Válasz Garay Barnabás kérdéseire

Mindenekelőtt ezúton is köszönöm Dr. Garay Barnabás, az MTA doktora opponensi munkáját és véleményét.

1. A tömören feltett kérdés (PPDE) értelmezésem szerint a *parabolikus parciális differenciálegyenletekre* vonatkozik, konkrétabban arra, hogy dolgozatom eredményeiből kiterjeszthetők-e valamely részek vagy gondolatok egyes parabolikus feladatokra.

Parabolikus feladat esetén az elliptikus ismeretekre való támaszkodás természetes módja az időbeli diszkretizáció, amely az egyes időrétegeken fellépő elliptikus feladatokra vezeti vissza az eredeti feladatot. Ez elméleti és numerikus szempontból is hasznos (ld. Rothe-módszer), és numerikus megoldásra nézve ahhoz vezet, hogy először időben és azután térben diszkretizálunk, azaz fordított sorrendben, mint a szemidiszkretizációra alapuló megközelítésben. A Rothe-módszerrel kombinálva a dolgozatomban megadott iterációs eljárások is alkalmazhatók a parabolikus feladatok kontextusában, erre a 2.6.8. szakasz egy egyszerűsített modellfeladaton példát is mutat. A parabolikus esetre való alkalmazásokon tovább dolgozunk, de ez a munka még kezdeti stádiumban van. A fent említett futtatásokat továbbfejlesztettük Kurics Tamással írt, nemrég benyújtott cikkemben egy Zlatev et al. cikkeire alapuló légszennyezési feladaton, emellett a dolgozatom 2.3. fejezetében leírt változó prekondicionálás módszerét Kovács Balázs doktoranduszommal írt (*Comput. Math. Appl.*, http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2012.04.021) cikkemben kiterjesztettük komplex Hilbert-térre és ezáltal tudtuk alkalmazni egy nemlineáris Schrödinger-feladatra (a módszer ki is használja, hogy a fellépő elliptikus feladatok időfüggő feladat idődiszkretizációjából származnak).

A diszkrét maximum-elven is dolgozunk parabolikus nemlineáris esetben Szergej Korotovval és Faragó Istvánnal. 2009-ben írt cikkünkben elsőként nemlineáris parabolikus egyenletre (*ETNA* 36 (2009-2010), pp. 149-167) majd nemlineáris parabolikus rendszerre (*IMA J. Numer. Anal.* 2012, doi: 10.1093/imanum/drr050) igazoltuk a DMP-t megfelelő feltételek mellett. E cikkekben közvetlenül ötvöztük a parabolikus lineáris és az elliptikus nemlineáris technikát, a feltételek is ezekből öröklődnek. Emellett a Rothe-típusú idődiszkretizációs megközelítés itt is hasznosnak tűnik, erre épít előkészületben lévő cikkünk a fentiek nem monoton nemlinearitásra való kiterjesztéséről.

2. kérdés: "Amint azt K.J. maga jegyzi meg, számos, sok éve ismeretes prekondíciós eljárás nem tartozik az összefoglalónak szánt elmélet keretébe, sőt a használt koercivitás-fogalom sem éri el a Babuška és Brezzi neve által fémjelzett végeselem-módszercsaládokhoz szükséges általánosságot. Kérem, kommentálja saját kijelentését."

Első megjegyzésem arra vonatkozik, hogy a dolgozatom lineáris fejezetében tárgyalt, ekvivalens operátorokra alapuló prekondicionálási elmélet nem tartalmazza azon népszerű prekondicionálási módszereket, melyek az egyenletrendszer algebrai szerkezetét használják ki (pl. inkomplett LU- ill. Cholesky-felbontás, szukcesszív túlrelaxáció (SOR) és változatai stb.). Ez az operátor-megközelítés természetes sajátja, amely így volt Manteuffel és szerzőtársai munkájában is, hiszen az algebrai prekondicionálók nem valamely operátor diszkretizációjából, hanem a mátrix algebrai alapú közelítéséből származnak. Dolgozatomban tehát az általánosságra való törekvés az operátor-megközelítésből származó prekondicionálások rácsfüggetlenségére vonatkozik. (Megjegyzendő, hogy az említett algebrai prekondicionálási módszerekre – bár szintén érdemben javítják a kondíciószámot – általános esetben nem is igaz a kapott kondíciószám rácsfüggetlensége.)

A második megjegyzés dolgozatom 1.3.1 (b) pontjára vonatkozik. Itt arról van szó, hogy az

$$\langle L_S u, v\rangle_S = \langle g, v\rangle \qquad (v \in H_S)$$

gyenge alakú operátoregyenlet megoldhatóságát az

$$|\langle L_S u, v\rangle_S| \leq M\|u\|_S\|v\|_S \qquad (u, v \in H_S)$$

korlátossági feltétel mellett nem a Babuška-lemmának megfelelő

$$\sup_{v\in H_S} \frac{\langle L_S u, v\rangle_S}{\|v\|_S} \geq m\|u\|_S \quad (u \in H_S), \qquad \sup_{u\in H_S} \langle L_S u, v\rangle_S > 0 \quad (v \in H_S) \tag{1}$$

szükséges és elégséges feltételekkel, hanem az

$$\langle L_S u, u\rangle_S \geq m\|u\|_S^2 \qquad (u, v \in H_S) \tag{2}$$

elégséges koercivitási feltétellel garantálom, szemben a Manteuffel-féle felépítéssel, amely az (1) feltételeket használja.

Ennek két oka van. Az egyik, hogy a (2)-beli koercivitás (az m konstans értékével együtt) automatikusan öröklődik a Galjorkin-diszkretizációkra, és így az M felső határ hasonló öröklődésével együtt rögtön rácsfüggetlen lineáris becslésekhez vezet a megfelelő prekondiconált konjugált gradiens iterációkra. Ezzel szemben az (1) feltételbeli m konstansra ez nem áll fenn, ott a diszkretizációkra vonatkozó közös alsó határ létezését külön fel kell tenni, ahogy Manteuffelék cikkeiben is történik.

A koercivitás használatának a fentieken túli másik oka, hogy az elliptikus példák jelentős részében a koercivitás is teljesül (a Babuška-lemmára alapuló felépítésben (1)-et ilyenkor a koercivitással, azaz $v = u$ választással igazolják), ilyenek a dolgozatomban felsorolt példákon túl a negyedrendű elliptikus egyenletek, lineáris rugalmassági rendszerek stb. A Babuška-lemma szerinti általánossághoz lényegében nyeregpont-rendszerek tárgyalása esetén szokás nyúlni, mint pl. a Stokes-feladat. (Ez a nem regularizált alakra vonatkozik, a regularizált eset koercivitására dolgozatom is utal.) Ilyen nyeregpont-rendszerek esetén a csatoló tagra kirótt, az (1)-belivel analóg inf-sup feltétel vezeti vissza a megoldhatóságot a fenti feltételekre. E feladatok végeselemes diszkretizációjánál központi kérdés, hogy az inf-sup-feltételbelinek megfelelő diszkrét m_h alsó határok ne romoljanak el (azaz ne tartsanak 0-hoz, ha a h rácsfinomság 0-hoz tart), és ez valóban nem feltétlenül igaz, hanem speciális végeselemes altereket kell választani.

Budapest, 2012. szeptember 24.

Karátson János