

Opponensi vélemény

Jenei Sándor:

Reziduált monoidok vizsgálata

MTA doktori értekezés

A jelölt kutatási területe az algebrai vizsgálatoknak egy olyan szelete, amely fejlődését, kiszélesedését, napjainkban tapasztalható intenzitását nem (vagy legalábbis nemcsak) az algebra belső köreiből merítette, hanem a különböző logikai rendszerek mögött meghúzódó algebrai struktúrák vizsgálatának igényéből. Ennek a logikában megfogalmazott igénynek van egy olyan jellemzője, amely a felmerülő kérdéseket is más perspektívába helyezi: ezen a területen ugyanis nem arról van szó, hogy valamely specifikus logikai rendszer kényszerít ki algebrai, algebrai logikai vizsgálatokat. Ellenkezőleg: a reziduált hálók (reziduált félcsoporthok) jelentőségét logikai szempontból az adja, hogy elméleti keretet szolgáltat eltérő motivációs bázison, eltérő eszközök használatával létrejött logikai rendszerek számára. A múlt század 70-es éveiben felerősödtek a logikával foglalkozókban és a logika különböző rendszereit alkalmazókban azok az igények, amelyeket abban a meglehetősen egyszerűnek tűnő, de egyszerűen nem megválaszolható kérdésben foglalhatjuk össze, hogy mit is értünk egy logikai rendszer alatt. Ha nem ragaszkodunk egy olyan ortodox megfogalmazáshoz, amely végletesen leszűkíti a logikai rendszerek körét (hiszen bizonyára mindenki találkozott már azzal a felfogással, hogy csak az elsőrendű logika, pontosabban szólva csak az elsőrendű kalkulus az egyedüli logikai rendszer), akkor figyelmünk természetes módon azon elméleti alapok felé irányul, amelyek segítségével feltárhatóak a különböző logikai rendszerek elméleti alapjaiban meglévő közös sajátosságok. Olyan jellemzők körülhatárolása történhet meg, amelyek lehet, hogy nem elégségesek ahhoz, hogy egy rendszert logikai rendszerré tegyenek, de szükségszerűek a különböző motivációs bázison felépülő logikai rendszerek számára. Míg algebrai oldalról a reziduált hálók, addig logikai oldalról a szubstrukturális logikák adják meg az elméleti alapot: talán nem meglepő, hogy a két megközelítés szoros elméleti kapcsolatban áll egymással. Fontos megemlíteni, hogy a két megközelítésmód nem pusztán azt jelenti, hogy másként mondjuk el ugyanazt, hanem itt nyugodtan kijelenthető, hogy a két oldal kölcsönösen megtermékenyíti egymást. A vizsgált terület jelentőségét tovább növeli az, hogy mind a szubstrukturális logikák mind a reziduált hálók elméletének számos alkalmazása van például a számítástudomány különböző területein.

Jenei Sándor dolgozatában algebrai oldalról közelíti meg a kérdéseket, nem titkolva azt a reményét, hogy eredményei fontos információkat jelenthetnek a logikai oldal számára is. Az értekezés három nagy részre tagolódik: az első részben az asszociativitás geometriai jellemzésének lehetőségeit vizsgálja a szerző, a Beágyazás címet viselő másodikban fontos algebrai logikai eredményeket bizonyít, míg a harmadikban, általánosítva az involutív reziduált hálók olyan forgatás-invariáns félcsoporthokat kap, amelyek segítségével reziduált félcsoporthokból involutív reziduált félcsoporthok nyerhetők.

Ha az algebrai, algebrai logikai területen kevésbé járatos valaki, akkor joggal kérdezheti, hogy egy ilyen értekezésben mi keresnivalója van egy Geometria címet viselő fejezetnek. Ha azonban alaposabban utána gondolunk, akkor azt látjuk, hogy algebrai sajátosságok geometriai megfogalmazásának, illetve geometriai sajátosságoknak az algebra nyelvén való kimondásának több évszázados hagyománya van. Kanttal szólva a matematikának szüksége van az a priori szemléletre, a matematika az a priori szemléletben feltüntetett tárgyakat vizsgálja. Az a priori szemléletünk legfontosabb keretét az absztrakt tér szolgáltatja számunkra. Jenei Sándor dolgozatának első nagy egységében arra tesz kísérletet, hogy megvizsgálja azt a kérdést, hogy vajon az absztrakt térben megjelenített sajátosságok megragadhatóak-e egy háromdimenziós térben. A kommutatív műveletek asszociativitása geometriai eszközökkel is megfogalmazható: ha a művelet asszociativitásának kifejezéséhez szükséges háromváltozós függvényt tekintjük, akkor ez megadható a négydimenziós tér egy grafikonjaként. A tekintett művelet akkor és csak akkor lesz asszociatív, ha grafikonja a függvény argumentumainak felcseréléséhez kapcsolódó szimmetriákkal rendelkezik. A háromnál nagyobb dimenziójú terek kevésbé alkalmasak arra, hogy a geometriai intuíció alapjául szolgáljanak. A geometriai intuíciók sokkal inkább a legfeljebb háromdimenziós terekhez köthetők. Az értekezés szerzője azt a kérdést vizsgálja meg részletesen, hogy ha a művelet háromdimenziós grafikonját vesszük szemügyre, akkor ezen a grafikonon felfedezhető-e a négydimenziós grafikon asszociativitást kifejező szimmetriáinak valamiféle hatása. Úgy is fogalmazhatunk, hogy egy kétváltozós kommutatív művelet asszociativitása miként érhető tetten a művelet háromdimenziós grafikonján. Elért eredményei alapján egyrészt a kommutatív reziduált műveletek asszociativitása jellemezhető bizonyos típusú forgatás-invarianciával, másrészt belátta, hogy az említett műveletek asszociativitása megállapítható grafikonjának bizonyos síkmetszeteiből, harmadrészt pedig megmutatja, hogy a művelet grafikonjának bizonyos részei egy középpontos tükrözésre nézve invariánsak. Eredményei nemcsak az asszociativitás természetének jobb megértéséhez vezetnek el, hanem lehetővé teszik a reziduált hálókra vonatkozó bizonyos sejtések megfogalmazását, sőt segítséget nyújt ezek bizonyításban is. A reziduált hálók fontos szerepet játszanak bizonyos logikai rendszerek algebrai logikai vizsgálatában, így a szerző eredményei a megfeleltetett nem-klasszikus logikai rendszerek vonatkozásában is fontos következményekhez vezetnek. A geometriai átfogalmazás hatékonyságát jól mutatja az, hogy az asszociativitás geometriai jellemzése sikeresen használható az asszociatív függvények egyértelműségi tartományának meghatározásában. Az elért eredmények a függvényegyenletek vizsgálata során felvetett kérdés megválaszolására is alkalmasak: a szerzőnek sikerül belátnia, hogy bizonyos asszociatív függvények súlyozott számtani közepe nem asszociatív.

A Beágyazás címet viselő egység a dolgozat 4. 5. és 6. fejezetét foglalja magában. A 4. fejezetben Esteva és Godo sejtésének bizonyítását ismerteti a szerző. Ez az eredmény a *Studia Logica*-ban jelent meg 2002-ben egy Franco Montagna-val írt közös cikkben. Az említett folyóirat magas elvárásait szükségtelen ismertetni, a cikk itteni megjelenése önmagában biztosítéka az eredmény szakmai elismerésének. Esteva és Godo bebizonyította, hogy az MTL logika helyes és teljes a rendezett MTL-algebrák osztályára nézve. (A tézisekben, ha jól értem, kicsit pontatlanul lett említve ez az eredmény, hiszen a teljesség csak annyit jelent, hogy ha egy A MTL formulára, minden lineárisan rendezett A MTL algebrára és MTL

minden A -beli e értékelésre nézve $e(A)=1$, akkor $MTL \vdash A$). Eredményük alapján fogalmazta meg Esteva és Godo azt sejtést, amely szerint az MTL logika helyes és teljes a sztenderd MTL algebrákra nézve. Egy apró pontatlanság itt a dolgozatba is becsúszott, hiszen a formális megfogalmazás nemcsak a teljességet, hanem a helyességet is magába foglalja (74. oldal). A következő mondat mintegy látens magyarázatát adja a helyesség nem említésének: hiszen a szerző állítása szerint a helyesség bizonyítása nagyon könnyű, s ebben azért van igaza, mert a sztenderd MTL algebrák speciális formájú MTL algebrák, így az MTL algebrákra vonatkozó helyesség átöröklődik a sztenderd MTL algebrákra is. Az MTL logika sztenderd MTL algebrákra való teljességének a bizonyítása (amit az MTL sztenderd teljességének nevez), az itt alkalmazott beágyazási módszer a dolgozat egyik legfontosabb algebrai logikai eredménye. A szerző kihasználja azt, hogy a teljesség bizonyítása során elegendő a végesen generálható, így véges vagy megszámlálhatóan végtelen MTL algebrákkal foglalkozni. Ez az aprónak tűnő megfigyelés úgy vélem igazán jelentős, hiszen így Esteva és Godo eredménye már akkor átvihető a sztenderd MTL algebrákra, ha bármely véges vagy megszámlálhatóan végtelen lineárisan rendezett MTL algebra beágyazható egy sztenderd algebraba. Ezt a beágyazást sikerült szabatosan végrehajtani, így jut el a szerző ahhoz az eredményhez, hogy az MTL logika teljes a sztenderd MTL algebrák osztályára nézve. Az eredmény jelentőségét tovább növeli az, hogy így világossá válik az MTL logika talán legfontosabb tulajdonsága, ami szerint az MTL logika a legáltalánosabb t -norma alapú logika.

Az MTL logika sztenderd teljességének alapjául szolgáló Jenei-Montagna beágyazás nemcsak az MTL logika esetén alkalmazható, hanem számos más logikai rendszer esetében is. Egy módszer hatékonyságának pedig az az egyik legjobb bizonyítéka, ha különböző területeken alkalmazásra kerül.

Az 5. és 6. fejezetben a szerző a beágyazás segítségével a balról-folytonos t -normák fontos tulajdonságait megfogalmazó tételeket mond ki és bizonyít. A teljesség igénye nélkül említve sikerül eddig nem ismert balról folytonos t -normákat előállítania, bizonyítja, hogy a balról folytonos t -normák folytonossági pontjainak halmaza mindig sűrű.

Az értekezés harmadik nagy egysége a Struktúra címet viseli. A Geometria című fejezetben alkalmazott megközelítés absztrakt megjelenésének vagyunk tanúi. Először a Girard monoidok osztályát vizsgálja a szerző. Vizsgálatainak elsődleges motivációi a szubstrukturális logikák valamint a t -norma alapú logikák területéről erednek. A forgatás invariáns félcsoporthok fogalmának bevezetése után a forgatás és a forgatás-annihilálás konstrukciók segítségével mód nyílik arra, hogy bizonyos reziduált félcsoporthokból involutív reziduált félcsoporthokat állítsunk elő. A továbbiakban a reziduált műveletek strukturális leírásával foglalkozik. Sikerül megmutatnia, hogy a reziduált és a ko-reziduált műveletek dualitása nem jelenti azt, hogy elegendő az egyiket vizsgálni, hanem önálló szerephez jutnak és együttesen vizsgálandók bizonyos reziduált félcsoporthoknál. A ferde szimmetrizáció konstrukciójának segítségével sikerül leírnia a sűrűn rendezett teljes láncon definiált involutív kommutatív reziduált monoidokat. Bizonyos t -involutív uninormák osztályozása után a szerző bevezeti az ikerforgatást. Belátja, hogy a kúpos involutív uninorma algebra előáll a kúpjainak iker-forgatásaként.

Jenei Sándornak a Magyar Tudományos Akadémiához benyújtott doktori értekezése jelentős új eredményeket tartalmaz. Értekezése egy kiváló, érett kutatónak a munkája. Dolgozata jól követhető, részletesen ismerteti a tudományos háttérül szolgáló legfontosabb eredményeket is. A bizonyítások pontosan kidolgozottak, kellően részletesek (bár jobb tagoltságuk segítette volna az olvashatóságot).

Az értekezéssel kapcsolatban egy olyan kérdést fogalmazok meg, amely nem konkrétan valamely fejezethez kötődik, hanem inkább (pozitív válasz esetén) a további kutatások lehetőségét veti fel: Mi a véleménye a jelöltnek arról, hogy lehetséges-e a tárgyalt logikai rendszerek vonatkozásában túllépni a nulladrendű szinten és legalábbis bizonyos módszereket elsőrendű logikai rendszerekre kiterjeszteni?

Jenei Sándornak az értekezésében is tükröződő tudományos munkássága jelentős eredeti eredményekkel gyarapította az algebrai logika területét. A geometriai szemléletet lehetővé tevő vizsgálatai további jelentős eredményekkel kecsegtetnek. A fentiek alapján feltétel nélkül javaslom a nyilvános vita kitűzését és az értekezés elfogadását.

Debrecen, 2012. június 7.

Dr. Mihálydeák Tamás