Karátson János MTA doktori értekezésének bírálata

A lineáris és nemlineáris elliptikus parciális differenciálegyenletek számos természettudományos és egyéb folyamat modellezésében alapvető fontosságúak, ezért ezek elméleti vizsgálata és numerikus kezelésének kérdései iránt folyamatos érdeklődés mutatkozik. Az ilyen differenciálegyenletek szokásos megoldási módjai a végeselem-módszer és a véges differencia módszer, melyek egy nagyméretű egyenletrendszerre vezetnek, majd ezen egyenletrendszer megoldása többnyire iterációval történik. Lineáris operátor esetén az iteráció sebessége és hibaérzékenysége is nagymértékben függ az egyenletrendszer mátrixának kondíciószámától. Ezért számos prekondicionáló eljárás ismeretes, amely olyan ekvivalens átalakítása az egyenletrendszernek, amely a mátrix kondíciószámát lényegesen csökkenti. Karátson János disszertációjának egyik alapvető gondolata, hogy nem a diszkretizált rendszert, hanem az eredeti differenciáloperátort prekondicionálja, ezáltal a differenciálegyenletek numerikus megoldása Hilbert-tereken (leginkább Szoboljev-tereken) ható operátorokkal kapcsolatos kérdésekhez vezet. Az első részben lineáris operátorok kompakt-ekvivalens operátorokkal való prekondicionálása történik, a fő eredmény a rácsfüggetlen szuperlineáris konvergencia igazolása. A második részben nemlineáris egyenletek megoldására alkalmaz lépésenként változó prekondicionálást a Szoboljev gradiensek elméletében, ezzel fontos esetekben igazolja a Newton-módszer rácsfüggetlen négyzetes konvergenciáját, sőt belátja, hogy elliptikus feladatok egy általános osztályán csak akkor van rácsfüggetlen négyzetes konvergencia, ha az operátor szemilineáris. A harmadik részben a diszkrét maximumelv egy átfogalmazása történik Hilbert-térbeli operátoregyenletekre, majd ennek alkalmazása differenciálegyenletek végeselemes megoldásaira. A negyedik részben pedig egy nemlineáris egyenlet megoldásához ismert a posteriori hibabecslés élesítése és kiterjesztése történik Banach-terekre.

Részletesebb áttekintés:

Első fejezet. Faber, Manteuffel és Parter 1990-ben bevezették az ekvivalens operátorok fogalmát: két operátor ekvivalens, ha képvektoraik hosszának hányadosa két pozitív konstans közé esik. Igazolták, hogy ha az eredeti operátor ekvivalens a prekondicionáló operátorral, akkor a végeselemes konjugált gradiensmódszer rácsfüggetlen lineáris konvergenciát ad. Ismert azonban, hogy a megoldás közelében a konjugált gradiensmódszer felgyorsul, az így adódó szuperlineáris konvergencia rácsfüggetlenségét ez a felépítés nem garantálta. Karátson Axelssonnal közös cikkeiben megmutatta, hogy ha az eredeti operátor kompakt ekvivalens a prekondicionáló operátorral, akkor a szuperlineáris konvergenciára is bizonyítható a rácsfüggetlenség. Itt a kompakt ekvivalencia azt jelenti, hogy az egyik operátor egy konstansszorosa a másiktól csak egy kompakt operátorban tér el. Belátta, hogy két lineáris másodrendű elliptikus operátor pontosan akkor kompakt ekvivalens, ha a fő részek egymás konstansszorosai. A prekondicionálás utáni operátor az egységoperátor kompakt perturbációja, ennek sajátértékeivel konkrét rácsfüggetlen szuperlineáris becsléseket adott a konjugált gradiens módszer konvergenciájára. Először absztrakt Hilbert-teres változatot igazolt, aztán több alkalmazást adott lineáris elliptikus egyenletekre illetve rendszerekre, nemszimmetrikus operátor esetén az alkalmasan definiált szimmetrikus részhez tartozó prekondicionálással. Rácsfüggetlen lineáris konvergenciát is bizonyított általános feltételek mellett. Végül konkrét esetekre futtatási eredményekkel is dokumentálta az elmélet alkalmazhatóságát.

A második fejezet témája nemlineáris $F(u) = b$ operátoregyenletek iterációval való megoldása. Erre egy közismert eljárás a Newton- módszer, de itt az operátor deriváltjának numerikus kezelése költséges lehet. Ismert, hogy ha F deriváltoperátora alkalmas értelemben szimmetrikus és pozitív definit, akkor $F(u)-b$ előáll egy φ funkcionál gradienseként és az $F(u) = b$ egyenlet megoldása átfogalmazható φ minimalizálásának feladatává, amelyre a közönséges gradiens módszer alkalmazható. Mivel a gradiens fogalma a skaláris szorzáshoz kötött, annak módosításával a funkcionál gradiense is változik. Neuberger 1987-es monográfiájának alapgondolata, hogy a differenciáloperátorok gyenge megoldásában szereplő Szoboljev-terek skaláris szorzásához tartozó úgynevezett Szoboljev-gradienseken keresztül tárgyalja a parciális differenciálegyenletek elméletét és numerikus módszereit. Az előző fejezet mintájára a skaláris szorzás megváltoztatása itt is prekondicionálásnak tekinthető. Karátson Neuberger elméletét kiterjesztette lépésenként változó prekondicionálásra, ezzel közös általánosítását adva a Newton- és a gradiens módszernek monoton nemlineáris operátorokra. Először általános Hilbert-térbeli operátorokra adott lineáris és erősebb feltételek mellett szuperlineáris konvergenciabecslést, aztán nemlineáris elliptikus egyenletek esetére konkrét prekondicionáló operátorokkal. Belátta, hogy a lépésenként változó prekondicionálás melletti iterációk között aszimptotikusan a Newton-módszer adja a φ funkcionál leggyorsabb csökkenését. Karátson egyik legfontosabb eredménye, hogy nemlineáris elliptikus peremérték-feladatok egy széles osztályára a klasszikus Newton-módszer végeselemes változata pontosan akkor mutat rácsfüggetlen négyzetes konvergenciát, ha az operátor főrésze lineáris. A bizonyítás nehéz és technikás része a rácsfüggőség igazolása nemlineáris esetre.

A harmadik fejezet diszkrét maximumelveket tárgyal. Maximumelven itt olyan állításokat kell érteni, hogy egy elliptikus egyenlethez tartozó peremérték-feladat megoldásai a határon veszik fel a maximumukat, ha az operátort definiáló függvényekre alkalmas egyenlőtlenségeket írunk elő. Karátson megadott egy általánosítást nemlineáris elliptikus egyenletekre vegyes peremfeltétel esetén, ahol a határ egyik részén Dirichlet-, másik részén Neumann-típusú peremfeltétel adott. Diszkrét maximumelv eddig lényegében csak lineáris operátorokra volt ismert. Karátson Korotovval közösen kiterjesztette a diszkrét maximumelvet vegyes peremfeltételekkel nemlineáris elliptikus egyenletekre. Először egy absztrakt operátoregyenlet végeselem-diszkretizációjára adott meg maximumelvet, majd konkrét nemlineáris elliptikus operátorra vegyes peremfeltételek mellett igazolta, hogy ha a tartomány triangulációja elég szabályos, akkor a szimplexeken lineáris szokásos végeselem-bázissal adott diszkretizációra teljesül a diszkrét maximumelv. Hasonló állításokat ad meg nemlineáris elliptikus rendszerekre is, és bemutat néhány konkrét alkalmazást, például reakció-diffúzió egyenletekre, transzportfolyamatokra.

A negyedik fejezetben nemlineáris elliptikus egyenletek végeselem-módszeréhez ad általános a posteriori hibabecslést, most is először általános funkcionálanalízises megközelítéssel. Legyen $F : V \to V^*$ egy Banach-tér nemlineáris leképezése a duálisába; megoldandó az $F(u) + l = 0$ egyenlet, $l \in V^*$. Feltesszük, hogy F szigorúan monoton és deriváltja szimmetrikus; akkor az $F(u) + l = 0$ egyenlet megoldása ismét egy funkcionál minimalizálásába megy át. Ha u^* a megoldás, akkor az energia-funkcionál, $E(u) = \langle F(u) + l, u - u^* \rangle \geq m\|u - u^*\|_V^2$ jól becsüli az u közelítés hibáját. A fejezet egyik fő eredménye további feltevések mellett megadja az energia-funkcionál egy olyan felső becslését, amely u^*-ot már nem tartalmazza, és a benne szereplő függvény és skalár paraméter alkalmas választásával visszaadja az energia-funkcionált. Több nemlineáris elliptikus feladat speciális esetére is átfogalmazza a becslést, továbbá megadja ezen eredményeknek a végeselemes közelítésekre vonatkozó változatát is.

Kérdések

1. A disszertáció többi részével ellentétben a 2. Fejezet több állítása csak 2 és 3 dimenzióban van kimondva és bizonyítva. Mit lehet mondani ugyanezen állítások magasabb dimenziós változatairól?

2. A 4. fejezetben megadott a posteriori becslések valódi alkalmazásokban tesztelésre kerültek-e, sikerült-e az elméleti eredményeket konkrét futtatási adatokkal reprodukálni?

Általános értékelés

A disszertációban ismertetett eredmények érdemi és jelentős előrelépést jelentenek az elliptikus differenciálegyenletek numerikus módszereinek elméletében. A numerikus eljárások operátoros, a funkcionálanalízis oldaláról való tárgyalásának vannak ugyan előzményei, de Karátson János mind Manteuffel és társai, mind Neuberger eredményeit nagymértékben tovább tudta fejleszteni. A rácsfüggetlen konvergencia tisztázása bármely módszer használhatóságának alapja, ezért Karátson ezzel kapcsolatos munkái alapvető fontosságúak. A maximumelvvel kapcsolatos vizsgálatai is nagyon érdekesek, az MTMT adatai szerint a legtöbb hivatkozást, 32-t egy ilyen témájú, Korotovval írt cikkére kapta. A disszertáció mutatja, hogy nagy biztonsággal és találékonysággal alkalmazza a funkcionálanalízis eszköztárát és a formulamanipulációs számolási adottságai is kiválóak. Megemlíthetjük még Faragó Istvánnal közösen írt monográfiáját, nagyszámú publikációit elismert külföldi társszerzőkkel. Ezek alapján Karátson János az akadémiai doktori fokozattal szemben támasztott elvárásoknak messzemenően eleget tesz. A fentieknek megfelelően egyértelműen javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását és az MTA doktora fokozat odaítélését.

Budapest, 2012.06.04.

Horváth Miklós