of R.K. Meyer’s 65th birthday*, *The Australasian Journal of Logic*, 2010, 8, 50–81.
- [56] H. Ono, : Semantics for substructural logics. In: *Substructural Logics*, eds. by K. Došen és P. Schroeder-Heister, Oxford University Press, (1993) 259–291
- [57] H. Ono, Structural rules and a logical hierarchy, in: *Mathematical Logic, Proceedings of the Summer School és Conference on Mathematical Logic, Heyting’88*, P.P. Petrov (ed.), Plenum Press (1990), 95–104.
- [58] H. Ono, Komori, Y.: Logics without the contraction rule. *Journal of Symbolic Logic*, 50, 169–201 (1985)
- [59] H. Rasiowa és R. Sirkoski, *The Mathematics of Metamathematics*, third edition, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1970.
- [60] K. I. Rosenthal, *Quantales and their Applications*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

- [61] B. Schweizer és A. Sklar, Probabilistic Metric Spaces, North Holland, New York, 1983.
- [62] O. Steinfeld, On residuals in partially ordered. semigroups, Publicationes Mathematicae, 12 (1-4), 107–117 (1965)
- [63] Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen, Acta Scientiarum Mathematicarum, 22 (1-2), 136–149 (1961)
- [64] D. Smutná, On a peculiar t-norm, Busefal 75 (1998), 60–67.
- [65] M.S. Tomás, Sobre algunas medias de funciones asociativas, Stochastica XI (1987), 25–34.
- [66] E. Trillas: Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntas difusos, Stochastica, 3 (1979), 47–60.
- [67] T. Vetterlein, Regular left-continuous t-norms, Semigroup Forum 77 (2008) 339–379.
- [68] Ward, M. és R. P. Dilworth, Residuated Lattices, Transactions of the American Mathematical Society 45: 335–354, 1939