Garay Barna DSc
PPKE ITK
1083 Budapest
Práter utca 50.

e-mail: garay@digitus.itk.ppke.hu
tel: 886 47 79
fax: 886 47 24

Opponensi vélemény
KARÁTSON JÁNOS:
"Operator methods for the numerical solution of elliptic PDE problems"
című DSc értekezéséről

1.) Bevezető megjegyzések

Lineáris elliptikus egyenletek szokásos végeselem közelítése $L_h u_h = g_h$ alakú[1] lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet, amelynek megoldását határozottan könnyebbé teszi, ha sikerül olyan, úgynevezett *prekondícionáló* P mátrixot találni, hogy a $P^{-1}L_h$ mátrix kondíciószáma jóval kisebb legyen, mint az L_h mátrix kondíciószáma:

$$\mathrm{Cond}(P^{-1}L_h) << \mathrm{Cond}(L_h) \ :$$

az $L_h u_h = g_h$ egyenlet a vele ekvivalens $P^{-1}L_h u_h = P^{-1}g_h$ alakban lényegesen könnyebben kezelhető. Maga a megoldás tipikusan az iterációs módszerek egyikével történik, amelyek önmagukban is lehetnek prekondícionáltak: a gyakran használt relaxációk és egyéb módosítások is felfoghatók prekondíciós eljárásokként (a lineáris algebrában csakúgy, mint a Newton módszer esetében).

A fentiek értelmezhetők a lineáris algebrai egyenletrendszerek, a lineáris operátorok funkcionálanalízise, valamint az elliptikus differenciáloperátorok szintjén. Ez utóbbi esetben a $P = P_h$ prekondícionáló mátrixcsalád az L differenciáloperátor fő–részéből vagy szimmetrizáltjából származtatható, ami azt is jelenti, hogy magát az L differenciáloperátort is prekondícionáljuk egy S differenciáloperátor segítségével, a P_h–t pedig az $Su = g$ elliptikus egyenlet végeselem közelítésének megfelelően S_h–nak választjuk. Ez utóbbi eljárás — abban a speciális esetben, amikor L a (klasszikus peremfeltételek egyikével

[1] itt h egyszer s mindenkorra a rácsparaméter

ellátott) Laplace operátor, a végeselem módszer helyett pedig a véges differenciák módszere szerepel — Czách László 1955-ös kandidátusi értekezésében jelent meg először. A témavezető Leonyid Vitalijevics Kantorovics volt.

2.) Az értekezés 1–2. fejezetéről

A disszertáns DSc értekezésének első két fejezetében a $P = S_h$ típusú prekondícionálások általános elméletét fejti ki, ami az elmúlt ötven év eredményeinek egységesítése, általánosítása, egyfajta újraírása és absztakt betetőzése. A legfontosabb elődök T. Manteuffel, O. Axelsson és J.W. Neuberger voltak, utóbbi kettejüknek Karátson Jánossal közös dolgozatai is vannak. Czách Tanár Úr 1955–ös munkája sajnálatos módon érdemi visszhang nélkül maradt, hiába idézte azt maga Kantorovics is, Akilovval együtt írt funkcionálanalízis–könyvében.

Ötvenöt évvel 1955 után az is természetes, hogy prekondícionálás módszere, a végeselem módszerhez hasonlóan, nagyszámú alkalmazásra talált a nemlineáris elliptikus egyenletek illetve az ezek mögött álló monoton operátorok témakörében. Karátson János mostani értekezésének leghosszabb, mintegy hatvan oldalas második fejezete nemlineáris feladatokkal foglalkozik, s akárcsak a lineáris elméletről szóló első fejezet a maga ötven oldalával, jól szerkesztett, szépen megírt, kiegyensúlyozott felépítésű, kompakt olvasmány. A becslések általában függetlenek a (végeselem–)rácsfelbontás miképtjétől és exponenciális konvergenciát biztosítanak. Amitől függenek, az a rácsparaméter, a V_h végeselem–altér dimenziója, valamint a kérdéses differenciáloperátorok sajátértékeinek aszimptotikája. A becslések szerkezetében gyakorta felismerhetők a konjugált gradiens módszer vagy a Newton–iteráció konvergenciájára vonatkozó klasszikus eredmények.

Itt legyen szabad két oldallagos megjegyzést tennem. A környezetemben dolgozó mérnökök az általuk elérendő pontossághoz teljesen megelégednek végső soron egyetlen, a megfelelő helyeken sűrített és lehetőleg kicsiny sávszélességű ritka mátrixot eredményező rácsfelbontással[2]. Így számukra a rácsfelbontástól való függetlenség csupán annyit jelent, hogy egy absztrakt hibabecslés igaz a legkevésbé szerencsésen választott rács esetében is, amelynek ők konkrét számítógépes munkájukban kevés hasznát látják. Ami fontos nekik — és az absztrakt elmélet hasznáról is meggyőzi őket —, az az értekezésben szereplő példák megdöbbentő sokasága és változatossága,

[2]a sávszélesség optimalizálása, amelyre különféle heurisztikákat alkalmaznak, NP teljes kombinatorikus feladat

amelyekkel tizenöt alfejezet foglalkozik, a terjedelmi korlátoknak megfelelő huszonvalahány oldalon.

Az értekezés első két fejezetének számomra legérdekesebb része a 2.5.1 Tétel, amely nem absztrahál és általánosít, hanem véglegesen elrendez egy problémát: a négyzetes hibacsökkenés rácsfelbontástól való függetlensége egy

$$\begin{cases} -\operatorname{div} f(x,\nabla u) + q(x,u) &= g(x) \quad , \ x \in \Omega \\ f(x,\nabla u)\cdot\nu + s(x,u) &= \gamma(x) \quad , \ x \in \Gamma_N \\ u(x) &= 0 \quad , \ x \in \Gamma_D \end{cases}$$

alakú peremértékfeladatra pontosan akkor teljesül[3], ha az $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ függvény második változójában lineáris.

Feltűnő, hogy a disszertáns az értekezés első két fejezetében még csak utalások formájában sem használja a monoton operátorok nyelvezetét, a bihemifolytonosság, pontosabban a Gateaux derivált bihemifolytonosságának fogalma pedig egészen a 3.3.2 Feltétel egy zárójelbe tett félmondatáig lebegve marad. Jóllehet a megadott szakirodalmi hivatkozások mindig is egyértelművé teszik, hogy ebben a kontextusban mi értendő bihemifolytonosság alatt[4], egy korábbi magyarázatnak jobban örültem volna. A 16-ik oldal 8-ik sorában a képletszámozás téves.

3.) Az értekezés 3. fejezetéről

Az értekezés harmadik fejezetének témája az elliptikus egyenletek végeselem megoldásaira vonatkozó diszkrét maximum–elv. Ez a fejezet csak a felhasznált és igen gazdag technikai apparátus révén — a numerikus lineáris algebra ötvözése a Szoboljev–analízissel a nemlineáris elliptikus egyenletek elméletében — kapcsolódik a megelőző kettőhöz. Terjedelmében azok mindegyikénél rövidebb, egészen pontosan negyven oldal hosszúságú. A részletek

---

[3] abban az értelemben, hogy alkalmasan választott $h_0 > 0$ és $\delta > 0$ mellett

$$\sup\left\{ \frac{\|F_h(u_{n+1})\|_{H^1_D}}{\|F_h(u_n)\|^2_{H^1_D}} \ : \ h < h_0 \, , \ u_0 = u_0^h \in V_h \, , \|u_0 - u_h\|_{H^1_D} < \delta \, , \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

korlátos — itt a végeselem közelítés az $F_h(u_h) = 0$ egyenletre vezet a V_h altérben, amelyet Newton–iterációval oldunk meg (a gyenge megoldásra vonatkozó absztrakt átfogalmazás $F(u) = 0$). Még annyit, hogymind a peremértékfeladat paramétereinek, mind a végeselem altér elemeinek teljesíteniük kell egy egész sor, az adott kontextusban természetesnek mondható technikai feltételt

[4] az $\mathbb{R}^2 \to H$, $(s,t) \to F'(u + sk + tw)h$ leképezés folytonossága rögzített $u, k, w, h \in H$ esetén

iránti igényesség, a "lefedett" példák gazdagsága, és így a lehető legnagyobb, egységes általánosságra való törekvés erre a fejezetre is jellemző. A különbség az, hogy itt az egységes keretbe foglalt elmélet alapvető eredményeinek is jelentős része a disszertáns sajátja. A *J.Karátson and S.Korotov, "Discrete maximum principles for finite element solutions of nonlinear elliptic problems with mixed boundary conditions", Numer. Math. 99(2005), 669–698* dolgozat valódi áttörést jelentett. A jelöltnek és szerzőtársának a világon elsőként sikerült a diszkrét maximum–elvet a lineárisról nemlineáris elliptikus egyenletekre, sőt két évvel később nemlineáris egyenletrendszerekre is kiterjeszteniük, ami azóta csaknem száz hivatkozást is jelentett számukra.

A DSc értekezés elejétől a végéig a vegyes peremfeltételeket helyezi előtérbe. A 3.4.1 és a 3.4.4 Tétel szerint a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\,(b(x,\nabla u)\nabla u) + q(x,u) & = f(x) \quad ,\ x \in \Omega \\ b(x,\nabla u)\,\frac{\partial u}{\partial \nu} + s(x,u) & = \gamma(x) \quad ,\ x \in \Gamma_N \\ u(x) & = g(x) \quad ,\ x \in \Gamma_D \end{cases}$$

alakú peremértékfeladat esetében a klasszikus megoldásokra érvényes[5] folytonos maximum–elv a

$$\max_{\overline{\Omega}} u \le \max\{0, \max_{\Gamma_D} g\}\ ,$$

a diszkrét maximum–elv pedig a

$$\max_{\overline{\Omega}} u_h \le \max\{0, \max_{\Gamma_D} g_h\}\ ,$$

alakot ölti. A diszkrét maximum–elv teljesüléséhez sem a végeselem közelítés mögötti rácsfelbontás, sem a végeselem bázisfüggvények nem lehetnek tetszőlegesek: mindegyiküknek speciális, a dimenziótól is függő (leggyakrabban $d = 2, 3$) geometriai feltételeket és egyenlőtlenségeket kell teljesíteniük. Szerencsére a szakirodalom, igaz teljesen más összefüggésekben szerepeltetett szokásos rácsfelbontás– és végeselem–altér regularitási feltételeinek kicsiny mértékű szűkítése elegendő.

Nemlineáris elliptikus egyenletrendszerek korrekt kitűzöttsége erősen függ mind a nemlinearitásokra vonatkozó növekedési feltételektől, mind a csatolás "erejétől"/módjától (diagonális dominancia plusz kooperativitás) is. A harmadik fejezet a diszkrét maximum–elv egyetlen egyenletről egyenletrend-

[5]az Ω tartományon ehhez meg kell követelni az $f(x) - q(0, x) \le 0$, a $\Gamma = \partial\Omega$ perem Γ_N Neumann–részén pedig a $\gamma(x) - s(x, 0) \le 0$ egyenlőtlenségek teljesülését is

szerre történő általánosításának hét, egyenként más és más "extrákat" tartalmazó[6] változatával fejeződik be.

A bizonyítások részben a lineáris algebrai egyenletrendszerek Ciarlet–féle maximum–elvének szerkezeti általánosításán, irreducibilitási feltételének gyengítésén, valamint azon a természetes, mind a folytonos maximum–elv, mind az invariáns sokaságok elméletéből ismert gondolaton alapulnak, hogy az egyenlet nemlineáris részébe visszahelyettesítve a megoldást, az lineáris feladatként vizsgálható újra.

4.) Az értekezés 4. fejezetéről

A nem egészen húsz oldalas negyedik fejezet új témát kezd, egy variációs szerkezetű $F(u)+\ell = 0$ operátor–egyenlet $E(u) = \langle F(u) - F(u^*), u - u^* \rangle$ energia típusú hibafüggvényére állít fel olyan kétparaméteres becslést, amelyben a(z általában Banach térbeli) paraméterek optimális értékei úgyszintén a pontos megoldásból származtathatók. A hibabecslés értelme az, hogy segítségével a posteriori becslések vezethetők le adott közelítő megoldásnak a pontos megoldástól való eltérésére. A paraméterek ehhez szükséges szuboptimális beállításai — kezdve a $-\operatorname{div} f(\nabla u) = g$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ elliptikus peremértékfeladaton — lineáris végeselem segédproblémák megoldását igénylik. Csakúgy mint a korábbi fejezetekben, a tárgyalás kitér csatolt rendszerekre valamint negyedrendű egyenletekre is. Befejezésként egy, akárcsak demonstrációs jellegű numerikus példát is szerepeltetni lehetett volna.

A negyedik fejezet elsődlegesen P. Neittaanmaki és S. Repin eredményeit fejleszti tovább, és a Tézisfüzetben [23] sorszám alatt szereplő 2009–es dolgozat rövidített változata. A tömörségre való törekvés nem kis hajtóerő: ez a dolgozat kimaradt az értekezés irodalomjegyzékéből.

Kimaradt továbbá a betűszavak értelmének feloldása is néhány helyen, volt közöttük olyan, amelyik jelentésének külön utána kellett hogy nézzek. Legyen szabad ezért az egyik kérdésemet maximálisan tömörörséggel így fogalmaznom: PPDE. Másik kérdésem az értekezés 29-ik oldalával kapcsolatos: amint azt Karátson János maga jegyzi meg, számos, sok éve ismert végeselemes prekondíciós eljárás nem tartozik az összefoglalónak szánt elmélet

[6] a k-adik (ahol $k = 1, 2, \ldots, s$) egyenlet fő részében a divergencia–operátor mögött $(b_k(x, u, \nabla u)\nabla u_k)$ áll, amelyhez $w_k(x, u)\nabla u_k$ alakú konvekciós, valamint különböző (szub– illetve szuperlineáris) típusú reakció–diffúzió (pld. $q_k(x, u)$, $\sum_{\ell=1}^{s} V_{k\ell}(x, u, \nabla u)u_\ell$) tagok adódnak hozzá — a k-adik peremfeltétel Neumann–részében u_k együtthatója ugyancsak $b_k(x, u, \nabla u)$, Dirichlet–részében pedig egyedül az u vektor k-adik koordinátája szerepel

keretébe, sőt a használt koercivitás–fogalom sem éri el a Babuska és Brezzi neve által fémjelzett végeselem–módszercsaládokhoz szükséges általánosságot. Kérem, hogy kommentálja saját kijelentését.

5.) Befejező megjegyzések, összefoglalás

A diszkrét maximum–elv, csakúgy mint az eredeti közönséges, késleltetett vagy éppen parciális differenciálegyenletek megoldásainak jellegzetes kvalitatív tulajdonságait vagy kitüntetett konfigurációit megőrző diszkretizációk vizsgálata mintegy húsz–huszonöt évvel ezelőtt vált általánosan kutatott témává. Az érdeklődés fő oka a számítási kapacitások gyors növekedése. A prekondícionálással kapcsolatos elméleti és alkalmazotti kutatások sokfelé tapasztalható felélénkülésének ugyancsak a számítógép a tényleges motorja.

Karátson János jókor és jó ütemben kapcsolódott be ezeknek a kérdésköröknek a vizsgálatába és vált azok elismert kutatójává. Dolgozatai közül több mind tíz a numerikus funkcionálanalís témát gondozó legrangosabb folyóiratokban jelent meg. Az általa elért és ebben a DSc értekezésben bemutatott eredmények predesztinálják őt a DSc fokozatra, amelyet teljes meggyőződéssel javaslok számára.

Budapest, 2002 augusztus 31.

Garay Barna