

Az algebra, geometria és logika a matematika három területe. Vannak jelenségek/struktúrák, melyeket e három terület mindegyikén le lehet írni, és melyeket legjobban akkor értünk meg, ha mindhárom terület nyelvén leírjuk és átlátjuk e három, legtöbbször nagyon eltérő kép kapcsolatát. Példa erre a Boole algebrák osztálya. Az algebra nyelvén leírva a Boole algebrák komplementált disztributív hálók, ez egy véges sok azonossággal definiált algebraosztály; algebrai vizsgálatuk az azonosságok közti levezetések nyelvén történik. A geometria nyelvén a Boole algebra egy tér (pl. sík vagy háromdimenziós tér) részhalmazairól beszél, és e halmazok metszet, unió, komplementum által alkotott struktúráját vizsgálja. Logikai nyelven pedig a hétköznapi és a tudományos gondolkodás csontvázát alkotó un. ítéletkalkulus jeleníti meg a Boole algebrát, állításokról, ezek konjunkciójáról (“és”), diszjunkciójáról (“vagy”) és negációjáról (“nem”) beszélünk. Az algebrai geometria az algebra és geometria kapcsolatára koncentrál, a kategóriaelméleti toposzelmélet a logika és geometria kapcsolatára; az algebrai logikában e háromarcú istennő mindhárom arca fényesen ragyog.

Jenei Sándor disszertációjának főszereplője az un. t-norma, illetve ennek egy algebrai általánosítása, a reziduált monoid. Ezek egyre erőteljesebben vizsgált objektumok napjainkban, monográfia is jelent meg 2007-ben Galatos, Jipsen, Kowalski, Ono szerzőktől. A t-normáknak és a reziduált félcsoportoknak lényeges szerepe van több matematikai területen is, így pl. logikában, algebraiban. Jelölt algebrai oldalról közelíti meg a t-normák vizsgálatát és az algebrai valamint geometriai tulajdonságok közti kapcsolatra (dualításra) koncentrál. Azonban nyilvánvalóan jól ismeri a téma logikai oldalát is, a disszertációban több eredménnyel illusztrálja az általa művelt vizsgálatok logikai alkalmazását.

A t-norma definíció szerint a valós számok $[0,1]$ intervallumán értelmezett kommutatív, asszociatív, kétargumentumú monoton (azaz rendezéstartó) függvény, melynek 1 az egységeleme (azaz, integrál). Egy t-normának rögtön adódik a geometriai jelentése: a $[0,1]$ élű kockában egy felület (kétargumentumú művelet), mely tükrözésinvariáns a 000, 001 és 111 pontokat összekötő síkra nézve (kommutatív), felfelé halad a (0,0) ponttól az (1,1) pont felé (rendezéstartó), a felületnek két oldallappal való metszete az átló (integrál), és hoppá! itt hiányzik az asszociativitás geometriai jelentése! Aki már dolgozott asszociatív műveletekkel, az tudja, hogy szinte lehetlen látni egy művelet grafikonjáról, hogy az a művelet asszociatív-e és legtöbbször igencsak munkaidényes bizonyítani egy tetszőleges műveletről, hogy asszociatív. Az asszociativitás fogalma természetes, központi algebrai fogalom, de hiányzik

a geometriai megfelelője.

A folytonos t -normákat elég jól át lehet látni, szép struktúra-tétel írja le őket. Ezzel szemben a tetszőleges t -normák vidéke vad, a jelölt szerint szinte kizárt, hogy hasonló struktúra-tételt lehessen kapni. Középutként jelölt a balról-folytonos t -normákra koncentrálni és véleményem szerint ígéretes lépéseket tesz egy, szükségképpen bonyolultabb, struktúra-tétel felfedezése felé. A balról-folytonosságnak van természetes algebrai megfelelője (t -normák körében), ez pedig a félcsoporth-művelet (természetes rendezésre vett) reziduálhatósága. A reziduálás művelete a csoportelméleti inverz operáció általánosítása, gyengítése; és fontos szerepet játszik algebraiban, logikában, így algebrai logikában is. A Boole algebrak reziduált félcsoporthot alkotnak ha a metszetet („és” logikai konnektívum) vesszük a félcsoporth műveletnek, ekkor az „implikáció” logikai konnektívum a reziduált. A Tarski-féle relációalgebra is reziduált félcsoporthot alkotnak, ahol a relációkompozíciót vesszük az asszociatív műveletnek.

A disszertáció egyik fő eredménye, hogy a balról folytonos t -normák körében felfedez egy valódi és új kapcsolatot az algebrai asszociativitás tulajdonsága és egy vizuális geometriai tulajdonság között. Nevezetesen, a geometriai tulajdonság az, hogy a megadott felület feletti tér-rész invariáns a kocka $001,110$ főátlója körüli 120 fokos elforgatásra (Fig.1.2). Sajnos nem annyira szép a világ, hogy az asszociativitás ekvivalens lenne ezen geometriai tulajdonsággal, de „majdnem”. Jelölt megfogalmazza a szükséges és elégséges tulajdonságot egy általános környezetben (reziduált grupoid), ez lényegében az, hogy a felület minden „szelete” invariáns egy fenti típusú forgatásra (Lemma 1.3, Lemma 1.4). Jelölt bőséges példaseregen, pazar ábrákon illusztrálja az asszociativitás ellenőrzés e módszerének használatát.

Azt, hogy mennyire használható a módszere, jelölt illusztrálja az irodalom egyik problémájának megoldásával is. A problémát C. Alsina, M. J. Frank és B. Schweizer 2003-ban publikálta, és azt kérdezi, hogy két különböző t -norma aritmetikai közepe, illetve általánosabban bármely konvex kombinációja lehet-e megint t -norma. A szerzők azt a sejtésüket közlik, hogy triviális esetektől eltekintve a válasz az, hogy „soha”. A jelölt először idéz egy eredményt, mely szerint ha nem kötjük ki a balról-folytonosságát a t -normáknak, akkor nem igaz a sejtés. Sajnos nem közli, hogy kitől származik ez a megoldás. E negatív válasz indokolja, hogy Jenei megoldásában csak balról-folytonos t -normákról beszél. Az eredeti sejtés megerősítéseként azt bizonyítja (Thm.3.9), hogy különböző balról-folytonos t -normák konvex kombinációja sosem t -norma (mert nem asszociatív), ha feltesszük, hogy a két t -normának van közös involutív szintje. Ez utóbbi feltételről a jelölt többször is állítja, hogy szükséges, de sajnos nem találtam ennek bizonyítását vagy indoklását a disszertációban. A Thm.3.8 egy rokon állítást fogalmaz meg, mely

szerintem önmagában is nagyon érdekes.

Azt, hogy a balról-folytonos t -normák vizsgálódási szintjének választása jó választás volt, egy logikai teljességi tétel bizonyításával is illusztrálja a jelölt. Nevezetesen, F. Esteve és L. Godo 2001-ben publikált sejtésének igazolásaként teljességi tételt bizonyít a balról-folytonos t -normák logikájára (amit MTL-logikának neveznek). A bizonyítás lényege, hogy megmutatja, hogy egy tetszőleges megszámlálható MTL-algebra beágyazható sztenderd MTL-algebrába. Az absztrakt és sztenderd MTL-algebrák között az a különbség, hogy előbbi tetszőleges részben-rendezett halmaz felett van értelmezve, míg utóbbi a konkrét $[0,1]$ intervallum mint részbenrendezett halmaz felett. Ez a Boole-algebrák Stone reprezentáció tételével analóg, és általában a hasonló tételeket, ahol egy absztrakt tulajdonságokkal megadott struktúrát valamilyen extra (nem az eredeti nyelven leírt) struktúrával látják el, reprezentáció tételnek szokás nevezni. Az algebrai logikában az egyik un. híd-tétel (bridge-theorem) pont azt mondja, röviden, hogy egy logika teljességi tétele a neki megfeleltetett algebraosztály reprezentáció-tételének felel meg. A reprezentáció tételek bizonyítása általában nem könnyű. (A jelölt beágyazási tételnek nevezi az eredményét, de fentiek alapján szerintem pontosabb lenne reprezentáció-tételnek nevezni.)

A jelöltnek kétségtől erőssége példák, ellenpéldák és szép konstrukciók szerkesztése (mely tevékenység jelen opponens szívéhez is közeláll). A disszertáció második és harmadik részében számos érdekes konstrukciót mutat be, amivel balról-folytonos t -normákat lehet kapni és ilyenekből újakat szerkeszteni. Vizsgálja a folytonossági pontok struktúráját és szerkeszt egy olyan példát, melyben a szakadási pontok sűrűn vannak. Ezen módszerekben és konstrukciókban alapvető annak átlátása, hogy a példák asszociatívak-e. Véleményem szerint ígéretes lépések történnek itt a balról-folytonos t -normák valamilyen struktúra-tétele felé.

Az eredmények méltatása után illik kitérni a hiányosságokra is. Megkönnyítette volna az opponens munkáját egy index, jelöléslista stb, ahogy az nagydoktori dolgozatoknál szokás. Bizonyos fogalmakat mind a tíz fejezet elején definiál a jelölt, pl. a reziduált félcsoportokat vagy involúciót, másokat pedig sehol vagy pedig nem az első előfordulásuk helyén. A rendezéstartóságra például legalább öt különböző szót használ, de egyiket sem definiálja, az olvasó attól tarthat, hogy esetleg a különböző szóhasználat nüanszokban eltérő jelentést takar. Használja a teljes háló fogalmát, de a Dedekind-teljesség értelmében a szokásos teljesség helyett, némi fejfájás árán jön rá erre az olvasó. Azzal indokolva, hogy minden fejezet legyen önmagában érthető, jelölt minden fejezet elején röviden vázolja a fő definíciókat. Ehelyett olvasóbarátabb lett volna a disszertáció elején egyszer, de körültekintőbben, jobban körüljárva definiálni az összes fogalmat. Meg kell említeni azonban,

hogy a disszertáció nyelve világos, tömör és érthető, a bizonyítások nincsenek túlbonyolítva, a definíciók, tételek kimondása, néhány apró pontatlanságtól eltekintve, precíz. Örömet okozott a világos “Definíció, Tétel, Bizonyítás, Megjegyzés (mely a tétel feltételeinek szükségességéről szól), Példák” tagolás. Külön szeretném megemlíteni a jó angolságot, ez és a világos precíz megfogalmazás nagyban megkönnyíti a disszertáció olvasását az előbb említett hiányosságok ellenére.

Mindent összefoglalva: Véleményem szerint Jenei Sándor disszertációja megfelel a doktori disszertációkkal szemben támasztott követelményeknek és Jenei Sándor alkalmas a tudományok doktora cím elnyerésére. A disszertáció nyilvános vitára bocsátását és Jenei Sándornak a matematikai tudományok doktora cím odaítélését javaslom.

Budapest, 2012. november 14.

Andréka Hajnal
a matematikai tudományok doktora