Válasz Horváth Miklós kérdéseire

Mindenekelőtt ezúton is köszönöm Dr. Horváth Miklós, az MTA doktora opponensi munkáját és véleményét.

1. kérdés: "A disszertáció többi részével ellentétben a 2. fejezet több állítása csak 2 és 3 dimenzióban van kimondva és bizonyítva. Mit lehet mondani ugyanezen állítások magasabb dimenziós változatairól?"

Az említett állítások szemilineáris egyenletekre vonatkoznak, ahol az alacsonyabbrendű nemlineáris tag vagy tagok deriváltját hatványrendű növekedési feltétel korlátozza. Az eredmények 6 dimenzióig érvényesek, ha a feltételben szereplő p kitevőre teljesül az alábbi kikötés:

$$3 \le p \quad (\text{ha } d = 2), \quad \text{ill.} \quad 3 \le p \le \tfrac{2d}{d-2} \quad (\text{ha } 3 \le d \le 6). \tag{1}$$

E kikötés két dologhoz kell. Egyrészt, a hatványkitevőre vonatkozó felső becslés révén teljesül a $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ Szoboljev-beágyazás, amely lehetővé teszi, hogy a peremérték-feladat gyenge alakját a $H^1(\Omega)$ Hilbert-téren értelmezett operátoregyenletként írhassuk fel, mivel ekkor a gyenge alakú nemlineáris operátor a $H^1(\Omega)$ térből önmagába képez. Ezen túl az említett tételekben a megfelelő nemlineáris operátor deriváltjának lokálisan Lipschitz-folytonosnak is kell lennie, amit a differenciálegyenletben lévő nemlineáris tag deriváltjának lokális Lipschitz-folytonosságával garantálunk. Utóbbihoz használjuk a $p \ge 3$ feltételt, mivel az említett derivált lokális Lipschitz-konstansa $|u|^{p-3}$ nagyságrendű. (A p-re (1)-ben megadott felső becslés önmagában $d > 6$ esetén is értelmes, a $d \le 6$ korlátozás a $p \ge 3$ alsó becslés miatt lép fel.)

Az (1) feltétel $d > 3$ esetén már nagyon szűk határokat szab p értékének. Mivel ráadásul a $d > 3$ esetet a vizsgált modellekben legtöbbször nem használjuk (a példaként hozott fizikai modellekben Ω mindig 2- vagy 3-dimenziós tartomány), érdemesnek találtam a kézzelfoghatóbb 2 és 3 dimenziós esetre szorítkozni a p-re vonatkozó konkrét határokkal. A bizonyítások azonban szó szerint átvihetők a magasabb d-kre, mivel az említett Szoboljev-beágyazást és Lipschitz-becsléseket használják.

A fentiek elmondhatók akkor is, ha a Neumann-peremfeltételben szerepel ilyen nemlinearitás, ennek növekedési kitevőjére vonatkozó felső határ viszont $\frac{2d-2}{d-2}$, így ott csak a $d = 4$ eset jön még szóba.

Ha valamelyik növekedési kitevő nagyobb ezeknél a megengedett határoknál, vagy d túl nagy, akkor a megfelelő operátoregyenlet a $H^1(\Omega)$ Hilbert-tér helyett olyan anizotróp Banach-térben írható fel, ahol a gradiensek L^2-ben vannak, de magukra a függvényekre magasabb kitevős integrálhatósági feltétel teljesül. Ilyen térben adható meg pl. a Stefann-Boltzmann-típusú hősugárzási probléma gyenge megoldása, lásd *Krizek et al., Adv. Appl. Math. Mech., Vol. 1, No. 1, pp. 125-139 (2009)* cikkét. (Nem nyilvánvaló kérdés az, hogy adaptálhatóak-e említett Hilbert-térbeli állításaim ilyen Banach-térbeli egyenletekre.)

2. kérdés: "A 4. fejezetben megadott a posteriori becslések valódi alkalmazásokban tesztelésre kerültek-e, sikerült-e az elméleti eredményeket konkrét futtatási adatokkal reprodukálni?"

A kérdés megérkezéséig nem készültek számítógépes futtatások a 4. fejezethez. (A programozási kapacitást ugyanis, amit PhD-hallgatóim és egyes szakdolgozóim munkája jelent, eddig az iterációs módszerekkel kapcsolatos eredményeim vizsgálatára fordítottam.) Kovács Balázs PhD-hallgatómnak köszönhetően most teszteljük a hibabecsléseket skalár nemlineáris főrészű feladaton.

Budapest, 2012. szeptember 19.

Karátson János