

dc_223_11

Gravitációsan sugárzó kompakt kettősök és brán-elméleti kutatások

(Disszertáció az *MTA Doktora* cím elnyeréséért)

Gergely Árpád László

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Kísérleti Fizikai Tanszék

Elméleti Fizikai Tanszék

Szeged, 2011. szeptember

dc_223_11

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	vii
Bevezetés	ix
I. Gravitációsan sugárzó kompakt kettősök	1
1. Bevezetés a kompakt, spines kettős rendszerek dinamikájába	3
2. Konzervatív dinamika	11
2.1. Kinematikai és dinamikai változók	12
2.1.1. A változók	12
2.1.2. Vonatkoztatási rendszerek	14
2.1.3. Kényszerek az Euler szögek evolúciójára	15
2.1.4. A hely- és sebességvektor a $\mathcal{K}_A$ és $\mathcal{K}_L$ rendszerekben	16
2.2. Kényszerek az impulzusmomentum-változókra	17
2.2.1. Az 5 szögjellegű szabadsági fok	17
2.2.2. Impulzusmomentumok	18
2.2.3. Hosszúságjellegű szabadsági fok	20
2.2.4. A független változók: összegzés	22
2.3. A spinvektorok evolúciója	22
2.3.1. Spinprecessziók	22
2.3.2. Precessziók által megőrzött konfigurációk	23
2.3.3. A spin-precessziós szögsebességek a $\mathcal{K}_A$ rendszerben	24
2.4. A $\mathcal{K}_A$ rendszerben kifejezett gyorsulás	24
2.5. Általános perturbáló erő hatásai	27
2.5.1. Kepleri mozgásállandók	27
2.5.2. Radiális a_r félnagy tengely és e_r excentricitás	28
2.5.3. A nem-inerciális $\mathcal{K}_A$ rendszer	28
2.5.4. A χ_p valódi anomália	29
2.5.5. Az $\hat{\mathbf{I}}$ felszálló csomó	30
2.6. Az Euler szögek fejlődése	30
2.6.1. Az α inklináció	30
2.6.2. A felszálló csomó $-\phi_n$ hossza	30

2.6.3.	A periasztron ψ_p argumentuma	31
2.7.	A spin-szögek fejlődése	31
2.7.1.	A κ_i spin polár szögek	31
2.7.2.	A spinek γ relatív szöge	32
2.7.3.	A spin ψ_i azimutális szögei	33
2.8.	Speciális konfigurációk	33
2.9.	Összefoglalás	35
3.	Szekuláris spin és kvadrupól gravitációs sugárzási veszteségek	37
3.1.	Az energiaveszteség számolása	37
3.1.1.	Gravitációs sugárzás	37
3.1.2.	Az energiaveszteség számolásához használt dinamikai változók . . .	38
3.1.3.	A pálya-impulzusmomentum nagysága	40
3.1.4.	A radiális egyenlet és egy általánosított valódi anomália paraméterezés	42
3.2.	Spin és kvadrupól járulékok a szekuláris energiaveszteségben	43
3.3.	A spin vektor 2PN sugárzási rendben	44
3.4.	Összefoglalás	44
4.	A spin-átfordulás jelensége és az X alakú rádiógalaxisok	45
4.1.	A gravitációs sugárzás, mint domináns disszipatív hatás	46
4.2.	A tipikus tömegarány	48
4.3.	A spin-átfordulás mechanizmusa	51
4.3.1.	A spinek és pálya-impulzusmomentum relatív nagysága	51
4.3.2.	A vezető rendű precessziók	51
4.3.3.	Vezető rendű disszipatív dinamika	52
4.3.4.	A spin-átfordulás üteme	56
4.4.	A spin-átfordulás szöge	57
4.4.1.	A spin iránya a bespirálozás során	57
4.4.2.	A spin-átfordulás szögének korlátai	59
4.5.	Az XRG-k keletkezési mechanizmusainak összehasonlítása	59
4.6.	Összefoglalás	62
5.	Kompakt kettős rendszerekkel kapcsolatos eredmények	65
II.	Brán-elméleti kutatások	67
6.	Bevezetés a brán-világokba	69
7.	Kovariáns gravitációs dinamika	75
7.1.	Az 5D Einstein egyenletek felbontása	75
7.2.	Az Israel-féle illesztési feltételek	78
7.2.1.	Az indukált metrika folytonossága és a Lanczos egyenlet	78
7.2.2.	Külső görbületet tartalmazó forrástagok átlaga és különbsége	79

7.2.3.	Szimmetrikus és aszimmetrikus beágyazások	80
7.3.	Gravitációs dinamika a bránon	80
7.3.1.	Az effektív Einstein egyenlet	80
7.3.2.	Különbség-egyenletek	81
7.3.3.	A Codazzi egyenlet	81
7.3.4.	A kétszer kontrahált Gauss egyenlet	82
7.3.5.	A brán Bianchi azonosság	82
7.4.	Bránra merőleges fejlődésegyenletek	83
7.5.	Összefoglalás	83
8.	Brán-kozmológia	85
8.1.	Ideális folyadék Friedmann bránon	85
8.2.	Töltött 5D Vaidya-Anti de Sitter téridő	88
8.2.1.	A geometria	88
8.2.2.	Az 5D források	90
8.2.3.	A beágyazás	91
8.2.4.	Általánosított Friedmann és Raychaudhuri egyenletek	92
8.3.	Sugárzó Friedmann brán dinamikája	94
8.4.	Eötvös brán	96
8.4.1.	Változó konstansok	97
8.4.2.	Kozmológia az Eötvös bránon	99
8.4.3.	Numerikus megoldás	102
8.5.	Einstein brán	103
8.5.1.	Az ÁRE Einstein univerzuma	103
8.5.2.	Az Einstein brán	105
8.5.3.	Az 5D Birkhoff tétel sérülése	108
8.5.4.	Homogén brán	109
8.6.	Összefoglalás	112
9.	Brán-asztrofizikai vizsgálatok	115
9.1.	Schwarzschild fekete lyuk a bránon	115
9.1.1.	Illesztési feltételek	115
9.1.2.	Gravitációs kollapszus	117
9.1.3.	Swiss-cheese modell és fekete húrok	124
9.2.	Árapály-töltésű brán fekete lyuk	130
9.2.1.	A fény elhajlása másodrendben	131
9.2.2.	Termodinamikai megfontolások	138
9.3.	Összefoglalás	142
10.	Brán-elméletben elért eredmények	145

Köszönetnyilvánítás

Hálával gondolok azon tanárainkra, akik kutatási és munkastílusom kialakulásában leginkább befolyásoltak: Bíró József (Brassó, geometria), Turzó Gábor (Brassó, mechanika) és Mariana Vraciu (Bukarest, algebra); illetve azon kutatótársaimra-mentoraimra, akik az elmúlt évek során általam művelt kutatási területekbe bevezettek: Perjés Zoltán (KFKI Részecske és Magfizikai Kutatóintézet, Budapest) az Einstein egyenlet egzakt megoldásai és a kompakt kettős rendszerek matematikai, Peter Biermann (Institut für Radioastronomie, Bonn, Németország) pedig asztrofizikai vizsgálataiba; Roy Maartens (Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth, Egyesült Királyság) a brán-elmélet, míg Karel Kuchař (University of Utah, USA) a geometrodinamika terén végzett korai kutatásaimban játszott jelentős szerepet.

Köszönettel tartozom azoknak a szegedi kollégáknak, leginkább Szatmári Sándor tanészévezető egyetemi tanárnak, akinek töretlen bizalma és támogatása lehetővé tette, hogy addig ott nem művelt, gravitációelméleti kutatási irányt alapíthassak a Szegedi Tudományegyetemen. Elismerésemet szeretném kifejezni a kutatócsoport-hangulat megteremtésében fontos szerepet játszó, időközben PhD fokozatot szerzett volt diákjaimnak, Kovács Zoltánnak, Keresztes Zoltánnak, Mikóczi Balázsnak is.

Kutatásaim anyagi háttérét az évek során az Országos Tudományos Kutatási Alap öt sikeres pályázata, a Bonn-i, Portsmouth-i, Nápoly-i, Montpellier-i és Umeå-i egyetemeken dolgozó kollégákkal való kollaborációimat támogató ERASMUS program, a Magyar Állami Eötvös Ösztöndíj, a Soros Alapítvány ösztöndíja, az Oktatási Minisztérium Magyar Zoltán és Széchenyi István, illetve a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János ösztöndíjai, a London South Bank University Research Opportunities Fund pályázata, valamint a Black Holes in a Violent Universe EU COST kollaboráció biztosították.

Köszönettel tartozom azon külföldi kollégáimnak, akik munkalátogatásra, előadásra vagy tudományos rendezvényre saját forrásból hívtak meg: Michael Bradley (University of Umeå, Svédország), Claus Kiefer (University of Köln, Németország), David Polarski (Université Montpellier 2, Franciaország), Mariusz Dąbrowski (University of Szczecin, Lengyelország), Peter Biermann (Institut für Radioastronomie, University of Bonn, Németország), Roy Maartens (Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth, Egyesült Királyság), Salvatore Capozziello és Mariafelicia De Laurentis (Università di Napoli Federico II, Olaszország), Harko Tibor Csaba (University of Hong Kong, Kína), Néda Zoltán (Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Románia).

Hálás vagyok a 8th Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Waves (Columbia

University, New York, USA 2009), a GWADW2008 - VESF (La Biodola, Isola d'Elba, Olaszország 2008), a 394th WE-Heraeus Seminar: Cosmology of Fundamental Interactions (Bad Honnef, Németország 2007), a 3. ILIAS-GW Annual General Meeting + WG2 Meeting (Imperial College London, Egyesült Királyság 2006), a 11. Marcel Grossmann Meeting (Freie Universität Berlin, Németország 2006), az Eden in Paris: Workshop of the European Dark Energy Network (LPNHE Párizs, Franciaország 2005), az École Internationale Daniel Chalonge, 8. és 13. Paris Cosmology Colloquium (Párizs, Franciaország 2004 és 2009) rendezvények szervezőinek a részvételi költségeim teljes vagy részleges átvállalásáért. Köszönetemet fejezem ki Frei Zsoltnak (Eötvös Loránd Tudományegyetem) a 2009. január - 2011. március között pályázataiból nyújtott anyagi támogatásért, melynek segítségével a nevezett időszakban részt vehettem a LIGO Tudományos Kollaboráció gravitációs hullámok detektálásával kapcsolatos nemzetközi rendezvényein. Köszönettel tartozom a „Black Holes in a Violent Universe” EU kollaborációnak azért, hogy 2010 nyara óta rendezvényeiken való rendszeres részvételem érdekében a részvételi és utazási költségeimet teljes mértékben átvállalták.

Köszönetet szeretnék mondani számos társszerzőmnek az együtt végzett jó munkáért. Ők azok, akiknek az ünnep, a hétvége és néha az éjszaka is a fizikáról szól: Keresztes Zoltán, Horváth Zolt, Dwornik Marek, Szabó M. Gyula, Mihály András, Nagy Botond, Veréb László, Udvari Zolt, Tápai Márton, Mészáros Szabolcs, Darázs Barbara (Szeged), Mikóczy Balázs (Szeged, Budapest), Kovács Zoltán (Szeged, Heidelberg, Bonn, Hong Kong) - volt és jelenlegi tanítványaim, valamint Perjés Zoltán, Vasúth Mátyás, Fodor Gyula, Forgács Péter, Raffai Péter (Budapest), Kupi Gábor (Weizmann), Képíró Ibolya (Imperial), Harko Tibor Csaba, Man Kwong Mak, Chun Shing Jason Pun (Hong Kong), Roy Maartens, Emily Leeper (Portsmouth), Alexander Kamenshchik (Bologna, Moszkva), Vittorio Gorini, Ugo Moschella (Como, Milano), Peter L. Biermann (Bonn, Alabama, Karlsruhe), Laurențiu I. Caramete (Bonn, Bukarest), Julia K. Becker (Göteborg, Dortmund, Bochum), Athina Meli (Erlangen, Nürnberg), Todor Stanev (Newark), Vitor de Souza (São Paulo), Gopal-Krishna (Pune), Paul J. Wiita (New Jersey), David Polarski (Montpellier), David Hobill (Calgary), Narit Pidokrajt (Stockholm), Sergei Winitzki (München), Alex Curuțiu (Bonn), Ralph Engel, P. Gina Isar, Ioana C. Mariș (Karlsruhe), Heino Falcke (Nijmegen, Dwingeloo), Karl-Heinz Kampert, Oana Tașcău (Wuppertal), Christian Zier (Bangalore, Bonn), Cornelius Hoenselaers (Loughborough), Paul Tod (Oxford), Michael Bradley, Mattias Marklund (Umeå), Mitchell McKain (Salt Lake City).

Keresztes Zoltánnak, az értekezésem első figyelmes olvasójának köszönöm megjegyzéseit.

Hálás vagyok szüleimnek, amiért támogattak egyetemi tanulmányaimban. Végül, de nem utolsósorban köszönetem fejezem ki fiaimnak, Nándornak (Párizs, korábban Berkeley) és Szabolcsnak (Montpellier); valamint testvéremnek, Emilnek és családjának (Calgary) amiért annak ellenére, hogy az élet nagy földrajzi távolságokra sodort bennünket, lélekben együtt vagyunk, figyelünk egymásra és világvonalaink kisebb-nagyobb rendszerességgel találkoznak.

Bevezetés

A gravitáció jól bevált newtoni leírását azért kellett módosítani (Einstein, 1915), mert nem állt összhangban a nem sokkal korábban kidolgozott speciális relativitáselmélet egyik alap-állításával, miszerint a fény sebessége határsebesség. A newtoni elmélet szerint a gravitáció terjedési sebessége végtelen. Az általános relativitáselméletnek (ÁRE) sikerült ezt az ellentmondást feloldania, az elmélet szerint a gravitáció fénysebességgel terjedő 2-es helicitású hullámok formájában terjed, melyeknek kétféle polarizációs állapota van. Bár földi viszonyok közt általában a newtoni elmélet pontossága megfelelő¹, a Naprendszerben már az ÁRE-t szükséges használni.

Az ÁRE a gravitációt a téridő görbületeként értelmezi. A görbület két részre osztható. Az ún. Weyl-részt a távoli források hozzák létre. Ilyen görbületet követ a Föld Nap körüli pályáján. A Ricci-részt a lokálisan jelen levő (nem gravitációs eredetű) energia-impulzus hozza létre, az Einstein egyenletek szerint. Míg a Naprendszerben az ÁRE csak kis perturbációkat okoz a Kepler-mozgáshoz képest, kompakt égitestek (neutron-csillagok, fekete lyukak) kettős rendszereiben alapvetően módosítja a dinamikát és a rendszer által kibocsátott gravitációs hullámok okozta disszipatív jelleg megfigyelhetővé válik. 1974-es felfedezése óta a Hulse-Taylor pulzár (PSR 1913+16) pályaperiódusa pontosan olyan ütemben csökkent, ahogy az a rendszer által keltett gravitációs hullámok számolásából várható (Nobel díj, 1993). Később ugyanezt a disszipatív viselkedést más kettős rendszerekben található pulzárookra is igazolták. Mivel a kompakt kettős rendszerek az ÁRE nagy pontosságú igazolására képesek, tanulmányozásuk mind megfigyelési, mind elméleti oldalról igen fontos. A már eddig is ellenőrzött vezető rendű dinamikán túl, melyet lényegében a tömegek határoznak meg, a dinamika pontosabb feltérképezése az egyéb fizikai jellemzők, mind a spin és tömeg kvadrupól momentum hatásainak figyelembevételével történik.

Az ÁRE a kölcsönhatások geometrizálására tett első sikeres kísérlet. Bár szimmetria elvekhez kapcsolható elegáns matematikai leírással rendelkezik, az elektro(mágneses)-gyenge és erős kölcsönhatások lényegesen különböznek. Ezekben a kölcsönhatásokban kiemelt szerepet játszanak a kvantumos jelenségek, míg az ÁRE klasszikus elmélet. Az ÁRE a newtoninál erősebb gravitációt jósol, ami tetten érhető például a csillagok nyomásviszonyait megadó Oppenheimer-Volkoff egyenletben is. Az erősebb gravitáció singularitásokhoz vezet mind az Univerzum múltjában, mind a gravitációs kollapszusban. A

¹Fontos kivétel a Global Positioning System (GPS), ami az ÁRE figyelembevétele nélkül igen hamar használhatatlanul pontatlanná válna.

szingularitások környékén, az Ősrobbanást követő időszakban, valamint a fekete lyukak belsejében összeomló anyagban a kvantumos hatásokat is figyelembe kell venni, ezek leírására egy új, kvantumgravitációs elmélet megalkotására lesz szükség. Egy ilyen elméletben megállapítást nyerhet, hogy valóban keletkeznek-e görbületi szingularitások erős gravitáció jelenlétében, valamint, hogy hátramarad-e bármi a fekete lyukak Hawking szétsugárzása nyomán.

A próbálkozások között meg kell említeni a twistor-elméletet (azonban ez a sík téridő tárgyalásán lényegében nem jut túl); a kvantumtérelméletek görbült téridőn való tárgyalását (a kvantumtérelméletek olyan általánosítása, mely a gravitációt továbbra is klasszikus háttérként, görbületként kezeli), a geometrodinamikát (a geometria hamiltoni leírásának kanonikus kvantálását), a loop-quantumgravitációt (megnövelt fázistérbe átvitt, a Yang-Mills elméletekkel bizonyos formális rokonságot felmutató gravitációelmélet kvantálási kísérlete) és a húrelmélet / M-elméletet. Utóbbi szerint világunk 10 / 11 dimenziós, a 3 kiterjedt térszerű és az idő-dimenzió kivételével a többi dimenzió Calabi-Yau kompakt sokaságként váltja fel a klasszikus téridő-pont fogalmát. Utóbbi elméletek szépséghibája, hogy ritkán vezetnek ellenőrizhető jóslatokhoz.

A húrelméletnek létezik egy olyan módosulása, mely a szokásos 3+1 dimenzió mellett megenged egy ötödik nem-kompakt dimenziót is. Ezen brán-világokként ismert elmélet különböző változataiban a szuperszimmetria nem követelmény és megfigyelhető jóslatok származtathatók, ezek összevetése a megfigyelésekkel mindenképpen tanulságos. A brán-elméletek az ÁRE-hez hasonlóan klasszikus (nem kvantált) elméletek, melyekben a 3+1 dimenziós világunk (a brán) membránhoz hasonlóan helyezkedik el az 5-dimenziós (5D) sokaságban. A bránt köznapi fogalmainkhoz mérten elképesztő nagyságú feszültség tartja össze, és a standard modell mezői (így a fény is) kizárólag a bránon terjednek. Egyedül a gravitáció terjedhet az ötödik dimenzióban. Ennek következményeként a tömeg nélküli gravitonok mellett tömeges Kaluza-Klein módusok is jelen lesznek a bránon. A brán-elméleteknek több változata ismert, kozmológiai és asztrofizikai jóslataik ezidáig ugyanolyan jól illeszthetők a megfigyelésekhez, mint az ÁRE jóslatai.

Míg a Naprendszer léptékén az ÁRE kiválónak bizonyul, galaktikus léptéken csak meglehetősen sok, a barionikus anyagnak mintegy tízszeresét kitevő azonosítatlan sötét anyag bevezetése mellett érvényes, mint ahogy azt a galaktikus forgásgörbék, a galaxisok gravitációs lencsézése és a galaxishalmazok dinamikája mutatja. Még nagyobb, Univerzum-léptékű dinamika megfigyelésekkel való összevetése azt sugallja, hogy az ÁRE érvényben tartásához a sötét anyag hozzávetőleg kétszeresét kitevő sötét energiára is szükség van. Jogos a kérdés, hogy a sötét anyag / energia nem váltható-e ki az ÁRE nagy léptéken érvényes megváltoztatásával? Több ilyen javaslat is felmerült, közös jellegzetességük, hogy legalább egy új távolságskálát tartalmaznak. Ilyen a brán-elmélet is. Bár továbbra is szükségessé teszi az univerzum gyorsuló tágulását magyarázó sötét energia bevezetését, a kutatások eddigi állása szerint a sötét anyag alternatív magyarázataként jól megállja a helyét.

Az értekezés első része a kompakt kettős rendszerek dinamikájának tanulmányozásában elért eredményeim egy részét ismerteti. Valamennyi eredmény az asztrofizikai (csil-

lagméretű) és szupernehéz (szupernagy tömegű, galaxisok közepén elhelyezkedő) fekete lyukak esetében igen jelentős saját tengely körüli forgással (spin), valamint a forgásból származó lapultsággal (tömeg kvadrupól) kapcsolatos. A kompakt kettős egymásba spirálizása 10^3 és (néhány) Schwarzschild sugárnyi szeparációk között rendkívül pontosan tárgyalható a posztnewtoni (PN) sorfejtés keretén belül². A spin-pálya csatolás járuléka a másfeles PN rendben, míg a spin-spin és a kvadrupól-monopól járulékok a második PN rendben jelennek meg. Hatásukra a Naprendszerből jól ismert periasztron-precesszió mellett a spinek precessziója és a mozgás síkjának kvázi-precessziója következik be. A dinamika tárgyalását a mozgás 2PN rendig érvényes részének bemutatásával és elemzésével kezdem [1], [2] munkáim nyomán, majd a gravitációs sugárzás által a rendszerből kivont energia spin és kvadrupól járulékeinak számolását ismertetem [3], [4], [5] eredményeinek felhasználásával (az említett munkákban az impulzusmomentum nagyságának és egyéb szögváltozóknak a veszteségeit is megadtam). Végül megmutatom, hogy szupernehéz fekete lyukak összeolvadásakor a spin-pálya csatolás és a gravitációs sugárzás kombinált hatására a domináns spin, és vele együtt a nagyenergiájú részecskékből álló, rádió-tartományban észlelhető nyalábok új irányba fordulnak [6], [7]. A jelenség magyarázatot ad az X-alakú rádiógalaxisok (XRG) jelentős részének kialakulására.

Az értekezés második része a brán-elméletekről szól, melyeknek több változata ismert. Ezek közül a Randall és Sundrum által bevezetett egyetlen bránt tartalmazó modell (második Randall-Sundrum modell) olyan általánosításait vizsgálom, melyekben mind a brán, mind az 5D téridő tetszőleges görbülettel rendelkezik, így teret ad az ÁRE ismert megoldásainak általánosítására, jóslatainak megismétlésére, ellenőrzésére. Megadom a dinamikát a lehető legáltalánosabb alakban, megengedve a brán beágyazásának tetszőleges (nem tükkörszimmetrikus) jellegét [8]; és a brán-feszültség időbeli változását [9]. Az értekezésben kidolgozom a brán-elmélet kovariáns dinamikáját az említett általánosítások mellett, majd a kozmológiai következményeket elemzem. A brán-feszültség változására alkalmazva a folyadék membránok feszültségének hőmérséklet-függését jellemző Eötvös törvényt, a megfigyelésekkel összhangban álló egyszerű kozmológiai modellt dolgozok ki [10]. Megvizsgálom az aszimmetrikus beágyazás hatását az energiát sugárzó brán esetében [11]. Sztatikus, ún. Einstein-bránt vezetek be [12] (valamint ennek homogén párját [13]). Bebizonyítom, hogy az Einstein-brán sérti a brán-elméletben általánosan elfogadott unicitás-tételt, miszerint az összes kozmológiai brán vákuum Anti de Sitter téridőbe ágyazható. Vizsgálom a gravitációs kollapszust a bránon [14]; a bránon gömbszimmetrikus belső és külső csillagmegoldások illeszthetőségét [15], [16]; valamint az árapálytöltésű brán fekete lyuk által okozott fényelhajlást [17], és termodinamikai jellegzetességeit. A gravitációs hullámok sugárzási hatékonyságára vonatkozó termodinamikai korlát segítségével korlátozom az árapálytöltés lehetséges értéktartományát [18].

A két rész mindegyike a témakörbe való tömör bevezetéssel kezdődik, majd az önálló kutatási eredményeim ismertetésével folytatódik, végül összefoglaló résszel zárul. Terje-

²A 10^3 Schwarzschild sugár felett a gravitációs sugárzásnál erősebb más disszipatív effektusokat is figyelembe kell venni, így az ún. dinamikai surlódást.

delmi és konzisztencia okokból nem térek ki az értekezésben az egyéb, gravitációelmélettel kapcsolatos munkáimra: az Einstein egyenlet új kozmológiai [19], csupasz szingularitást [20], valamint féreglyukat [21] megadó, 2 sugárzási komponenst tartalmazó megoldásaira; téridők perturbatív szerkezetének vizsgálatára [22]; téridő-tartományok illesztésére [23], [24]; a sötét energia modelleket tárgyaló [25], [26], [27]; illetve a kényszeres dinamikai rendszerekkel kapcsolatos [28], [29], [30]; valamint geometrodinamikai [31], [32], [33] kutatásaimra. Ugyancsak nem részletezem az (első kvantum korrekcióként értelmezett) ún. indukált gravitációt vizsgáló brán-elméleti munkámat [34], valamint az összes olyan, az értekezésben ismertetett kutatási területeken végzett munkát sem, melyet tanítványaim, munkatársaim PhD értekezésük megszerzéséhez felhasználtak vagy a jövőben várhatóan felhasználnak.

Az értekezés a kandidátusi fokozat megszerzését követően, 1998-2011 között publikált 58 angol nyelvű referált cikkem eredményeire épít (össz-impakt faktoruk 257). Ezek közül 18 angol nyelvű referált cikk (11 egy szerzős; 5 nemzetközi kollaborációban született; kettőt tanítványaimmal együttműködésben írtam) tartalmazza a tézispontokban felsorolt eredményeket.

I. rész

Gravitációsan sugárzó kompakt kettősök

dc_223_11

1. fejezet

Bevezetés a kompakt, spines kettős rendszerek dinamikájába

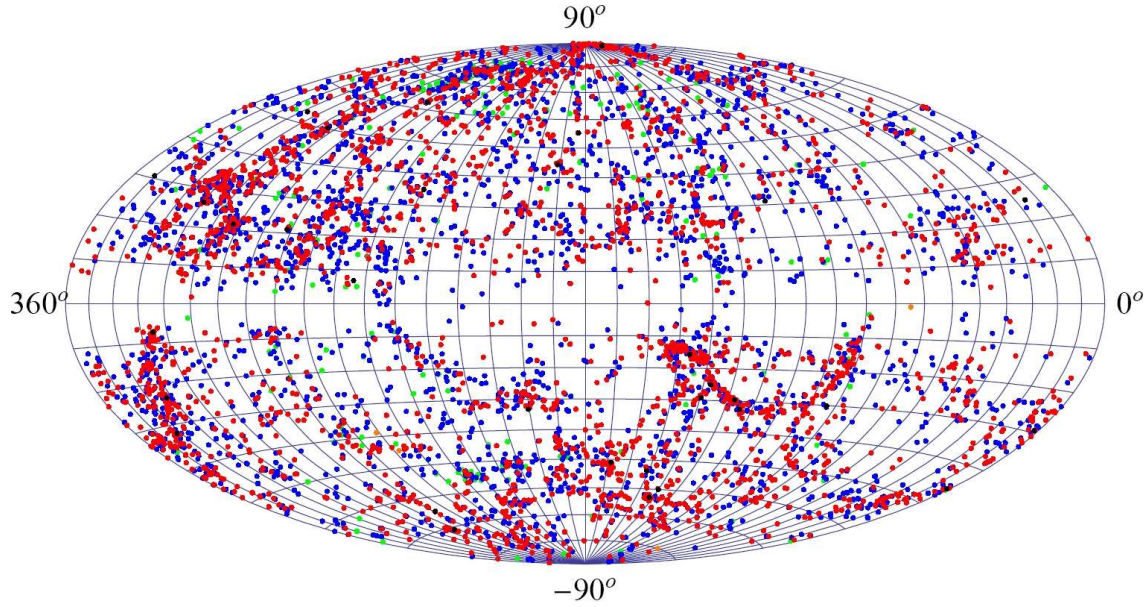
Az m_i tömegű kompakt égitest R_i sugara definíció szerint összemérhető Gm_i/c^2 gravitációs sugarával. (Ezzel szemben a közönséges égitestek esetén $R_i \gg Gm_i/c^2$.) Ilyen kompakt égitestek a néhány naptömegű ($M_\odot$) neutroncsillagok ($\approx 1.4 M_\odot$) vagy fekete lyukak (nagyságrendileg $10 M_\odot$), melyek a csillagfejlődés végállapotaként keletkeznek, míg az ennél jóval nagyobb tömegű szupernehéz fekete lyukakat az akkréciós és összeolvadási fázisok egymást váltó sorozata alakítja ki a kozmológiai fejlődés során [35].

A szupernehéz fekete lyukak (supermassive black hole, SMBH) a galaxisok központjában találhatók, tömegük $3 \times 10^6 \div 3 \times 10^9 M_\odot$ tartományba esik. A 1.1 ábrán az égbolt térképe látható a közeli szupernehéz fekete lyuk-eloszlással. Látható, hogy a szupernehéz fekete lyukak jelentős része a $10^7 \div 10^8 M_\odot$ és a $10^8 \div 10^9 M_\odot$ tartományokban található, így a mi galaxisunk központjában található $3 \times 10^6 M_\odot$ fekete lyuk kicsinek számít.

Nyitott kérdés, hogy közepes tömegű fekete lyukak (intermediate mass black hole, IMBH) léteznek-e. A rendkívül kevés erre utaló megfigyelések egyike az az $500 M_\odot$ -nél nagyobb tömegű Röntgen-sugárzás forrás az ESO 243-49 galaxisban, melyet közepes tömegű fekete lyukként értelmeztek [36]. Egy javaslat szerint közepes tömegű fekete lyukakat közepes koncentrációjú King modellekkel jellemezhető gömbhalmazokban érdemes keresni [37]. Az ultrafényes Röntgen-források rádió tartománybeli megfelelői után kutatva az Európai Nagyon Hosszú Alapvonalú Interferometria (Very Long Baseline Interferometry, VLBI) Hálózat (EVN) megfigyelései felhasználásával, 3 darab millisec nagyságú struktúrát találtak, melyek közül az ULX N4088-X1 és az ULX N4861-X2 kompakt rádió emissziójuk miatt közepes tömegű fekete lyuk jelölt, mindkettő $10^5 M_\odot$ tömegű és Eddington luminozitás alatti akkréció jellemzi őket (a harmadik, N4449- X1 forrás szupernóva maradvány) [38].

A szupernehéz fekete lyukak tömege és spinje több közvetett módszerrel is meghatározható.

i) A galaxisunk központjában található fekete lyuk spin és kvadrupól-momentuma származtatható a milliparszek távolságban keringő csillagok asztrometriai megfigyeléséből [39].



1.1. ábra. Az égbolt galaktikus koordináták Aitoff projekciójában feltüntetett térképén 5.895 NED katalógusbeli szupernehéz fekete lyuk jelölt látható [7]. A narancs, zöld, kék, vörös, fekete pontok a $10^5 M_\odot$, $10^6 M_\odot$, $10^7 M_\odot$, $10^8 M_\odot$ által kijelölt tömegtartományok között elhelyezkedő, illetve $10^9 M_\odot$ -nél nehezebb forrásokat jelölik. A $10^6 M_\odot$ -nél könnyebb kompakt csillag-klaszterek kivételével a többi forrás fekete lyuk. Látható, hogy a szupernehéz fekete lyukak jelentős része a $10^7 \div 10^8 M_\odot$ és a $10^8 \div 10^9 M_\odot$ tartományokban található [7].

ii) Az optikai / Röntgen-spektrumban megfigyelt vonalakból (erősen gerjesztett Mg, O, C) az ún. reverberációs leképezéssel meghatározható a Széles Vonal Tartomány (Broad Line Region) sugara és sebességmintázata, mindkettő a geometria függvénye. Ezzel a módszerrel megbecsülhető a fekete lyuk tömege, spinje, valamint ennek iránya is [40].

iii) A VLBI segítségével elvben meghatározható a SgrA* (a galaxisunk központi fekete lyukának megfelelő rádióforrás) és az M87 (más néven Virgo A, NGC 4486, egy óriási elliptikus galaxis, aktív galaxismaggal, mely a spektrum valamennyi tartományában sugároz, különösen rádiótartományban) központi fekete lyukait jellemző horizontok alakja, mely szintén a spin függvénye [41].

iv) Az aktív galaxismagok által kilövellt nyalábok alapjának szélességét a Blandford-Znajek effektus határozza meg, mely szintén összefügg a spinnel [42]. Az M87 megfigyelései pl. kis nyaláb-alap átmérőt adtak, ezt a fekete lyuk gyors forgásával magyarázzák [43].

v) A nyalábok energikus elektron-spektrumának kisenergiás levágása, melyre a rádió-spektrumból következtetnek [44], megfelelően magyarázható a proton-proton ütközések nyomán keletkező pion-bomlással [45]. Ez a mechanizmus relativisztikus hőmérsékletet feltételez a nyaláb alapjának szomszédságában, az akkréciós korongban, mely a fekete lyuk igen gyors forgásával áll kapcsolatban [46].

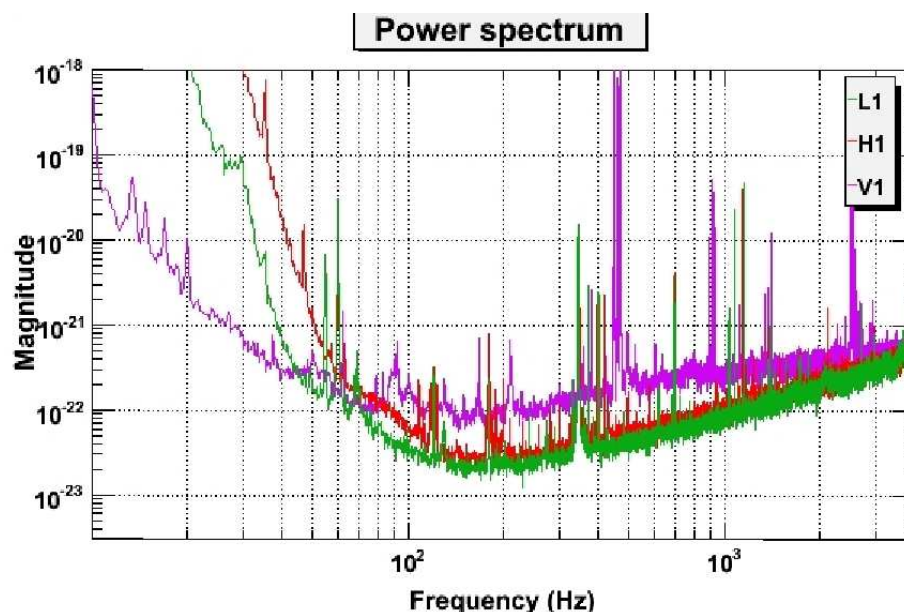
Összefoglalásképp, a megfigyelések alátámasztják azt a lehetőséget, hogy a természet-

ben előforduló fekete lyukak igen gyorsan forognak, vagyis spinjük, és következésképp a forgás miatt bekövetkező centrifugális ellaposodásuk, melyet a tömeg kvadrupól-momentum fejez ki, egyaránt jelentős.

Akár a csillagok, a kompakt objektumok is várhatóan nagy számban fordulnak elő kettős rendszerekben, melyek kettős csillagrendszerek fejlődése során, befogási események, vagy galaxisok összeolvadása során keletkeznek. Az ÁRE szerint (a rendszer időben nem-lineárisan változó kvadrupól-momentuma miatt) a kompakt kettősök gravitációs sugárzást bocsátanak ki. Fejlődésük így disszipatív válik, ami végül összeolvadásukhoz vezet.

A csillagtömegű kompakt kettősök a Föld felszínén megépített, interferometrikus alapon működő Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory (LIGO) és Virgo [47] gravitációs sugárzás detektorok legjelentősebb forrásai közé sorolhatók, míg a szupernehéz fekete lyuk-kettősök által keltett gravitációs hullámok kimutatására a sokszor áttervezett Laser Interferometer Space Antenna (LISA) űrteleszkóp [48] lesz alkalmas (legalábbis a szupernehéz fekete lyukak alsó tömegtartományában). A közepes tömegű fekete lyuk kettősök asztrofizikus közösségben megkérdőjelezett létezésének kérdésére a tervezett harmadik generációs Einstein Teleszkóp [49] adhat végső választ.

A gravitációs hullámok földi körülmények között történő mérése igen nehéz feladat. Az első generációs detektorok közül az egyenként 4km karhosszúságú két LIGO berendezés egyértelműen érzékenyebb a 3km karhosszúságú VIRGO-nál (1.2 ábra).



1.2. ábra. A detektorok (H1=Hanford LIGO, L1=Livingston LIGO, V1=VIRGO) mérési tartományában mutatott érzékenységet az ún. zajgörbe mutatja. [Saját felvétel; készült a LIGO Livingston detektor irányítóhelységében, 2009 őszén.]

A 1.3 ábrán a következőket szemléltetem: (a) a LIGO és VIRGO detektorok (neutron csillag kettős forrásokra számolt) hatótávolságát (2009-es állapot), és (b) kiszolgáltatottságukat a természeti zavaroknak. Látható, hogy a LIGO detektorok kétszer olyan távolra „látnak el”, mint a VIRGO, azaz nyolcszor nagyobb térfogathoz gyűjtik a jeleket (1.3a

ábra). A jelenlegi detektorok viszont rendkívüli módon érzékenyek a természeti és ember okozta zavarokra, mint az akár távoli földrengések, a tenger hullámozása a Mexikói-öbölben, vihar Alaszkában, néhány km-re elhaladó vonat stb. (1.3b ábra). Ez nem meglepő, tekintve, hogy a detektorok érzékenysége a 10^{-22} értéket is meghaladja. A 2010 őszen elkezdődött Advanced LIGO és VIRGO átépítések többek között éppen a szeizmikus izolációt javítják majd jelentősen, ezzel mintegy nagyságrenddel növelve meg a detektorok érzékenységét. A várakozások szerint az átépített detektorok napi szinten észlelnek majd gravitációs hullámokat, így már nem a gravitációs hullámok kimutatása, hanem a források helyzetének és asztrofizikai jellemzőinek (tömeg, spin, kvadrupól-momentum) az észlelésekből való kikövetkeztetése jelent majd tudományos kihívást. A gravitációs hullámok és az elektromágneses tartományban végzett megfigyelések együttes elemzése várhatóan jelentősen növeli majd az univerzummal kapcsolatos tudásunkat.

A kompakt kettős rendszerben az összeolvadási folyamat három egymást követő szakaszra bontható. A *bespirálozás* (inspiral) definíció szerint az a dinamikai tartomány, melyet a PN sorfejtés segítségével jellemezhetünk, és melyben a vezető rendű disszipatív folyamat a gravitációs sugárzás. A PN paraméter mind a gravitáció gyenge jellegének, mind a mozgás nem speciális-relativisztikus jellegének mértéke:

$$\varepsilon = \frac{Gm}{c^2 r} \approx \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (1.1)$$

Itt $m \equiv m_1 + m_2$ a teljes tömeg, r és v a kettős rendszer szeparációja és relatív sebessége. Definíciójából látható, hogy a PN paraméter a bespirálozás során növekszik, a távolsággal fordítottan, a sebességgel négyzetesen.

Az Einstein egyenletek (harmonikus mértékválasztás mellett) sík téridőben érvényes hullámegyenlethez vezetnek, mely a kiválasztott pont múltirányú kúpján vett retardált integrálként véges, az eljárásból következően konvergens megoldást ad a gravitációs sugárzás tetszőleges PN rendben való meghatározására [50]. A PN hullámformák Cauchy konvergenciájának tanulmányozása oszcilláló viselkedést mutat: a PN rend növelése nem szükségszerűen vezet pontosabb hullámformához [51]. Érdekes módon például a 2PN hullámformák jobb egyezést adnak a numerikus eredményekkel, mind a 2,5 PN pontosságú hullámformák. A különböző PN közelítések (adiabatikus Taylor, Padé modellek, nem adiabatus effektív egytest modellek) numerikus eredményekhez való konvergenciájában nincs számottevő különbség [52]. Ismert az is, hogy az eltolt Chebyshev polinom-bázison vett hullámformák valamivel gyorsabb Cauchy konvergenciát mutatnak, mint a hagyományos PN hullámformák [53]. A konvergenciával kapcsolatos elméleti vizsgálódásokon túl az általános relativisztikus numerikus futtatások eredményei megerősítik, hogy a harmadik PN rendű pontosság a gyakorlati kérdések megválaszolásához elégséges.

A szupernehéz fekete lyukak kettős rendszerének tagjaira a galaxisok összeolvadása során a másik galaxis csillagpopulációjával való kölcsönhatásból származóan ún. dinamikai sűrűlódás hat, nagy szeparációnál ez jelenti a vezető rendű disszipatív hatást. A gravitációs sugárzás a dinamikai sűrűlódást mintegy $\varepsilon_{in} = 10^{-3}$ értéknél haladja meg [6] és a PN sorfejtésnek addig van értelme, míg a paraméter kicsi, vagyis a bespirálozás vége

$\varepsilon_{fin} = 10^{-1}$ környékén található (a pontos érték valamivel nagyobb, a spintől függ). ε_{fin} fölött a PN leírás egyre pontatlanabbá válik.

A bespirálózást követő *bezuhanás* (plunge vagy merger) szakaszában a dinamika csupán általános relativisztikus numerikus fejlesztéssel követhető nyomon. Alternatívát jelent a PN vagy az effektív egytest képletek olyan használata, melyben az együtthatókat numerikus futtatások segítségével kalibrálják [54]; vagy egyszerűbb, fenomenologikus képletek használata, melyben az együtthatókat ismét csak numerikus eredmények segítségével állítják be [55]. A bezuhanás hossza egyetlen körfordulás törtrésze és néhány körfordulás között változhat, a konfigurációs és fizikai paraméterek függvényében.

Végül következik a *lecsengés* (ringdown) szakasza, melynek során az egyesülésből képződött új fekete lyuk összes fizikai jellemzőjét a fekete lyuk unicitás-tételek által megengedett tömeg, impulzusmomentum, és esetleges elektromos töltés kivételével szétsugározza. A fekete lyukak kvázinormál módusainak korszerű összefoglalója [56] forrásban található meg.

A következőkben az analitikusan jól kezelhető bespirálózás korszakra koncentrálok. A kompakt spines kettős rendszerek fejlődése 2PN pontosságig konzervatív jellegű. Az általános relativisztikus hatások mellett, melyek a PN és a 2PN járulékokban jelennek meg, ebben a pontosságban a vezető rendű spin-pálya (spin-orbit, SO), spin-spin (SS) és tömeg kvadrupól - tömeg monopól (QM) korrekciókat is figyelembe kell venni. Az így előálló mozgás általában nem kör, illetve nem gömbön futó pályákat eredményez. A nevezett járulékok által okozott precessziókat elsőként [57]-[58] cikkekben tárgyalták. A spinek és kvadrupól-momentumok miatt a konfigurációs tér igencsak megnövekszik, ezért fontos célom volt a *minimális és alkalmasan választott független változók* meghatározása [1]. Bár a szögváltozók egy része már a [59]-[61] cikkekben is szerepel, a független változók bevezetése új eredmény. Meghatároztam a független változókra vonatkozó *elsőrendű közönséges differenciálegyenletek csatolt rendszerét*, mely konzervatív fejlődésüket jellemzi [2].

A dinamika 2,5 PN rendben disszipatívva válik, a vezető rendű gravitációs sugárzás megjelenésével. Az SO csatolással kapcsolatos különböző konzervatív és disszipatív dinamikai eredmények [62]-[67] cikkekben, az SS csatolásé a [3], [4], [67]-[69], a QM csatolásé a [5], [70]-[71] cikkekben olvashatók. A radiális mozgás megoldását a Newton-Wigner-Pryce spinfeltétel [72] mellett, az összes említett korrekció figyelembevételével a [73] munkában írtuk fel. Az SO csatolás első PN korrekcióját [74] cikkekben tárgyalták. Számos eredményt értek el a spines kettősök hamiltoni tárgyalásában is [75]. Vizsgálták a gravitációs hullámok által a rendszerből aszimmetrikusan elvitt impulzus miatt bekövetkező kilökődés lehetőségét, mind analitikusan [67], [76], mind numerikusan, különböző spin konfigurációk esetén [77]-[78].

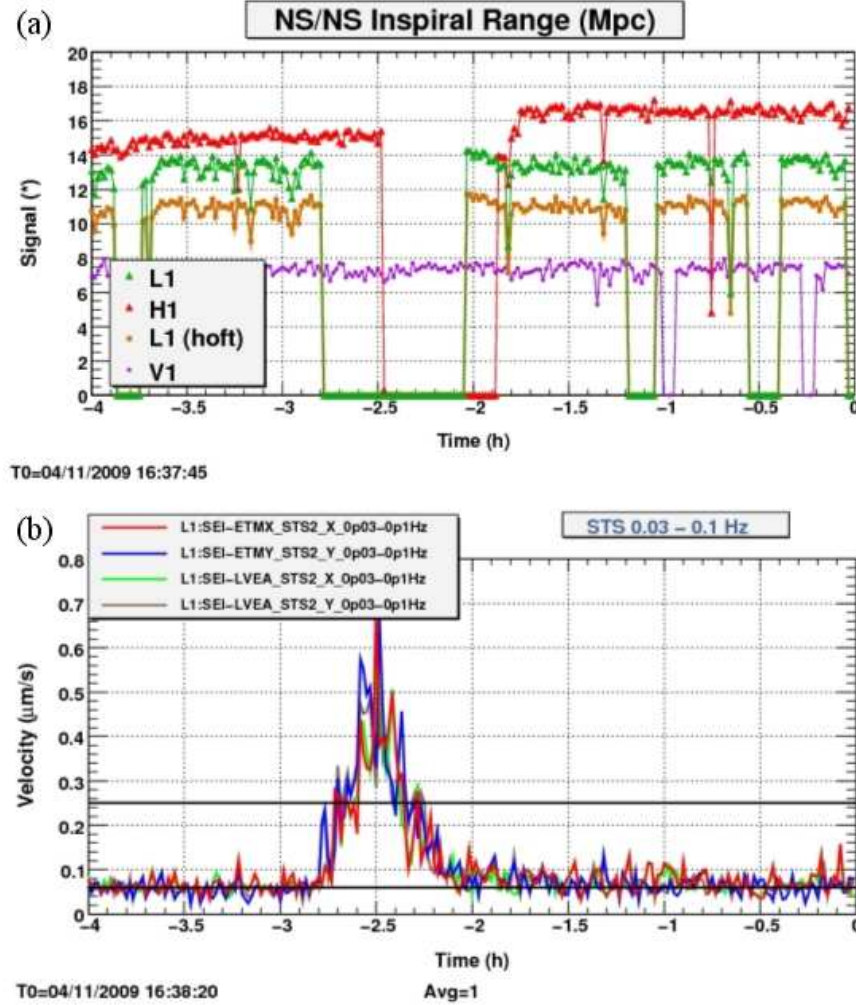
A végső spin meghatározására PN ihletésű empirikus képleteket írtak fel, melyben az együtthatókat numerikus futtatások eredményeiből állították be [79]. Egzotikus, lóhere alakú zoom-whirl pályákat (Kerr fekete lyukak esetén ilyenek korábban is ismertek voltak [80]) találtak a PN formalizmuson belül [81]. Ezeken a pályákon egy megnyúlt ellipszis jellegű pálya-szakaszt (zoom) egy vagy több (akár nagyon sok), az ellipszis periasztronával összemérhető sugarú körfordulás követ (whirl), majd újabb ellipszis jellegű pályaszakaszon

való eltávolodás következik. Kimutatták, hogy a spinek növekedésével a zoom-whirl típusú pályák egyre valószínűbbé válnak [82].

A gravitációs sugárzást kapcsolatba hozták az ún. spin-átfordulás (spin-flip) jelenséggel is. A jelenség során a spin iránya drasztikusan megváltozik [83]-[84], kvalitatív magyarázatot adva az XRG-k kialakulására [83], [85]-[87]. Az utóbbi eredménnyel kapcsolatosan megmutattam, hogy a korábbi egyenlő tömegekre vonatkozó numerikus eredményekkel ellentétben, melyek szerint a spin átfordulása a bezuhanás szakasza alatt történik, a $\nu = m_2/m_1 = 0.03 \div 0.3$ tipikusnak mondható tömegarányok esetén az SO precesszió és gravitációs sugárzás kombinált hatása még a bespirálozás szakaszában jelentős spin átforduláshoz vezet [6], [7].

Az értekezés kompakt spines kettősökre vonatkozó első részének felépítése a következő. A 2. fejezetben a független változókat és dinamikájukat tárgyalom, [1] és [2] munkáim nyomán. A 3. fejezetben SS és QM eredetű szekuláris (egy radiális periódusra átlagolt) gravitációs sugárzási veszteségeket ismertetek, a [3], [4] és [5] munkáim nyomán. A 4. fejezetben az SO precesszió és a vezető rendű gravitációs sugárzás hatására még a bespirálozás alatt bekövetkező spin-átfordulás jelenséget tárgyalom, [6] és [7] munkáink nyomán, és kapcsolatba hozom a jelenséget az X-alakú rádiógalaxisokra vonatkozó megfigyelésekkel. Végül a 5. fejezetben összefoglalom a fő saját eredményeket és megadom a kompakt kettős rendszerekkel kapcsolatos tézispontokat.

A G gravitációs állandót és a c fénysebességet az első részben szereplő kifejezésekben mindvégig megtartom. Tetszőleges $\mathbf{V}$ vektor euklideszi hosszát V , irányát $\hat{\mathbf{V}}$ jelöli.



1.3. ábra. (a) A jelenleg működő detektorok neutron csillag kettősökre számolt hatótávolsága. A LIGO detektorok (L1, H1) hozzávetőleg kétszer olyan távolra "látnak el", mint a VIRGO detektor (V1), azaz nyolcszor nagyobb térfogatból gyűjtik a jeleket. Látható, hogy a felvétel időpontjában a Hanford-i detektor a legérzékenyebb, szemben az 1.2 ábrán látható sorrenddel, mely eltérő időpontban készült. (b) Costa-Rica-i Richter skálán mért 4.9-es erősségű (azaz gyenge) földrengés miatt a Livingston-i (Luisiana, USA) LIGO helyszínen megnövekvő szeizmikus zaj-szint. At (a) ábrán látható, hogy a zaj hatására a detektor több mint fél órára leáll. Amikor a szeizmikus zaj megérkezik a Hanford-i (Washington, USA) LIGO helyszínre, az oda telepített második detektor hasonlóan viselkedik. [Saját felvétel; készült a LIGO Livingston detektor irányítóhelységében, 2009 őszen.]

dc_223_11

2. fejezet

Konzervatív dinamika

A 2.1 alfejezetben a kompakt spines kettős rendszer konfigurációs és dinamikai változóit tárgyalom. Mind a konfigurációs, mind a dinamikai változók jelentős része a választott vonatkoztatási rendszer függvényei. Tárgyalásomban 4 ilyen rendszert vizsgálok, melyeket 2.1.2-ben vezetek be. Ezek közül csupán az egyik inerciális, a többi a kettős rendszer konfigurációjához adaptált. 2.1.3-ban két összefüggést vezetek le, melyek eredményeképp az összes konfigurációs szögváltozó fejlődését meghatározza egyetlen α konfigurációs változó és a χ_p valódi anomália fejlődése. Az alfejezet végén a helyzet és sebességvektorokat adom meg a választott rendszerekben. Az eljárás során visszanyerem a radiális fejlődés perturbált Kepler mozgásra érvényes valódi anomália paraméterezését.

A 2.2 alfejezet a spineket és pálya-impulzusmomentumot jellemző szögeket tárgyalja. Megmutatom, hogy a rendszer belső szabadsági fokait jellemző szükséges független változók száma 6. Ezek vagy 5 szög és egy hosszlépték, vagy 3 szög és 3 hosszléptékként választhatók meg. A független változók közül a hosszúság jellegűek (a teljes impulzusmomentum J nagysága és a dimenziótlan spinek χ_i nagyságai) mozgásállandók, mivel egyrészt a teljes $\mathbf{J}$ impulzusmomentum 2PN pontosságig megmaradó mennyiség [62], másrészt a spinek precessziós mozgást végeznek [57]-[58].

A 2.3 alfejezetben a spinek konzervatív fejlődését elemzem, a vezető rendű SO, SS és QM járulékok figyelembevételével, figyelemmel kísérve mind a járulékok PN rendjét, mind a tömegaránytól való függésüket. Ezt követően megvizsgálom, vannak-e a precessziók által megőrzött konfigurációk.

Bár jól ismert, hogy az ÁRE a gravitációs erőt görbülettel helyettesíti, a bespirálozás során a kompakt kettős mozgása perturbált Kepler mozgásként fogható fel, ahol a perturbációkat az ÁRE és a newtoni elmélet jóslatainak különbsége adja. Így alkalmazható az égi mechanika terminológiája és az ÁRE által okozott módosulásokat perturbáló erőnek tekinthetjük. A PN, 2PN, SO, SS és QM hatások által okozott perturbáló erő komponenseket a 2.4 alfejezetben adom meg az $\mathbf{L}_N$ newtoni pálya-impulzusmomentum, valamint a (periasztronba mutató) $\mathbf{A}_N$ Laplace-Runge-Lenz vektorhoz adaptált bázisban.

A továbbiakban a *szögváltozók* dinamikáját követem nyomon. Tetszőleges perturbáló erő hatását figyelembe vevő fejlődésegyenleteket adok meg a 2.5 alfejezetben. Elsőként a kepleri dinamikai állandók fejlődését vezetem le. Ezt követően az oszkuláló (a pillanat-

nyi mozgáshoz illeszthető) ellipszis (a_r, e_r) félnagytenyely és excentricitás paramétereinek fejlődését, majd az $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$, az $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}}$, valamint a felszálló csomót jellemző $\hat{\mathbf{I}}$ vektorok fejlődését tárgyalom. Meghatározom továbbá (az $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}}$ -tól a redukált tömegű részecske $\hat{\mathbf{r}}$ helyzete között mért) χ_p valódi anomália paraméter evolúciójának perturbáló erő hatására bekövetkező változását.

Ezen eredmények felhasználásával az 2.6 alfejezetben levezetem a teljes- és pályaimpulzuszmomentumok közti α szög evolúcióját, majd az $\hat{\mathbf{I}}$ és $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}}$ közti ψ_p és az $\hat{\mathbf{I}}$ -től egy tetszőleges $\hat{\mathbf{x}}$ ($\mathbf{J}$ -re merőleges) inerciatengelyig mért $-\phi_n$ szögét (lásd az 2.1 ábrát). Ezzel az *Euler-szögek* fejlődése meghatározottá válik.

A 2.7 alfejezetben a spinek és $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ közti κ_i , az $\hat{\mathbf{S}}_1$ and $\hat{\mathbf{S}}_2$ spin-irányok közti γ , majd a spinek ψ_i azimutális szögeinek fejlődését vezetem le, teljessé téve a független változók fejlődését megadó egyenletrendszer.

A 2.8 alfejezetben speciális spin-konfigurációk fejlődés-egyenletekkel való kompatibilitását vizsgálom, végül a 2.9 alfejezetben összefoglalom a fejezet eredményeit.

2.1. Kinematikai és dinamikai változók

2.1.1. A változók

Három, egymástól jól elkülöníthető változó-családot használlok:

(a) *A kompakt kettős fizikai paramétereit*: A két kompakt objektumot az m_i ($i = 1, 2$) tömegek, az $\mathbf{S}_i$ spinek, valamint a tömeg kvadrupól momentumok jellemzik.

Az m_i tömegek helyett az $m \equiv m_1 + m_2$ teljes és a $\mu \equiv m_1 m_2 / m$ redukált tömegeket is használhatjuk. Felteszem, hogy $m_1 \geq m_2$. Úgyszintén bevezetem a $\nu \equiv m_2 / m_1 \leq 1$ tömegarányt, valamint az $\eta \equiv \mu / m \in [0, 1/4]$ szimmetrikus tömegarányt. A kétféle tömegarány kapcsolata:

$$\eta = \frac{\nu}{(1 + \nu)^2}, \quad (2.1)$$

ami kis ν esetén $\eta = \nu - 2\nu^2 + O(\nu^3)$ összefüggéssel közelíthető. Megadom az alábbi hasznos összefüggéseket is:

$$m_i^2 = m^2 \eta \nu^{2i-3}. \quad (2.2)$$

Az $\mathbf{S}_i$ spinek nagyságukkal, valamint polár- és azimutális szögeikkel jellemezhetők. A spinek nagysága a $\chi_i \in [0, 1]$ dimenziótlan spinek segítségével kifejezve:

$$S_i = \frac{G}{c} m_i^2 \chi_i = \frac{G}{c} m^2 \eta \nu^{2i-3} \chi_i. \quad (2.3)$$

A spinek szögei természetesen a választott referencia rendszertől függenek, amint azt a 2.2 alfejezetben tárgyalni fogom.

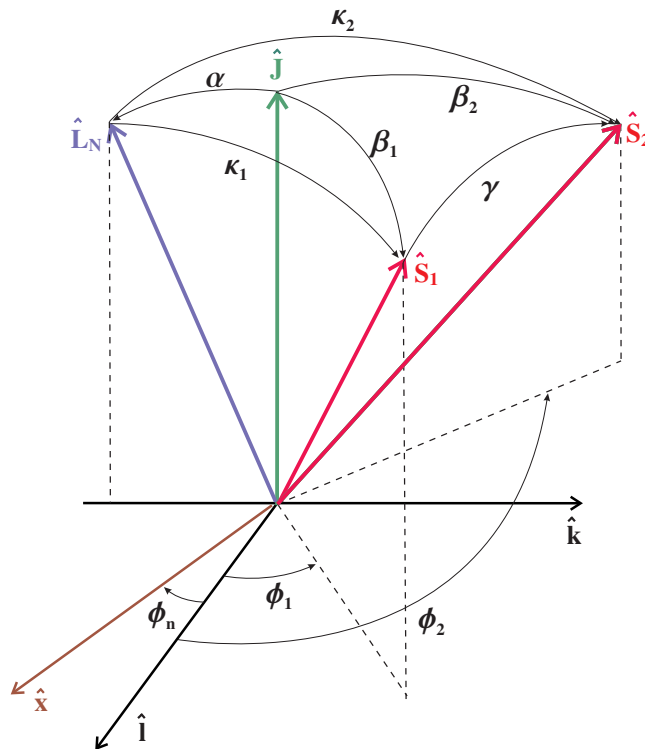
Tengelyszimmetrikus kompakt objektumokat tekintve, az i . tengelyszimmetrikus komponens gömbszimmetriától való eltérését egyetlen Q_i mennyiség, a kvadrupól-momentum skalár jellemzi [70]. Amennyiben a kvadrupól-momentum teljességgel a forgás kövekménye (ezt felteszem a következőkben), akkor a szimmetriatengely $\hat{\mathbf{S}}_i$, valamint

$$Q_i = -\frac{G^2}{c^4} w \chi_i^2 m_i^3 = -\frac{G^2}{c^4} w_i m^2 \eta \nu^{2i-3} \chi_i^2 m_i. \quad (2.4)$$

Neutron csillagok esetén $w_i \in (4, 8)$, állapotegyenlettől függően (merevebb állapotegyenletek nagyobb értékeket adnak [70], [88]). Forgó fekete lyukak esetén $w_i = 1$ lesz [89]. A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a forgó objektum centrifugálisan ellaposodik (egyenlítői síkjában dűdorodik ki).

(b) *Dinamikai változók*: 2PN pontosságig az E energia és a $\mathbf{J} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ teljes impulzusmomentum vektor megmarad [62]. Az $\mathbf{L}$ pálya-impulzusmomentum és az $\mathbf{S}_i$ spinek külön-külön nem maradnak meg, mivel a spinek precessziós mozgást végeznek, ezt részletesen a 2.3 alfejezetben tárgyalom.

(c) *A pályát jellemző szögváltozók*: A pillanatnyi pályasík definíció szerint merőleges az $\mathbf{L}_N \equiv \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ newtoni pálya-impulzusmomentumra és ezzel együtt fejlődik a spinek precessziós mozgása miatt. Bevezetjük a következő szögeket: (i) a pályasík α inklinációja a $\mathbf{J}$ -re merőleges síkkal (α az $\hat{\mathbf{L}}_N$ és $\hat{\mathbf{J}}$ által bezárt szög); (ii) az említett két sík $\hat{\mathbf{I}}$ metszésvonalától egy, a $\hat{\mathbf{J}}$ -re merőleges síkban vett, tetszőleges $\hat{\mathbf{x}}$ -tengelyig mért ϕ_n szög; végül (iii) az $\hat{\mathbf{I}}$ -től a periasztronig mért ψ_p szög (lásd 2.1 és 2.2 ábrákat; a p és n indexek a periasztron, illetve nódus/csomóvonalra utalnak).



2.1. ábra. A $J\hat{\mathbf{J}}$ teljes impulzusmomentum, az $L_N\hat{\mathbf{L}}_N$ newtoni pálya-impulzusmomentum és az $S_{1,2}\hat{\mathbf{S}}_{1,2}$ spinek polár és azimutális szögei. Az azimutális szögeket a $\mathcal{K}_J \equiv (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{J}})$ nem-inerciális rendszerben, a polár szögeket mind $\mathcal{K}_J$ -ben, mind $\hat{\mathbf{L}}_N$ -hez viszonyítva ábrázoltam. A spinek relatív szöge γ . A $\mathcal{K}_J$ rendszer nem-inerciális jellegét az $\hat{\mathbf{I}}$ tengelytől $\hat{\mathbf{x}}$ inerciatengelyig mért ϕ_n szög fejlődése adja. [1]

$$\{\mathbf{f}_{(i)}\} = (\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}).$$

A (ϕ_n, α, ψ_p) szögek Euler szögek, mivel a z , x és ismét z tengelyek körül $-\phi_n$, α és ψ_p szögekkel vett forgatások $\mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{K}_J \rightarrow \mathcal{K}_L \rightarrow \mathcal{K}_A$ transzformációkhoz vezetnek. A forgatások sorozatát a következő transzformációs mátrix adja meg

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-\phi_n, \alpha, \psi_p) &= \mathcal{R}_z(\psi_p) \mathcal{R}_x(\alpha) \mathcal{R}_z(-\phi_n) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi_p \cos \phi_n + \sin \psi_p \cos \alpha \sin \phi_n & -\cos \psi_p \sin \phi_n + \sin \psi_p \cos \alpha \cos \phi_n & \sin \psi_p \sin \alpha \\ -\sin \psi_p \cos \phi_n + \cos \psi_p \cos \alpha \sin \phi_n & \sin \psi_p \sin \phi_n + \cos \psi_p \cos \alpha \cos \phi_n & \cos \psi_p \sin \alpha \\ -\sin \alpha \sin \phi_n & -\sin \alpha \cos \phi_n & \cos \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

ahol az egyetlen argumentumú $\mathcal{R}$ mátrixok a koordinátákra ható megfelelő forgásmátrixokat jelölik.

2.1.3. Kényszerek az Euler szögek evolúciójára

A redukált tömegű részecske $\mathcal{K}_i$ inerciarendszerben vett koordinátái az $\mathbf{r} = r(1, 0, 0)$ vektor koordinátáin végrehajtott $\mathcal{R}(-\psi, -\alpha, \phi_n)$ transzformációval állíthatók elő:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \phi_n \cos \psi + \sin \phi_n \cos \alpha \sin \psi \\ -\sin \phi_n \cos \psi + \cos \phi_n \cos \alpha \sin \psi \\ \sin \alpha \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

A $\psi = \psi_p + \chi_p$ szöget $\hat{\mathbf{l}}$ -től $\hat{\mathbf{r}}$ -ig mérjük, a χ_p *valódi anomália* az $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}}$ és $\hat{\mathbf{r}}$ közti szög. A K_i rendszerben végzett hosszadalmas, de nem túl bonyolult számolás után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{L}_{\mathbf{N}}}{\mu r^2} &= \dot{\phi}_n \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \psi [\cos \phi_n \cos \psi + \sin \phi_n \cos \alpha \sin \psi] \\ \sin \alpha \sin \psi [-\sin \phi_n \cos \psi + \cos \phi_n \cos \alpha \sin \psi] \\ \sin^2 \alpha \sin^2 \psi - 1 \end{pmatrix} \\ &+ \dot{\alpha} \sin \psi \begin{pmatrix} -\sin \phi_n \cos \alpha \cos \psi + \cos \phi_n \sin \psi \\ -\cos \phi_n \cos \alpha \cos \psi - \sin \phi_n \sin \psi \\ -\sin \alpha \cos \psi \end{pmatrix} \\ &+ \dot{\psi} \begin{pmatrix} -\sin \phi_n \sin \alpha \\ -\cos \phi_n \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Innen:

$$\frac{L_N^2}{\mu^2 r^4} = \left(\dot{\psi} - \dot{\phi}_n \cos \alpha \right)^2 + \left(\dot{\phi}_n \sin \alpha \cos \psi + \dot{\alpha} \sin \psi \right)^2, \quad (2.10)$$

valamint a harmadik komponenst (mely definíció szerint $(\mathbf{L}_{\mathbf{N}})_z = L_N \cos \alpha$) elosztva $\cos \alpha$ mennyiséggel,

$$\frac{L_N}{\mu r^2} = \dot{\psi} - \dot{\phi}_n \cos \alpha - \left(\dot{\phi}_n \sin \alpha \cos \psi + \dot{\alpha} \sin \psi \right) \tan \alpha \cos \psi. \quad (2.11)$$

Newtoni közelítésben az Euler szögek konstansok, így előállnak a jól ismert $L_N = \mu r^2 \dot{\chi}_p$ és $(\mathbf{L}_{\mathbf{N}})_z = \mu r^2 \dot{\chi}_p \cos \alpha$ összefüggések.

A (2.11) egyenletet négyzetre emelve, majd kivonva (2.10) egyenletből, azonosságot kapunk:

$$0 = \left[(1 - \tan^2 \alpha \cos^2 \psi) (\dot{\phi}_n \sin \alpha \cos \psi + \dot{\alpha} \sin \psi) + 2 \tan \alpha \cos \psi (\dot{\psi} - \dot{\phi}_n \cos \alpha) \right] \times (\dot{\phi}_n \sin \alpha \cos \psi + \dot{\alpha} \sin \psi) . \quad (2.12)$$

Az első szorzó nem nulla, mivel newtoni rendben az értéke $2 \tan \alpha \cos \psi L_N / \mu r^2 \neq 0$, így a második szorzónak kell eltűnnie, azaz (visszahelyettesítve $\psi = \psi_p + \chi_p$ összefüggést):

$$\dot{\phi}_n = -\dot{\alpha} \frac{\tan(\psi_p + \chi_p)}{\sin \alpha} . \quad (2.13)$$

Visszahelyettesítve ezt (2.10) vagy (2.11) egyenletekbe azt kapjuk, hogy

$$\dot{\psi}_p + \dot{\chi}_p = \frac{L_N}{\mu r^2} + \dot{\phi}_n \cos \alpha . \quad (2.14)$$

Az Euler szögek és a valódi anomália időderiváltjai között tehát két azonosság áll fenn.

2.1.4. A hely- és sebességvektor a $\mathcal{K}_A$ és $\mathcal{K}_L$ rendszerekben

Az $\mathbf{A}_N$ és $\mathbf{Q}_N$ definíciójából kiindulva egyszerű számolással belátható:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_N &= \mu \left(\frac{2E_N}{\mu} + \frac{Gm}{r} \right) \mathbf{r} - \mu r \dot{\mathbf{r}} \mathbf{v} , \\ \mathbf{Q}_N &= Gm\mu^2 \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r} + (L_N^2 - Gm\mu^2 r) \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Fentiekből a hely- és sebességvektor $\mathcal{K}_A$ rendszerbeli kifejezései:

$$\mathbf{r} = \frac{L_N^2 - Gm\mu^2 r}{\mu A_N} \hat{\mathbf{A}}_N + \frac{L_N}{A_N} r \dot{\mathbf{Q}}_N , \quad (2.16)$$

$$\mathbf{v} = -\frac{Gm\mu}{A_N} \dot{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{A}}_N + \frac{L_N}{A_N} \left(\frac{2E_N}{\mu} + \frac{Gm}{r} \right) \hat{\mathbf{Q}}_N . \quad (2.17)$$

A χ_p valódi anomália az $\mathbf{r}$ helyvektor $\mathcal{K}_A$ rendszerbeli azimutális szöge, így:

$$\mathbf{r} = r \left(\cos \chi_p \hat{\mathbf{A}}_N + \sin \chi_p \hat{\mathbf{Q}}_N \right) . \quad (2.18)$$

Összehasonlítva ezt (2.16) első egyenletével előáll a *valódi anomália paraméterezés*:

$$r = \frac{L_N^2}{\mu (Gm\mu + A_N \cos \chi_p)} , \quad (2.19)$$

$$\dot{r} = \frac{A_N}{L_N} \sin \chi_p . \quad (2.20)$$

A valódi anomália segítségével kifejezett sebességvektor

$$\mathbf{v} = \frac{Gm\mu}{L_N} \left[-\sin \chi_p \hat{\mathbf{A}}_N + \left(\cos \chi_p + \frac{A_N}{Gm\mu} \right) \hat{\mathbf{Q}}_N \right] . \quad (2.21)$$

Négyzete megadja v^2 kifejezését a valódi anomális függvényeként:

$$v^2 = \frac{(Gm\mu)^2 + A_N^2 + 2Gm\mu A_N \cos \chi_p}{L_N^2} . \quad (2.22)$$

(Ugyanez előáll az $E_N \equiv \mu v^2/2 - Gm\mu/r$ newtoni energiából is, (2.6) és (2.19) alkalmazásával.)

Mivel a $\mathcal{K}_A$ bázisvektorai a $\mathcal{K}_L$ bázisvektoraiból egy ψ_p szögű forgatással állnak elő:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}_N &= \cos \psi_p \hat{\mathbf{l}} + \sin \psi_p \hat{\mathbf{m}} , \\ \hat{\mathbf{Q}}_N &= -\sin \psi_p \hat{\mathbf{l}} + \cos \psi_p \hat{\mathbf{m}} ,\end{aligned}\quad (2.23)$$

az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{v}$ vektorok $\mathcal{K}_L$ rendszerbeli alakja

$$\mathbf{r} = r \left(\cos \psi \hat{\mathbf{l}} + \sin \psi \hat{\mathbf{m}} \right) , \quad (2.24)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{L_N} \left[- (Gm\mu \sin \psi + A_N \sin \psi_p) \hat{\mathbf{l}} + (Gm\mu \cos \psi + A_N \cos \psi_p) \hat{\mathbf{m}} \right] . \quad (2.25)$$

2.2. Kényszerek az impulzusmomentum-változókra

2.2.1. Az 5 szögjellegű szabadsági fok

Az $\hat{\mathbf{L}}_N$ és $\hat{\mathbf{S}}_i$ polár és azimutális szögei $\mathcal{K}_J$ rendszerben $(\alpha, -\pi/2)$ és (β_i, ϕ_i) , azaz

$$\hat{\mathbf{L}}_N = -\sin \alpha \hat{\mathbf{k}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{J}} , \quad (2.26)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \sin \beta_i \cos \phi_i \hat{\mathbf{l}} + \sin \beta_i \sin \phi_i \hat{\mathbf{k}} + \cos \beta_i \hat{\mathbf{J}} . \quad (2.27)$$

A $\hat{\mathbf{J}}$ és $\hat{\mathbf{S}}_i$ polár és azimutális szögei $\mathcal{K}_L$ rendszerben $(\alpha, \pi/2)$ és (κ_i, ψ_i) , azaz

$$\hat{\mathbf{J}} = \sin \alpha \hat{\mathbf{m}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{L}}_N , \quad (2.28)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \sin \kappa_i \cos \psi_i \hat{\mathbf{l}} + \sin \kappa_i \sin \psi_i \hat{\mathbf{m}} + \cos \kappa_i \hat{\mathbf{L}}_N . \quad (2.29)$$

A K_J és K_L rendszerek szögeinek szövevénye a 2.1 és 2.2 ábrákon látható. Összehasonlítva az $\hat{\mathbf{S}}_i$ vektorok kétféleképpen kapott $\hat{\mathbf{l}}$ komponensét, azt kapjuk, hogy

$$\sin \kappa_i \cos \psi_i = \sin \beta_i \cos \phi_i . \quad (2.30)$$

Az $\hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N$ szorzat minkét rendszerben való számolásából:

$$\cos \kappa_i = \cos \alpha \cos \beta_i - \sin \alpha \sin \beta_i \sin \phi_i . \quad (2.31)$$

Mivel $\sin \phi_i = -\cos(\pi/2 + \phi_i)$ valamint $\pi/2 + \phi_i$ az $\hat{\mathbf{L}}_N$ és $\hat{\mathbf{S}}_i$ relatív azimutális szöge, a (2.31) összefüggés nem más, mint a három vektor által kifeszített egységgömb-háromszögön értelmezett gömbi koszinusz azonosság.

Hasonló módon, az $\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 \equiv \cos \gamma$ mindkét rendszerben való kiszámolása újabb gömbi koszinusz azonosságokat ad:

$$\cos \gamma = \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 + \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos \Delta \psi , \quad (2.32)$$

$$\cos \gamma = \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \Delta \phi . \quad (2.33)$$

Itt $\Delta \psi = \psi_2 - \psi_1$ és $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$ a spinek $\mathcal{K}_L$ és $\mathcal{K}_J$ rendszerekben vett azimutális szögeinek különbségei.

Szintén gömbi koszinusz azonosságot kapunk $\hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{J}}$ mindkét rendszerben való kiszámolásából:

$$\cos \beta_i = \cos \alpha \cos \kappa_i + \sin \alpha \sin \kappa_i \sin \psi_i . \quad (2.34)$$

A (2.30) és (2.34) egyenletek megadják β_i, ϕ_i szögeket κ_i, ψ_i és α függvényeként. Elvben ezeket visszahelyettesítve (2.32) és (2.33) egyenletekbe, majd kiküszöbölve γ -t megkaphatjuk α -t, mint κ_i, ψ_i függvényét. A következő áll elő:

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 \sin \phi_1 \sin \beta_2 \sin \phi_2 = \\ (\sin \alpha \cos \kappa_1 - \cos \alpha \sin \kappa_1 \sin \psi_1) (\sin \alpha \cos \kappa_2 - \cos \alpha \sin \kappa_2 \sin \psi_2) . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Mivel a spinek iránya tetszőleges, igaz az alábbi is

$$\sin \beta_i \sin \phi_i = \sin \alpha \cos \kappa_i - \cos \alpha \sin \kappa_i \sin \psi_i . \quad (2.36)$$

A baloldal közvetlen számolása azonban, (2.30) és (2.34) egyenletek felhasználásával visszaadja a jobboldalt, így $\alpha(\kappa_i, \psi_i)$ típusú összefüggés helyett azonossághoz jutunk. Ezért (2.33) egyenlet a korábbi egyenletek következménye. Hasonló módon belátható, hogy a (2.31) egyenletek is következményként állnak elő.

Összegzésképpen, 5 független kényszeregyenletet vezettünk le a 10 szögváltozóra ($\alpha, \beta_i, \phi_i, \kappa_i, \psi_i, \gamma$). Ezek (2.30), (2.34) és (2.32) egyenletek. Független szögváltozónak (α, κ_i, ψ_i) választható.

2.2.2. Impulzusmomentumok

A $\mathcal{K}_L$ bázisvektorai a $\mathcal{K}_A$ bázisvektorainak x - y síkban vett $-\psi_p$ szögű forgatásával állnak elő, azaz (2.23) transzformáció inverzével:

$$\hat{\mathbf{l}} = \cos \psi_p \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} - \sin \psi_p \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} , \quad (2.37)$$

$$\hat{\mathbf{m}} = \sin \psi_p \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} + \cos \psi_p \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} . \quad (2.38)$$

A spin-irányok $\mathcal{K}_L$ rendszerbeli (2.29) kifejezését így átírhatjuk a $\mathcal{K}_A$ rendszerbe:

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \sin \kappa_i \left[\cos (\psi_p - \psi_i) \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} - \sin (\psi_p - \psi_i) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \right] + \cos \kappa_i \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} . \quad (2.39)$$

Megjegyezzük, hogy körpályákon

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \left(\frac{S_i}{L_N} \right) &= \frac{(G/c) m^2 \eta \nu^{2i-3} \chi_i}{\mu r v} = \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right) \frac{c}{v} \nu^{2i-3} \chi_i \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \mathcal{O}(\nu^{2i-3}) \chi_i . \end{aligned} \quad (2.40)$$

A nagyságrendi becslés érvényes marad excentrikus pályákra is.

A későbbiek során szükségünk lesz még

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}} = \cos \kappa_k \left(\sin \chi_p \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} - \cos \chi_p \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \right) - \sin \kappa_k \sin (\psi_p + \chi_p - \psi_k) \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} , \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}} &= \frac{Gm\mu}{L_N} \cos \kappa_k \left[\left(\cos \chi_p + \frac{A_N}{Gm\mu} \right) \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} + \sin \chi_p \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \right] \\ &\quad - \frac{Gm\mu}{L_N} \sin \kappa_k \left[\cos (\psi_p + \chi_p - \psi_k) + \frac{A_N}{Gm\mu} \cos (\psi_p - \psi_k) \right] \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

kifejezésekre is, melyek levezetéséhez (2.18) és (2.21) összefüggéseket használtuk. Szintén könnyen beláthatók az alábbiak is

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i = \sin \kappa_i \cos (\chi_p + \psi_p - \psi_i) , \quad (2.43)$$

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i = \frac{\sin \kappa_i}{L_N v} [-Gm\mu \sin (\chi_p + \psi_p - \psi_i) + A_N \sin (\psi_i - \psi_p)] . \quad (2.44)$$

Az $\mathbf{L}$ teljes pálya-impulzusmomentum ÁRE járulékokat (PN, 2PN), valamint SO járulékokat tartalmaz [67]:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_{PN} + \mathbf{L}_{SO} + \mathbf{L}_{2PN} . \quad (2.45)$$

A teljes pálya-impulzusmomentumnak nincsenek SS vagy QM járulécai [5]. Az $\mathbf{L}_{PN}$ és $\mathbf{L}_{2PN}$ járulékok $\mathbf{L}_N$ irányúak (lásd [67] (2.9) egyenletét):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{PN} &= \epsilon_{PN} \mathbf{L}_N , \\ \epsilon_{PN} &= \frac{1-3\eta}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + (3+\eta) \frac{Gm}{c^2 r} , \end{aligned} \quad (2.46)$$

és

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{2PN} &= \epsilon_{2PN} \mathbf{L}_N , \\ \epsilon_{2PN} &= \frac{3}{8} (1-7\eta+13\eta^2) \left(\frac{v}{c}\right)^4 - \frac{1}{2} \eta (2+5\eta) \frac{Gm}{c^2 r} \left(\frac{\dot{r}}{c}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (7-10\eta-9\eta^2) \frac{Gm}{c^2 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{1}{4} (14-41\eta+4\eta^2) \left(\frac{Gm}{c^2 r}\right)^2 , \end{aligned} \quad (2.47)$$

ahol az együtthatók rendje

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon_{PN}) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \mathcal{O}(1, \eta) , \\ \mathcal{O}(\epsilon_{2PN}) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \mathcal{O}(1, \eta, \eta^2) . \end{aligned} \quad (2.48)$$

A Newton-Wigner-Pryce spin-feltételt teljesítő SO járulék ([90] második (5.42) egyenletében $\mathbf{L}_{SO}^{II}$ kifejezése) átírható így¹

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{SO}^{NWP} &= \frac{G\mu}{2c^2 r} \sum_{k=1}^2 (4+3\nu^{3-2i}) S_i \left[\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{S}}_i) \right] \\ &= \frac{G^2 m^3}{4c^3 r} \eta^2 \sum_{i=1}^2 (4\nu^{2i-3} + 3) \chi_i \left\{ \sin \kappa_i [\cos (2\chi_p + \psi_p - \psi_i) - \cos (\psi_p - \psi_i)] \hat{\mathbf{A}}_N \right. \\ &\quad \left. + \sin \kappa_i [\sin (2\chi_p + \psi_p - \psi_i) + \sin (\psi_p - \psi_i)] \hat{\mathbf{Q}}_N - 2 \cos \kappa_i \hat{\mathbf{L}}_N \right\} . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Itt felhasználtuk (2.3), (2.18), (2.39) és (2.43) összefüggéseket. A rendje

$$\mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{L}_{SO}^{NWP}}{L_N}\right) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \mathcal{O}(\eta) \mathcal{O}(1, \nu^{2i-3}) \chi_i . \quad (2.50)$$

¹Az itt bemutatott kifejezésekhez vezető mozgásegyenleteket harmonikus koordinátákban vezették le. Kovariáns spin feltétel használata csak az SO járulékokban okozna különbséget.

A fenti becslésekből megállapíthatók, melyek a domináns tagok kis tömegarány esetén.

A teljes $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ impulzusmomentum kifejezése tehát a $\mathcal{K}_A$ rendszerben a (2.39), (2.46), (2.47), (2.49) felhasználásával

$$\begin{aligned} J\hat{\mathbf{J}} &= \frac{Gm^2}{c}\eta \sum_{i=1}^2 \chi_i \sin \kappa_i \\ &\times \left\{ \left[\nu^{2i-3} \cos(\psi_p - \psi_i) - \frac{Gm}{4c^2r} \eta (4\nu^{2i-3} + 3) [\cos(\psi_p - \psi_i) - \cos(2\chi_p + \psi_p - \psi_i)] \right] \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} \right. \\ &- \left[\nu^{2i-3} \sin(\psi_p - \psi_i) - \frac{Gm}{4c^2r} \eta (4\nu^{2i-3} + 3) [\sin(\psi_p - \psi_i) + \sin(2\chi_p + \psi_p - \psi_i)] \right] \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \left. \right\} \\ &+ \left\{ L_N (1 + \epsilon_{PN} + \epsilon_{2PN}) + \frac{Gm^2}{c} \eta \sum_{i=1}^2 \left[\nu^{2i-3} - \frac{Gm}{2c^2r} \eta (4\nu^{2i-3} + 3) \right] \chi_i \cos \kappa_i \right\} \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} , \end{aligned} \quad (2.51)$$

Az első kapcsos zárójel a $\mathcal{K}_L$ rendszerben következő alakú:

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[\nu^{2i-3} \cos \psi_i + \frac{Gm}{4c^2r} \eta (4\nu^{2i-3} + 3) [\cos(2\chi_p + 2\psi_p - \psi_i) - \cos \psi_i] \right] \hat{\mathbf{i}} \right. \\ &+ \left. \left[\nu^{2i-3} \sin \psi_i + \frac{Gm}{4c^2r} \eta (4\nu^{2i-3} + 3) [\sin(2\chi_p + 2\psi_p - \psi_i) - \sin \psi_i] \right] \hat{\mathbf{m}} \right\} . \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.2.3. Hosszúságjellegű szabadsági fok

A (2.51) egyenlet projekciói összefüggéseket adnak a szögek és hosszúságok között. A $\mathcal{K}_L$ rendszerben vett $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{m}}$, illetve $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ mentén vett projekciók:

$$0 = \sum_{i=1}^2 \chi_i \sin \kappa_i \left[\nu^{2i-3} \cos \psi_i + \frac{Gm}{4c^2r} \eta (4\nu^{2i-3} + 3) [\cos(2\chi_p + 2\psi_p - \psi_i) - \cos \psi_i] \right] , \quad (2.53)$$

$$\frac{cJ \sin \alpha}{Gm^2 \eta} = \sum_{i=1}^2 \chi_i \sin \kappa_i \left[\nu^{2i-3} \sin \psi_i + \frac{Gm}{4c^2r} \eta (4\nu^{2i-3} + 3) [\sin(2\chi_p + 2\psi_p - \psi_i) - \sin \psi_i] \right] , \quad (2.54)$$

$$J \cos \alpha = L_N (1 + \epsilon_{PN} + \epsilon_{2PN}) + \frac{Gm^2}{c} \eta \sum_{i=1}^2 \left[\nu^{2i-3} - \frac{Gm}{2c^2r} \eta (4\nu^{2i-3} + 3) \right] \chi_i \cos \kappa_i . \quad (2.55)$$

Az impulzusmomentumokat tehát a bevezetett összesen 14 változó ($J, L, \chi_i, \alpha, \beta_i, \phi_i, \kappa_i, \psi_i, \gamma$) jellemzi. Ezekre összesen 8 független kényszer vonatkozik, ezért 6 változó független. Ezek közül 5 a spinek és a teljes impulzusmomentum irányait adja meg a $\mathcal{K}_L$ rendszerben (ezek α, κ_i, ψ_i), a hatodik pedig egy hosszúság, például J , melyet megmaradó jellege miatt előnyös választani.

A (2.53)-(2.55) egyenletekben az összes ψ_i függés expliciten látszik. Elvben így (2.53)-(2.54) egyenletekből a ψ_i szögek kifejezhetők κ_i, α, ψ_p , a tömegek és a χ_i spinek függvényeként. A gyakorlatban azonban ez nem könnyű, és nem feltétlenül ad egyértelmű

eredményt. (Például $\sin \psi_i$ és $\cos \psi_i$ kifejezve $x_i = \tan \psi_i/2$ változókkal az (2.53)-(2.54) egyenleteket másodfokú csatolt polinomiális egyenletrendszerre alakítja, mely két különböző ψ_i értéket rendelhet minden χ_i -hez.)

Végül (2.55) egyenlet segítségével L_N kifejezhető a választott független változókkal, 2PN pontossáig, következőképpen:

$$L_N = J(1 - \epsilon_{PN} - \epsilon_{2PN} + \epsilon_{PN}^2) \cos \alpha - \frac{Gm^2}{c} \eta \sum_{i=1}^2 \left[(1 - \epsilon_{PN}) \nu^{2i-3} - \frac{Gm}{2c^2 r} \eta (4\nu^{2i-3} + 3) \right] \chi_i \cos \kappa_i . \quad (2.56)$$

Szintén megadjuk L_N reciprokanak sorfejtett alakját, ami 2PN rendben meglehetősen bonyolult (a spinekben negyedfokú):

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_N} &= \frac{1 + \epsilon_{PN} + \epsilon_{2PN}}{J \cos \alpha} + \left(\frac{Gm^2}{cJ \cos \alpha} \right) \frac{\eta}{J \cos \alpha} \left[(1 + \epsilon_{PN}) \chi_\nu - \frac{Gm}{2c^2 r} \eta (4\chi_\nu + 3\chi_+) \right] \\ &+ \left(\frac{Gm^2}{cJ \cos \alpha} \right)^2 \frac{\eta^2}{J \cos \alpha} \left[(1 + \epsilon_{PN}) \chi_\nu - \frac{Gm}{c^2 r} \eta (4\chi_\nu + 3\chi_+) \right] \chi_\nu \\ &+ \left(\frac{Gm^2}{cJ \cos \alpha} \right)^3 \frac{\eta^3}{J \cos \alpha} \chi_\nu^3 + \left(\frac{Gm^2}{cJ \cos \alpha} \right)^4 \frac{\eta^4}{J \cos \alpha} \chi_\nu^4 . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Itt bevezettük

$$\begin{aligned} \chi_+ &= \sum_{i=1}^2 \chi_i \cos \kappa_i = \chi_1 \cos \kappa_1 + \chi_2 \cos \kappa_2 , \\ \chi_\nu &= \sum_{i=1}^2 \nu^{2i-3} \chi_i \cos \kappa_i = \nu^{-1} \chi_1 \cos \kappa_1 + \nu \chi_2 \cos \kappa_2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

jelöléseket. A tagok rendjének becslésében segítségünkre volt

$$\mathcal{O} \left(\frac{Gm^2}{cL_N} \right) = \mathcal{O} (\varepsilon^{1/2}) . \quad (2.59)$$

Az L_N és reciprokanak 1PN pontosságú sorfejtéseiben már csak másodfokú spin kifejezések szerepelnek:

$$L_N = J(1 - \epsilon_{PN}) \cos \alpha - \frac{Gm^2}{c} \eta \sum_{i=1}^2 \nu^{2i-3} \chi_i \cos \kappa_i . \quad (2.60)$$

$$\frac{1}{L_N} = \frac{1 + \epsilon_{PN}}{J \cos \alpha} + \left(\frac{Gm^2}{cJ \cos \alpha} \right) \frac{\eta}{J \cos \alpha} \chi_\nu + \left(\frac{Gm^2}{cJ \cos \alpha} \right)^2 \frac{\eta^2}{J \cos \alpha} \chi_\nu^2 . \quad (2.61)$$

A (2.46) PN együttható részletes alakja (vezető rendben)

$$\begin{aligned} \epsilon_{PN} &= \frac{(7 - \eta) (Gm\mu)^2 + (1 - 3\eta) A_N^2 + 4(2 - \eta) Gm\mu A_N \cos \chi_p}{2c^2 L_N^2} \\ &= \frac{(Gm\mu)^2}{2c^2 J^2 \cos^2 \alpha} \left[(1 - 3\eta) e_r^2 + 4(2 - \eta) e_r \cos \chi_p + (7 - \eta) \right] . \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.2.4. A független változók: összegzés

Az impulzusmomentumokat (beleértve a spineket is) jellemző független változók a következők: $(\alpha, \kappa_i, \psi_i, J)$ vagy $(\alpha, \kappa_i, \chi_i, J)$. A teljes impulzusmomentum J nagysága (elentétben az L, L_N változók bármelyikével) 2PN pontossáig megmaradó mennyiség. A második változó-halmaz használata előnyösebb, ugyanis χ_i a precessziós evolúciók miatt úgyszintén megmaradó mennyiségek. Mitöbb, a gravitációs sugárzás is csak igen magas PN rendben változtatja meg a χ_i -ket. (Ezzel szemben a ψ_i spin-azimutális szögek, mint később látni fogjuk, ugyan konstansnak tekinthetők a radiális periódus során, azonban a precessziók időskáláján már változnak.) A κ_i spin-polárszögek ugyancsak konstansnak tekinthetők a radiális periódus során és a precessziós időskálán is csak gyengén változnak. Hasonló a helyzet az α szöggel is, mely számottevően csak a sugárzási időskálán változik meg.

2.3. A spinvektorok evolúciója

2.3.1. Spinprecessziók

Tetszőleges, de állandó tömegű, spinű és kvadrupól-momentumú testek spinjei precessziós mozgást követnek ([57] (39) és (43) egyenletei, [58]):

$$\dot{\mathbf{S}}_i = \boldsymbol{\Omega}_i \times \mathbf{S}_i . \quad (2.63)$$

A szögsebesség SO, SS és QM járulékai:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_i &= \boldsymbol{\Omega}_i^{SO} + \boldsymbol{\Omega}_i^{SS} + \boldsymbol{\Omega}_i^{QM} , \\ \boldsymbol{\Omega}_i^{SO} &= \frac{G(4 + 3\nu^{3-2i})}{2c^2 r^3} L_N \hat{\mathbf{L}}_N , \\ \boldsymbol{\Omega}_i^{SS} &= \frac{GS_j}{c^2 r^3} \left[3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_j) \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{S}}_j \right] , \\ \boldsymbol{\Omega}_i^{QM} &= -\frac{3Gm_j Q_i}{r^3 S_i} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i) \hat{\mathbf{r}} , \end{aligned} \quad (2.64)$$

itt $j \neq i$. Az SS és QM járulékok összege, a (2.2)-(2.4) egyenletek felhasználásával

$$\boldsymbol{\Omega}_i^{SS} + \boldsymbol{\Omega}_i^{QM} = \frac{G}{c^2 r^3} \left[3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_j) \hat{\mathbf{r}} + 3w_i \nu^{3-2i} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_i) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{S}_j \right] . \quad (2.65)$$

A különböző járulékok PN rendjének becsléséhez figyelembe kell venni, hogy

$$\mathcal{O}\left(\frac{c}{r}\right) = \varepsilon^{-1/2} \mathcal{O}(T^{-1}) , \quad (2.66)$$

ahol T a radiális periódus (egymást követő $\dot{r} = 0$ fordulópontokon való átmenetek közti idő kétszerese). Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\boldsymbol{\Omega}_i^{SO}) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \mathcal{O}(1, \nu^{3-2i}) \mathcal{O}(T^{-1}) , \\ \mathcal{O}(\boldsymbol{\Omega}_i^{SS}) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \mathcal{O}(\eta) \mathcal{O}(\nu^{2i-3}) \chi_j \mathcal{O}(T^{-1}) , \\ \mathcal{O}(\boldsymbol{\Omega}_i^{QM}) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \mathcal{O}(\eta) w_i \chi_i \mathcal{O}(T^{-1}) . \end{aligned} \quad (2.67)$$

Azaz a radiális periódus időskálájához képest az SO precesszió 1PN effektus, míg az SS és QM járulékok 1,5 PN korrekciók. Mind az SO, mind az SS járulékok tartalmazzak $\mathcal{O}(\nu^{-1})$ tagokat, melyek a tömegarány csökkenésével együtt növekednek, azaz a kis tömegarányok felgyorsítják ezeket a precessziós járulékokat.

Mivel $\Omega_i^{QM} \propto \chi_i$, a QM precessziós járulék *önspin* effektusként is felfogható.

2.3.2. Precessziók által megőrzött konfigurációk

A vezető rendű SO precessziók a spin vektorokat $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ körül forgatják. Amennyiben $m_2 = m_1$, a pillanatnyi szögsebességek nagysága is azonos és a spinek konfigurációja megmarad, merev forgást végezve az oszkuláló pálya síkjának normális vektora körül.

Az SS és QM járulékok bonyolítják a helyzetet. Feltehető a kérdés, hogy létezik-e olyan spin-konfiguráció, amelyben a spinek valamely közös tengely körül mereven forognak?

Ez a helyzet triviálisan bekövetkezhet akkor, ha mindkét spin párhuzamos (azonos vagy ellentétes irányítottságú) a newtoni pálya-impulzusmomentummal, azaz $\hat{\mathbf{S}}_i = \pm \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$. Ekkor SO rendben nincs precesszió, a következő rendben pedig $\Omega_i^{QM} = 0$ és $\Omega_i^{SS} \propto \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$, azaz $\dot{\mathbf{S}}_i = 0$. Így, amennyiben a spinek merőlegesek a pályasíkra, a dinamika megőrzi a merőlegességet.

Az általánosabb lehetőség az, hogy a spinek azonos szögsebességgel közös tengely körül forognak. Mivel a precessziós tengely nem egyértelmű, azaz $(G/c^2 r^3)(\mathcal{P}_i - 1)\mathbf{S}_i$ járulékot adhatunk Ω_i szögsebességvektorokhoz a dinamika megváltoztatása nélkül, az új, tetszőleges $\mathcal{P}_i$ együtthatókat tartalmazó szögsebességek egyenlőségét kell megkövetelnünk, azaz $\Omega'_1 = \Omega'_2$. Ennek feltétele

$$0 = \frac{(\nu - \nu^{-1})}{2} \mathbf{L}_{\mathbf{N}} + \{ \hat{\mathbf{r}} \cdot [(1 - w_2 \nu^{-1}) \mathbf{S}_2 - (1 - w_1 \nu) \mathbf{S}_1] \} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{3} (\mathcal{P}_2 \mathbf{S}_2 - \mathcal{P}_1 \mathbf{S}_1) . \quad (2.68)$$

Amennyiben $\mathcal{P}_i$ egységnyi nagyságú (ez azt jelenti, hogy a tengely nem esik messze $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ -tól), a vezető rendű járulék (2.68) egyenlet jobb oldalán az $\mathbf{L}_{\mathbf{N}}$ -t tartalmazó tag. Vezető rendben így $m_2 = m_1$ szükséges. Következő rendben pedig

$$\mathcal{P}_2 \mathbf{S}_2 - \mathcal{P}_1 \mathbf{S}_1 = 3 \{ \hat{\mathbf{r}} \cdot [(1 - w_2) \mathbf{S}_2 - (1 - w_1) \mathbf{S}_1] \} \hat{\mathbf{r}} . \quad (2.69)$$

Fekete lyukak esetén ($w = 1$) ez a $\mathcal{P}_2 \mathbf{S}_2 = \mathcal{P}_1 \mathbf{S}_1$ feltételhez vezet, azaz a *spinek egymással párhuzamosak* (egymással azonos vagy ellenirányítottak) kell legyenek. Ekkor a közös szögsebesség

$$\Omega'_i = \frac{G}{c^2 r^3} \left[\frac{7}{2} \mathbf{L}_{\mathbf{N}} + 3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{S} + \frac{\mathcal{P}_1 \mathbf{S}_1 + \mathcal{P}_2 \mathbf{S}_2}{2} \right] , \quad (2.70)$$

ahol $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$. Sem a precesszió tengelye, sem szögsebessége nem egyértelmű (mivel Ω'_i a $\mathcal{P}_i$ -k függvénye), azonban az összes ilyen tengely közel áll $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ -hez. (Hangsúlyozzuk azonban, hogy nincs olyan $\mathcal{P}_i$, mellyel pontosan $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ lehet ez a tengely).

Összefoglalva, csak párhuzamos spinek precessziója történhet egymással szinkronban, közös tengely körül, és ez a tengely nem különbözhet túlságosan az oszkuláló pálya merőlegesétől.

2.3.3. A spin-precessziós szögsebességek a $\mathcal{K}_A$ rendszerben

Felhasználva (2.3)-(2.4), (2.18), (2.39) és (2.43) összefüggéseket, a (2.64) szögsebességvektor így írható:

$$\begin{aligned}\Omega_i &= \Omega_i^{SO} + \Omega_i^{SS} + \Omega_i^{QM}, \\ \Omega_i^{SO} &= \frac{G(4 + 3\nu^{3-2i})}{2c^2 r^3} L_N \hat{\mathbf{L}}_N, \\ \Omega_i^{SS} &= \frac{G^2 m^2 \eta}{2c^3 r^3} \nu^{2j-3} \chi_j \left[\sin \kappa_j \left\{ [3 \cos(\psi_p + \chi_p - \psi_j) \cos \chi_p - \cos(\psi_p - \psi_j)] \hat{\mathbf{A}}_N \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [3 \cos(\psi_p + \chi_p - \psi_j) \sin \chi_p + \sin(\psi_p - \psi_j)] \hat{\mathbf{Q}}_N \right\} - \cos \kappa_j \hat{\mathbf{L}}_N \right], \\ \Omega_i^{QM} &= \frac{G^2 m^2 \eta}{2c^3 r^3} 3w_i \chi_i \sin \kappa_i \cos(\psi_p + \chi_p - \psi_i) \left(\cos \chi_p \hat{\mathbf{A}}_N + \sin \chi_p \hat{\mathbf{Q}}_N \right),\end{aligned}\tag{2.71}$$

itt $j \neq i$.

A fejezet további részében szükségünk lesz a következő projekciókra

$$\begin{aligned}\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_N &= \frac{G^2 m^2 \eta}{2c^3 r^3} \left\{ \nu^{2j-3} \chi_j \sin \kappa_j [3 \cos(\psi_p + 2\chi_p - \psi_j) + \cos(\psi_p - \psi_j)] \right. \\ &\quad \left. + 3w_i \chi_i \sin \kappa_i [\cos(\psi_p + 2\chi_p - \psi_i) + \cos(\psi_p - \psi_i)] \right\},\end{aligned}\tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_N &= \frac{G^2 m^2 \eta}{2c^3 r^3} \left\{ \nu^{2j-3} \chi_j \sin \kappa_j [3 \sin(\psi_p + 2\chi_p - \psi_j) - \sin(\psi_p - \psi_j)] \right. \\ &\quad \left. + 3w_i \chi_i \sin \kappa_i [\sin(\psi_p + 2\chi_p - \psi_i) - \sin(\psi_p - \psi_i)] \right\},\end{aligned}\tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N &= \frac{G(4 + 3\nu^{3-2i})}{2c^2 r^3} J \cos \alpha \\ &\quad - \frac{G^2 m^2 \eta}{2c^3 r^3} [(4\nu^{2i-3} + 3) \chi_i \cos \kappa_i + \nu^{2j-3} (5 + 3\nu^{3-2i}) \chi_j \cos \kappa_j].\end{aligned}\tag{2.74}$$

Szintén szükségünk lesz

$$\begin{aligned}\Omega_i \times \hat{\mathbf{S}}_i &= \left[(\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N) \sin \kappa_i \sin(\psi_p - \psi_i) + (\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_N) \cos \kappa_i \right] \hat{\mathbf{A}}_N \\ &\quad + \left[(\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N) \sin \kappa_i \cos(\psi_p - \psi_i) - (\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_N) \cos \kappa_i \right] \hat{\mathbf{Q}}_N \\ &\quad - \sin \kappa_i \left[(\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_N) \sin(\psi_p - \psi_i) + (\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_N) \cos(\psi_p - \psi_i) \right] \hat{\mathbf{L}}_N\end{aligned}\tag{2.75}$$

vektori szorzatra is.

2.4. A $\mathcal{K}_A$ rendszerben kifejezett gyorsulás

Perturbált Kepler mozgás során a gyorsulás

$$\mathbf{a} = -\frac{Gm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \Delta \mathbf{a}.\tag{2.76}$$

Kompakt, spines kettős rendszer esetén

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}_{PN} + \mathbf{a}_{2PN} + \mathbf{a}_{SO} + \mathbf{a}_{SS} + \mathbf{a}_{QM}.\tag{2.77}$$

Az ÁRE (PN és 2PN), SO, SS és QM gyorsulás-járulékok ismertek [67], [5]. Alább a Newton-Wigner-Pryce spin-feltételt teljesítő SO járulékot adjuk meg. Az (2.3)-(2.4) egyenletek felhasználásával a járulékok:

$$\mathbf{a}_{PN} = \frac{Gm}{c^2 r^2} \left\{ \left[2(2 + \eta) \frac{Gm}{r} - (1 + 3\eta)v^2 + \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2 \right] \hat{\mathbf{r}} + 2(2 - \eta)\dot{r}\mathbf{v} \right\}, \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{2PN} = & -\frac{Gm}{c^4 r^2} \left\{ \left[\frac{3}{4}(12 + 29\eta) \left(\frac{Gm}{r} \right)^2 + \eta(3 - 4\eta)v^4 + \frac{15}{8}\eta(1 - 3\eta)\dot{r}^4 \right. \right. \\ & - \frac{3}{2}\eta(3 - 4\eta)\dot{r}^2 v^2 - \frac{\eta}{2}(13 - 4\eta) \frac{Gm}{r} v^2 - (2 + 25\eta + 2\eta^2) \frac{Gm}{r} \dot{r}^2 \Big] \hat{\mathbf{r}} \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[\eta(15 + 4\eta)v^2 - (4 + 41\eta + 8\eta^2) \frac{Gm}{r} - 3\eta(3 + 2\eta)\dot{r}^2 \right] \dot{r}\mathbf{v} \right\}, \quad (2.79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{SO}^{NWP} = & \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} \sum_{k=1}^2 (4\nu^{2k-3} + 3) \chi_k \left[\frac{3L_N}{2\mu r} (\hat{\mathbf{L}}_N \cdot \hat{\mathbf{S}}_k) \hat{\mathbf{r}} - (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{S}}_k) \right. \\ & \left. + \frac{3\dot{r}}{2} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{S}}_k) \right] \quad (2.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{SS} = & -\frac{3G^3 m^3 \eta}{c^4 r^4} \chi_1 \chi_2 \left\{ \left[(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) - 5(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_1)(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) \right] \hat{\mathbf{r}} \right. \\ & \left. + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) \hat{\mathbf{S}}_1 + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_1) \hat{\mathbf{S}}_2 \right\}, \quad (2.81) \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_{QM} = -\frac{3G^3 m^3 \eta}{2c^4 r^4} \sum_{k=1}^2 w_k \nu^{2k-3} \chi_k^2 \left\{ \left[1 - 5(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_k)^2 \right] \hat{\mathbf{r}} + 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_k) \hat{\mathbf{S}}_k \right\}. \quad (2.82)$$

A fejezetben alkalmazott formalizmus felhasználásához a $\Delta\mathbf{a}$ perturbációt kifejezzük a $\mathcal{K}_A$ rendszer $\{\mathbf{f}_{(i)}\} = (\hat{\mathbf{A}}_N, \hat{\mathbf{Q}}_N, \hat{\mathbf{L}}_N)$ bázisában, mint

$$\Delta\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{f}_{(i)}. \quad (2.83)$$

A (2.18)-(2.21), (2.39), (2.41)-(2.42) egyenletek felhasználásával az $a_i = \Delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_{(i)}$ komponensek:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1^{PN} + a_1^{2PN} + a_1^{SO} + a_1^{SS} + a_1^{QM}, \quad (2.84) \\ a_1^{PN} &= \frac{Gm}{c^2 r^2} \left\{ \left[2(2 + \eta) \frac{Gm}{r} - (1 + 3\eta)v^2 + \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2 \right] \cos \chi_p - 2(2 - \eta)\dot{r} \frac{Gm\mu}{L_N} \sin \chi_p \right\}, \\ a_1^{2PN} &= -\frac{Gm}{c^4 r^2} \left\{ \left[\frac{3}{4}(12 + 29\eta) \left(\frac{Gm}{r} \right)^2 + \eta(3 - 4\eta)v^4 + \frac{15}{8}\eta(1 - 3\eta)\dot{r}^4 \right. \right. \\ & - \frac{3}{2}\eta(3 - 4\eta)\dot{r}^2 v^2 - \frac{\eta}{2}(13 - 4\eta) \frac{Gm}{r} v^2 - (2 + 25\eta + 2\eta^2) \frac{Gm}{r} \dot{r}^2 \Big] \cos \chi_p \\ & \left. + \left[\eta(15 + 4\eta)v^2 - (4 + 41\eta + 8\eta^2) \frac{Gm}{r} - 3\eta(3 + 2\eta)\dot{r}^2 \right] \frac{Gm\mu\dot{r}}{2L_N} \sin \chi_p \right\}, \\ a_1^{SO} &= \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} \left[\left(\frac{3L_N}{2\mu r} - \frac{Gm\mu}{L_N} \right) \cos \chi_p + \frac{3\dot{r}}{2} \sin \chi_p - \frac{A_N}{L_N} \right] \sum_{k=1}^2 (4\nu^{2k-3} + 3) \chi_k \cos \kappa_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1^{SS} &= -\frac{3G^3m^3\eta}{c^4r^4}\chi_1\chi_2\left\{\cos\kappa_1\cos\kappa_2\cos\chi_p+\sin\kappa_1\sin\kappa_2\right. \\
&\quad \times\left[\cos(\psi_2-\psi_1)-5\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_1)\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_2)\right]\cos\chi_p \\
&\quad \left.+\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_2)\cos(\psi_p-\psi_1)+\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_1)\cos(\psi_p-\psi_2)\right\}, \\
a_1^{QM} &= -\frac{3G^3m^3\eta}{2c^4r^4}\sum_{k=1}^2w_k\nu^{2k-3}\chi_k^2\left[\cos\chi_p-\sin^2\kappa_k\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_k)\right. \\
&\quad \left.\times\left[5\cos\chi_p\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_k)-2\cos(\psi_p-\psi_k)\right]\right\},
\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_2^{PN} + a_2^{2PN} + a_2^{SO} + a_2^{SS} + a_2^{QM}, \tag{2.85} \\
a_2^{PN} &= \frac{Gm}{c^2r^2}\left\{\left[2(2+\eta)\frac{Gm}{r}-(1+3\eta)v^2+\frac{3}{2}\eta\dot{r}^2\right]\sin\chi_p\right. \\
&\quad \left.+2(2-\eta)\dot{r}\frac{Gm\mu}{L_N}\left(\cos\chi_p+\frac{A_N}{Gm\mu}\right)\right\} \\
a_2^{2PN} &= -\frac{Gm}{c^4r^2}\left\{\left[\frac{3}{4}(12+29\eta)\left(\frac{Gm}{r}\right)^2+\eta(3-4\eta)v^4+\frac{15}{8}\eta(1-3\eta)\dot{r}^4\right.\right. \\
&\quad \left.-\frac{3}{2}\eta(3-4\eta)\dot{r}^2v^2-\frac{\eta}{2}(13-4\eta)\frac{Gm}{r}v^2-(2+25\eta+2\eta^2)\frac{Gm}{r}\dot{r}^2\right]\sin\chi_p \\
&\quad \left.-\left[\eta(15+4\eta)v^2-(4+41\eta+8\eta^2)\frac{Gm}{r}-3\eta(3+2\eta)\dot{r}^2\right]\right. \\
&\quad \left.\times\frac{Gm\mu\dot{r}}{2L_N}\left(\cos\chi_p+\frac{A_N}{Gm\mu}\right)\right\}, \\
a_2^{SO} &= \frac{G^2m^2\eta}{c^3r^3}\left[\left(\frac{3L_N}{2\mu r}-\frac{Gm\mu}{L_N}\right)\sin\chi_p-\frac{3\dot{r}}{2}\cos\chi_p\right]\sum_{k=1}^2(4\nu^{2k-3}+3)\chi_k\cos\kappa_k, \\
a_2^{SS} &= -\frac{3G^3m^3\eta}{c^4r^4}\chi_1\chi_2\left\{\cos\kappa_1\cos\kappa_2\sin\chi_p+\sin\kappa_1\sin\kappa_2\right. \\
&\quad \times\left[\cos(\psi_2-\psi_1)-5\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_1)\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_2)\right]\sin\chi_p \\
&\quad \left.-\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_2)\sin(\psi_p-\psi_1)-\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_1)\sin(\psi_p-\psi_2)\right\}, \\
a_2^{QM} &= -\frac{3G^3m^3\eta}{2c^4r^4}\sum_{k=1}^2w_k\nu^{2k-3}\chi_k^2\left[\sin\chi_p-\sin^2\kappa_k\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_k)\right. \tag{2.86} \\
&\quad \left.\times\left[5\sin\chi_p\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_k)+2\sin(\psi_p-\psi_k)\right]\right\}, \tag{2.87}
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_3^{SO} + a_3^{SS} + a_3^{QM}, \tag{2.88} \\
a_3^{SO} &= \frac{G^2m^2\eta}{c^3r^3}\sum_{k=1}^2(4\nu^{2k-3}+3)\chi_k\sin\kappa_k \\
&\quad \times\left\{\frac{Gm\mu}{L_N}\left[\cos(\psi_p+\chi_p-\psi_k)+\frac{A_N}{Gm\mu}\cos(\psi_p-\psi_k)\right]-\frac{3\dot{r}}{2}\sin(\psi_p+\chi_p-\psi_k)\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3^{SS} &= -\frac{3G^3 m^3 \eta}{c^4 r^4} \chi_1 \chi_2 [\cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(\psi_p + \chi_p - \psi_2) + \cos \kappa_2 \sin \kappa_1 \cos(\psi_p + \chi_p - \psi_1)] , \\
a_3^{QM} &= -\frac{3G^3 m^3 \eta}{2c^4 r^4} \sum_{k=1}^2 w_k \nu^{2k-3} \chi_k^2 \sin 2\kappa_k \cos(\psi_p + \chi_p - \psi_k) .
\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy r , $\dot{r}$, v^2 és L_N a választott változóiban jelenjenek meg, fenti egyenletekbe még behelyettesítendőek (2.19)-(2.20), (2.22), (2.60) és (2.61) egyenletek.

2.5. Általános perturbáló erő hatásai

Az alfejezet összes alább levezetendő eredménye tetszőleges perturbáló erő esetén érvényes. A 2.4 alfejezetben levezetett a_i együttthatókat helyettesítve az eredményekbe, 2PN pontosságú, vezető rendű SO, SS és QM járulékokat tartalmazó explicit kifejezésekhez jutunk.

2.5.1. Kepleri mozgásállandók

A kepleri mozgásállandók $E_N \equiv \mu v^2/2 - Gm\mu/r$, $\mathbf{L}_N \equiv \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ és $\mathbf{A}_N \equiv \mathbf{v} \times \mathbf{L}_N - Gm\mu \hat{\mathbf{r}}$ definíciójából kiindulva rövid számolással beláthatók:

$$\dot{E}_N = \mu \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{a} , \quad (2.89)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_N = \mu \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{a} , \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{A}}_N &= \Delta \mathbf{a} \times \mathbf{L}_N + \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{L}}_N \\
&= \mu [2(\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{a}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{a}) \mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \Delta \mathbf{a}] .
\end{aligned} \quad (2.91)$$

Az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{v}$ -nek a $\mathcal{K}_A$ bázisban való (2.18)-(2.21) felbontását, az egységnyi tömegre ható perturbáló erő (2.83) felbontását, majd tetszőleges $\mathbf{V}$ időderiváltjára vonatkozó

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{V} \hat{\mathbf{V}} + V \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{V}} \quad (2.92)$$

összefüggést használva, a következő kifejezésekhez jutunk, melyek megadják a kepleri mozgásállandók nagyságának változását:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_N &= -a_1 \frac{Gm\mu^2}{L_N} \sin \chi_p + a_2 \frac{\mu (A_N + Gm\mu \cos \chi_p)}{L_N} , \\
\dot{A}_N &= a_2 L_N + (a_2 \cos \chi_p - a_1 \sin \chi_p) \frac{\mu r (A_N + Gm\mu \cos \chi_p)}{L_N} , \\
\dot{L}_N &= (a_2 \cos \chi_p - a_1 \sin \chi_p) \mu r .
\end{aligned} \quad (2.93)$$

Az irányok változására a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}_N &= \left[-a_1 \frac{L_N}{A_N} + \frac{Gm\mu^2}{L_N A_N} r \sin \chi_p (a_2 \cos \chi_p - a_1 \sin \chi_p) \right] \hat{\mathbf{Q}}_N - a_3 \frac{\mu r}{L_N} \sin \chi_p \hat{\mathbf{L}}_N , \\
\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{L}}_N &= a_3 \frac{\mu}{L_N} r \left(\sin \chi_p \hat{\mathbf{A}}_N - \cos \chi_p \hat{\mathbf{Q}}_N \right) ,
\end{aligned} \quad (2.94)$$

itt r (2.19) összefüggés segítségével írható át a χ_p valódi anomáliára.

2.5.2. Radiális a_r félnagytengely és e_r excentricitás

Az $A_N^2 = (Gm\mu)^2 + 2EL_N^2/\mu$ kényszer a (2.93) evolúciós egyenletek megőrzik, így csak két egyenlet független a háromból. Tetszőleges pályák esetén ezek átírhatók a $p_r = L_N^2/Gm\mu^2$ paraméter és $e_r = A_N/Gm\mu$ excentricitásra vonatkozó egyenletekké. Kötött pályák esetén p_r helyett az oszkuláló ellipszis $a_r = p_r/(1 - e_r^2) = L_N^2/Gm\mu^2(1 - e_r^2) = -Gm\mu/2E_N$ félnagytengelyét vezethetjük be, így az (a_r, e_r) páros fejlődésére vezethetünk le fejlődés-egyenleteket. Ily módon kapjuk a következő két *Lagrange planetáris egyenletet*:

$$\dot{a}_r = \frac{2a_r^{3/2}}{[Gma_r(1 - e_r^2)]^{1/2}} [-a_1 \sin \chi_p + a_2(e_r + \cos \chi_p)] , \quad (2.95)$$

$$\dot{e}_r = \left[\frac{a_r(1 - e_r^2)}{Gm} \right]^{1/2} \frac{a_2(1 + 2e_r \cos \chi_p + \cos^2 \chi_p) - a_1(e_r + \cos \chi_p) \sin \chi_p}{(1 + e_r \cos \chi_p)} . \quad (2.96)$$

Felhasználtuk a (2.19) valódi anomália paraméterezés oszkuláló ellipszis pályaelemekkel kifejezett

$$r = \frac{a_r(1 - e_r^2)}{1 + e_r \cos \chi_p} \quad (2.97)$$

alakját.

2.5.3. A nem-inerciális $\mathcal{K}_A$ rendszer

A (2.94) egyenletek átírhatók precessziós egyenletek formájába a $\hat{\mathbf{Q}}_N = \hat{\mathbf{L}}_N \times \hat{\mathbf{A}}_N$, $\hat{\mathbf{L}}_N = -\hat{\mathbf{Q}}_N \times \hat{\mathbf{A}}_N$ helyettesítéseket hajtva végre az első, valamint az $\hat{\mathbf{A}}_N = \hat{\mathbf{Q}}_N \times \hat{\mathbf{L}}_N$, $\hat{\mathbf{Q}}_N = -\hat{\mathbf{A}}_N \times \hat{\mathbf{L}}_N$ helyettesítéseket a második egyenleten. Hasonló módon, definíciójából kiindulva számolható a $\hat{\mathbf{Q}}_N$ időderiváltja is. Következőt kapjuk:

$$\dot{\mathbf{f}}_{(i)} = \boldsymbol{\Omega}_A \times \mathbf{f}_{(i)} , \quad (2.98)$$

ahol a szögsebesség-vektor

$$\boldsymbol{\Omega}_A = a_3 \frac{\mu r \cos \chi_p}{L_N} \hat{\mathbf{A}}_N + a_3 \frac{\mu r \sin \chi_p}{L_N} \hat{\mathbf{Q}}_N - \left[a_1 \frac{L_N}{A_N} + (a_1 \sin \chi_p - a_2 \cos \chi_p) \frac{Gm\mu^2 r \sin \chi_p}{L_N A_N} \right] \hat{\mathbf{L}}_N . \quad (2.99)$$

Ezzel meghatároztuk a nem-inerciális $\mathcal{K}_A$ rendszer időfejlődését. Észrevehető, hogy (1) amennyiben $a_3 = 0$ (nincs a mozgás síkjából kifele mutató perturbáló erő), a mozgás síkja (azaz $\hat{\mathbf{L}}_N$) megmarad, közben pedig $\hat{\mathbf{A}}_N$ és $\hat{\mathbf{Q}}_N$ az $\hat{\mathbf{L}}_N$ körül precesszál; (2) ha $a_1 = a_2 = 0$ (mozgás síkjára merőleges perturbáló erő), az $\hat{\mathbf{A}}_N$ és $\hat{\mathbf{Q}}_N$ egymás körül precesszál, míg $\hat{\mathbf{L}}_N$ az $\mathbf{r}$ körül.

Az $\boldsymbol{\Omega}_A$ PN rendje $\mathcal{O}(\boldsymbol{\Omega}_A) = \varepsilon^{-1/2} \mathcal{O}(a_i/c)$. Felhasználva a_i (2.84)-(2.88) alakját,

valamint (2.66) becslést, megkapjuk a különböző járulékok PN rendjét:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\Omega_A^{PN}) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \mathcal{O}(1, \eta) \mathcal{O}(T^{-1}) , \\
\mathcal{O}(\Omega_A^{2PN}) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \mathcal{O}(1, \eta, \eta^2) \mathcal{O}(T^{-1}) , \\
\mathcal{O}(\Omega_A^{SO}) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \left[\sum_{k=1}^2 \mathcal{O}(1, \nu^{2k-3}) \chi_k \right] \mathcal{O}(T^{-1}) , \\
\mathcal{O}(\Omega_A^{SS}) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \mathcal{O}(\eta) \chi_1 \chi_2 \mathcal{O}(T^{-1}) , \\
\mathcal{O}(\Omega_A^{QM}) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \mathcal{O}(\eta) \left[\sum_{k=1}^2 \mathcal{O}(\nu^{2k-3}) w_k \chi_k^2 \right] \mathcal{O}(T^{-1}) .
\end{aligned} \tag{2.100}$$

2.5.4. A χ_p valódi anomália

Mivel az $\{\mathbf{f}_{(i)}\}$ bázis a mozgás síkjával és a periasztronnal együtt fejlődik, az $\mathbf{r} = x^i \mathbf{f}_{(i)}$ helyvektor [melyben x^i (2.18)-ből olvasható le] a $\mathbf{v} = \dot{x}^i \mathbf{f}_{(i)} + x^i \dot{\mathbf{f}}_{(i)} = \dot{x}^i \mathbf{f}_{(i)} + x^i \Omega_A \times \mathbf{f}_{(i)}$ módon változik. Felhasználva

$$\dot{x}^1 = \dot{r} \cos \chi_p - r \dot{\chi}_p \sin \chi_p , \quad \dot{x}^2 = \dot{r} \sin \chi_p + r \dot{\chi}_p \cos \chi_p , \quad \dot{x}^3 = 0 \tag{2.101}$$

összefüggéseket, a közvetlen számolás

$$\mathbf{L}_N = \mu r^2 \left[\dot{\chi}_p + \left(\Omega_A \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \right) \right] \hat{\mathbf{L}}_N \tag{2.102}$$

kifejezéshez vezet. Innen meghatározható

$$\dot{\chi}_p + \left(\Omega_A \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \right) = \frac{L_N}{\mu r^2} . \tag{2.103}$$

A megfelelő newtoni kifejezéshez képest az Ω_A precessziós szögsebesség $\hat{\mathbf{L}}_N$ menti komponense ad új tagot. A levezetett (2.103) összefüggés jelentősége abban áll, hogy segítségével az időderiváltak χ_p szerinti deriváltakká alakíthatók. Így a (2.93), (2.95)-(2.96) egyenletek közönséges differenciálegyenletekké alakíthatók.

Hasonló módszerrel levezethető v^2 , melynek segítségével

$$E_N = \frac{\mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\chi}_p^2)}{2} - \frac{Gm\mu}{r} + \mu r^2 \dot{\chi}_p \left(\Omega_A \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \right) + \frac{\mu r^2}{2} \left(\Omega_A \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \right)^2 . \tag{2.104}$$

A (2.103) egyenlet segítségével ebből előáll az

$$\dot{r}^2 = \frac{2E_N}{\mu} + \frac{2Gm}{r} - \frac{L_N^2}{\mu^2 r^2} \tag{2.105}$$

radiális egyenlet. Figyelemreméltó, hogy a precessziókból származó összes járulék kiegy-szerűsödött és a Kepler mozgás radiális egyenletét nyertük vissza. Ez azért nem meglepő, mert az E_N , $\mathbf{L}_N$ az oszkuláló *ellipszis* dinamikai mennyiségei.

2.5.5. Az $\hat{\mathbf{l}}$ felszálló csomó

A felszálló csomó (2.37) kifejezésének időderiváltja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{l}} &= -\dot{\psi}_p \left(\sin \psi_p \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} + \cos \psi_p \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \right) + \cos \psi_p \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} - \sin \psi_p \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \\ &= \cos \psi_p \left(\boldsymbol{\Omega}_A - \dot{\psi}_p \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right) \times \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} - \sin \psi_p \left(\boldsymbol{\Omega}_A - \dot{\psi}_p \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right) \times \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \\ &= \left(\boldsymbol{\Omega}_A - \dot{\psi}_p \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right) \times \hat{\mathbf{l}} . \end{aligned} \quad (2.106)$$

Hasonló módon, az $\hat{\mathbf{m}}$ időderiváltja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{m}} &= \dot{\psi}_p \left(\cos \psi_p \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} - \sin \psi_p \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \right) + \sin \psi_p \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} + \cos \psi_p \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \\ &= \cos \psi_p \left(\boldsymbol{\Omega}_A - \dot{\psi}_p \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right) \times \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} + \sin \psi_p \left(\boldsymbol{\Omega}_A - \dot{\psi}_p \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right) \times \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} \\ &= \left(\boldsymbol{\Omega}_A - \dot{\psi}_p \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right) \times \hat{\mathbf{m}} . \end{aligned} \quad (2.107)$$

Mit ahogy az várható volt, az $\hat{\mathbf{l}}$ és $\hat{\mathbf{m}}$ az

$$\boldsymbol{\Omega}_L = \boldsymbol{\Omega}_A - \dot{\psi}_p \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \quad (2.108)$$

szögsebességgel precesszál.

2.6. Az Euler szögek fejlődése

Az előző alfejezet eredményeiből kiindulva levezethető az Euler szögek időfejlődése is. Először vegyük észre, hogy a $\psi_p = \arccos(\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}})$ periasztron argumentum kifejezéséből kiindulva a (2.98) és (2.106) összefüggések felhasználásával azonossághoz jutunk.

2.6.1. Az α inklináció

Az inklináció $\alpha = \arccos(\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}})$ definíciójából, felhasználva $\mathbf{J}$ 2PN pontosságú megmaradását [62], valamint az $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ precessziójára levezetett összefüggést, kapjuk, hogy

$$-\sin \alpha \dot{\alpha} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \left(\boldsymbol{\Omega}_A \times \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right) = \boldsymbol{\Omega}_A \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{J}} \right) = -\sin \alpha \boldsymbol{\Omega}_A \cdot \hat{\mathbf{l}} , \quad (2.109)$$

vagyis

$$\dot{\alpha} = a_3 \frac{\mu r \cos(\psi_p + \chi_p)}{L_N} . \quad (2.110)$$

2.6.2. A felszálló csomó $-\phi_n$ hossza

A (2.13) összefüggés felhasználásával

$$\dot{\phi}_n = -a_3 \frac{\mu r \sin(\psi_p + \chi_p)}{L_N \sin \alpha} . \quad (2.111)$$

Mint ahogy az várható volt, mind az inklináció, mind a felszálló csomó hossza csupán a pályasíkra merőleges perturbáló erő hatására változhat.

2.6.3. A periasztron ψ_p argumentuma

A (2.14) és (2.111) összefüggések felhasználásával $\psi_p + \chi_p$ fejlődésére kapjuk, hogy

$$\dot{\psi}_p + \dot{\chi}_p = \frac{L_N}{\mu r^2} - a_3 \frac{\mu r \sin(\psi_p + \chi_p)}{L_N \tan \alpha} . \quad (2.112)$$

Ismét csak a perturbáló erő $\hat{\mathbf{L}}_N$ menti komponense ad járulékot. A (2.112) és (2.103) összefüggések megadják a harmadik Euler szög fejlődését:

$$\boldsymbol{\Omega}_A \cdot \hat{\mathbf{L}}_N - \dot{\psi}_p = a_3 \frac{\mu r \sin(\psi_p + \chi_p)}{L_N \tan \alpha} . \quad (2.113)$$

A baloldal pontosan $\boldsymbol{\Omega}_L \cdot \hat{\mathbf{L}}_N$. Felhasználva $\boldsymbol{\Omega}_L$ ilymódon előállt $\hat{\mathbf{L}}_N$ menti komponensének alakját, expliciten felírhatjuk $\boldsymbol{\Omega}_L$ korábban meghatározott (2.108) kifejezését. Az $\hat{\mathbf{l}}$ és $\hat{\mathbf{m}}$ egységvektorok precessziós szögsebessége tehát

$$\boldsymbol{\Omega}_L = a_3 \frac{\mu r}{L_N} \left[\cos \chi_p \hat{\mathbf{A}}_N + \sin \chi_p \hat{\mathbf{Q}}_N + \frac{\sin(\psi_p + \chi_p)}{\tan \alpha} \hat{\mathbf{L}}_N \right] . \quad (2.114)$$

A szögletes zárójel első két tagja nem más, mint $\hat{\mathbf{r}}$. Amennyiben nincs pályasíkra merőleges perturbáló erő, $\hat{\mathbf{l}}$ és $\hat{\mathbf{m}}$ változatlan.

A ψ_p fejlődését megadó egyenlet részletesen

$$\dot{\psi}_p = -a_1 \frac{L_N}{A_N} - (a_1 \sin \chi_p - a_2 \cos \chi_p) \frac{Gm\mu^2 r \sin \chi_p}{L_N A_N} - a_3 \frac{\mu r \sin(\psi_p + \chi_p)}{L_N \tan \alpha} . \quad (2.115)$$

Az (2.110), (2.111) és (2.115) egyenletek *Lagrange planetáris egyenletek* a szögjellegű pályaelemekre. A (2.103) egyenlet felhasználásával az időderiváltak ismét χ_p szerinti deriváltakká alakíthatók, így közönséges differenciálegyenletekké válnak.

2.7. A spin-szögek fejlődése

2.7.1. A κ_i spin polár szögek

A $\kappa_i = \arccos(\hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N)$ spin polár szögek a (2.63) spin-precessziók és az $\hat{\mathbf{L}}_N$ fejlődése miatt változnak:

$$-\sin \kappa_i \dot{\kappa}_i = \left(\boldsymbol{\Omega}_A \times \hat{\mathbf{L}}_N \right) \cdot \hat{\mathbf{S}}_i + \hat{\mathbf{L}}_N \cdot \left(\boldsymbol{\Omega}_i \times \hat{\mathbf{S}}_i \right) = \left(\boldsymbol{\Omega}_A - \boldsymbol{\Omega}_i \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_N \times \hat{\mathbf{S}}_i \right) . \quad (2.116)$$

A spin (2.39) kifejezéséből kapjuk, hogy

$$\hat{\mathbf{L}}_N \times \hat{\mathbf{S}}_i = \sin \kappa_i \left[\sin(\psi_p - \psi_i) \hat{\mathbf{A}}_N + \cos(\psi_p - \psi_i) \hat{\mathbf{Q}}_N \right] , \quad (2.117)$$

így

$$\dot{\kappa}_i = \left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_N \right) \sin(\psi_p - \psi_i) + \left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_N \right) \cos(\psi_p - \psi_i) - a_3 \frac{\mu r}{L_N} \sin(\psi_p + \chi_p - \psi_i) . \quad (2.118)$$

A spinek pályasíkhöz viszonyított iránya nem változik, ha a perturbáló erő a pályasíkban található ($a_3 = 0$) és a spin-precessziós tengely $\hat{\mathbf{L}}_N$. Utóbbi feltétel teljesül az

SO precesszió esetén, de az SS és QM korrekciók esetén már nem [kivéve, ha a spinek merőlegesek a pályasíkra, amikor $a_3 = 0$, lásd (2.88), azaz $\dot{\kappa}_i = 0$]. A fenti és $a_3 \propto \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ észrevételből, valamint a (2.67) becslésekből kiindulva általános esetben elmondható, hogy

$$\mathcal{O}(\dot{\kappa}_i) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \mathcal{O}(\eta) [w_i \chi_i + \mathcal{O}(\nu^{2i-3}) \chi_j] \mathcal{O}(T^{-1}). \quad (2.119)$$

2.7.2. A spinek γ relatív szöge

A $\gamma = \arccos(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2)$ időderiváltja a következőt adja

$$-\sin \gamma \dot{\gamma} = (\boldsymbol{\Omega}_1 - \boldsymbol{\Omega}_2) \cdot (\hat{\mathbf{S}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_2). \quad (2.120)$$

Amennyiben a spinek párhuzamosak (azonos vagy ellentétes iránnyal), $\hat{\mathbf{S}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_2 = 0$, így $\dot{\gamma} = 0$, a tömegaránytól függetlenül.

Általános esetben $(\hat{\mathbf{S}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_2) \cdot \hat{\mathbf{S}}_i = 0$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$-\frac{c^2 r^3}{3G} \sin \gamma \dot{\gamma} = \left(\frac{(\nu - \nu^{-1})}{2} \mathbf{L}_N + \{\hat{\mathbf{r}} \cdot [(1 - w_2 \nu^{-1}) \mathbf{S}_2 - (1 - w_1 \nu) \mathbf{S}_1]\} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (\hat{\mathbf{S}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_2). \quad (2.121)$$

Egyenlő tömegű ($\nu = 1$) fekete lyukak ($w_i = 1$) esetén $\dot{\gamma} = 0$, a spinek irányától függetlenül.

A (2.39) felbontás felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_2 &= [\cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(\psi_p - \psi_2) - \sin \kappa_1 \cos \kappa_2 \sin(\psi_p - \psi_1)] \hat{\mathbf{A}}_N \\ &\quad + [\cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(\psi_p - \psi_2) - \sin \kappa_1 \cos \kappa_2 \cos(\psi_p - \psi_1)] \hat{\mathbf{Q}}_N \\ &\quad + \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) \hat{\mathbf{L}}_N, \end{aligned} \quad (2.122)$$

így

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{S}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(\psi_p + \chi_p - \psi_2) - \sin \kappa_1 \cos \kappa_2 \sin(\psi_p + \chi_p - \psi_1), \\ (\hat{\mathbf{S}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_2) \cdot \hat{\mathbf{L}}_N &= \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(\psi_2 - \psi_1). \end{aligned} \quad (2.123)$$

A (2.121) egyenlet tehát

$$\begin{aligned} -\frac{c^2 r^3}{3GL_N} \sin \gamma \dot{\gamma} &= \frac{(\nu - \nu^{-1})}{2} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ &\quad + \left[(1 - w_2 \nu^{-1}) \frac{S_2}{L_N} \sin \kappa_2 \cos(\psi - \psi_2) - (1 - w_1 \nu) \frac{S_1}{L_N} \sin \kappa_1 \cos(\psi - \psi_1) \right] \\ &\quad \times [\cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(\psi - \psi_2) - \sin \kappa_1 \cos \kappa_2 \sin(\psi - \psi_1)] \end{aligned} \quad (2.124)$$

alakban is írható. Ezen az alakon is könnyen ellenőrizhető, hogy a spinek közti szög megmarad egyenlő tömegű fekete lyukak esetén.

A fenti észrevételből, (2.120) összefüggésből és a (2.67) becslésekből kapjuk, hogy

$$\mathcal{O}(\dot{\gamma}) = \mathcal{O}(\varepsilon) \mathcal{O}(\nu^{3-2i}) \mathcal{O}(T^{-1}). \quad (2.125)$$

Tehát a γ szög a κ_i szögeknél gyorsabban változik.

2.7.3. A spin ψ_i azimutális szögei

A (2.29) összefüggésből $\psi_i = \arctan \left[(\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i) / (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i) \right]$ (a $\kappa_i = 0, \pi$ és $\psi_i = \pi/2, 3\pi/2$ esetek kivételével). Általános esetben kapjuk, hogy

$$(1 + \tan^2 \psi_i) \dot{\psi}_i (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i) = (\hat{\mathbf{m}} - \tan \psi_i \hat{\mathbf{l}}) \cdot \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{S}}_i + \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{m}} - \tan \psi_i \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{l}} \right) \cdot \hat{\mathbf{S}}_i. \quad (2.126)$$

Felhasználva, hogy $\hat{\mathbf{l}}$ és $\hat{\mathbf{m}}$ az Ω_L körül, míg $\hat{\mathbf{S}}_i$ az Ω_i körül precesszál:

$$\dot{\psi}_i \sin \kappa_i = (\cos \psi_i \hat{\mathbf{m}} - \sin \psi_i \hat{\mathbf{l}}) \cdot [(\Omega_i - \Omega_L) \times \hat{\mathbf{S}}_i]. \quad (2.127)$$

Felhasználva (2.37)-(2.38) egyenleteket

$$\dot{\psi}_i \sin \kappa_i = [\sin(\psi_p - \psi_i) \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} + \cos(\psi_p - \psi_i) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}}] \cdot [(\Omega_i - \Omega_L) \times \hat{\mathbf{S}}_i], \quad (2.128)$$

ahol $\Omega_i \times \hat{\mathbf{S}}_i$ vektori szorzatot (2.75) egyenlet adja és

$$\begin{aligned} \Omega_L \times \hat{\mathbf{S}}_i &= a_3 \frac{\mu r}{L_N} \left\{ \left[\frac{\sin \kappa_i}{\tan \alpha} \sin(\psi_p - \psi_i) \sin(\psi_p + \chi_p) + \cos \kappa_i \sin \chi_p \right] \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} \right. \\ &\quad + \left[\frac{\sin \kappa_i}{\tan \alpha} \cos(\psi_p - \psi_i) \sin(\psi_p + \chi_p) - \cos \kappa_i \cos \chi_p \right] \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \\ &\quad \left. - \sin \kappa_i \sin(\psi_p + \chi_p - \psi_i) \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

A behelyettesítések után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= (\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}) + [(\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}}) \sin(\psi_p - \psi_i) - (\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}}) \cos(\psi_p - \psi_i)] \cot \kappa_i \\ &\quad - a_3 \frac{\mu r}{L_N} [\cot \alpha \sin(\psi_p + \chi_p) - \cot \kappa_i \cos(\chi_p + \psi_p - \psi_i)]. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Ezzel levezettük az összes spin-szög fejlődésegyenletét.

A (2.130) fejlődésegyenletet összevetve az (2.67) becsléssel:

$$\mathcal{O}(\dot{\psi}_i) = \mathcal{O}(\varepsilon) \mathcal{O}(1, \eta) \mathcal{O}(T^{-1}). \quad (2.131)$$

2.8. Speciális konfigurációk

A gravitációs sugárzás impulzust is elvisz a rendszerből. Abban az esetben, ha ez eléggé aszimmetrikusan történik, az impulzusmegmaradás értelmében az összeolvadás során keletkező új kompakt objektum ellenkező irányú impulzushoz jut. Konfigurációtól függően ez a hatás [76] jelentős lehet, akár a végső fekete lyuk galaxisból való kilökődéséhez is vezethet. Az irodalom külön tárgyalja a precesszió-mentes ($\kappa_i = 0$) [78] és precesszáló (általános κ_i) eseteket. A precesszáló esetek közül a mozgás síkjában fekvő, egymással ellenirányított konfiguráció kitüntetett, mivel ebben a konfigurációban találtak a (bezuhanás korszakára vonatkozó) numerikus szimulációk maximális kilökődési sebesség értékeket [77].

A fejezetben bemutatott formalizmus segítségével megvizsgálhatjuk, hogy e konfigurációt megőrzi-e a konzervatív dinamika a bespirálózás korszakában.

A pályasíkban fekvő spinek esetén $\kappa_i = \pi/2$. Némi átalakítás után a (2.118) egyenlet így írható:

$$\begin{aligned}\dot{\kappa}_i &= \frac{G^2 m^2 \eta}{2c^3 r^3} \left(K_i^{SO} + K_i^{SS} + K_i^{QM} \right), \\ K_i^{SO} &= -\frac{\sin(\psi_p + \chi_p - \psi_i)}{1 + \frac{A_N}{Gm\mu} \cos \chi_p} \sum_{k=1}^2 (4\nu^{2k-3} + 3) \chi_k \\ &\quad \times \left[2 \cos(\psi_p + \chi_p - \psi_k) + \frac{A_N}{Gm\mu} [2 \cos(\psi_p - \psi_k) - 3 \sin \chi_p \sin(\psi_p + \chi_p - \psi_k)] \right], \\ K_i^{SS} &= \nu^{2j-3} \chi_j [3 \sin(2\psi_p + 2\chi_p - \psi_i - \psi_j) + \sin(\psi_j - \psi_i)], \\ K_i^{QM} &= 3w_i \chi_i \sin(2\psi_p + 2\chi_p - 2\psi_i).\end{aligned}\tag{2.132}$$

A K_i^{SO} , K_i^{SS} , K_i^{QM} járulékok valamennyien azonos rendűek. Általános esetben $\dot{\kappa}_i$ nem nulla, még az igen speciális körpályán mozgó ($A_N = 0$), egyenlő tömegű ($\nu = 1$), maximális spinű ($\chi_i = 1$) fekete lyukak ($w_i = 1$) esetében sem, amikor

$$\dot{\kappa}_i = -\frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} [2 \sin(2\psi_p + 2\chi_p - 2\psi_i) + 2 \sin(2\psi_p + 2\chi_p - \psi_i - \psi_j) + 3 \sin(\psi_j - \psi_i)].\tag{2.133}$$

Tehát általában a mozgás síkjában fekvő spinek konfigurációját nem őrzi meg a dinamika.

Azonban a mozgás síkjában fekvő ($\kappa_i = \pi/2$), egyenlő tömegű ($\nu = 1$), egyenlő spin-nagyságú ($\chi_2 = \chi_1$), ellenirányított ($\psi_j = \psi_i + \pi$) fekete lyukak ($w_i = 1$) esetében

$$\begin{aligned}a_3 &= 0, \\ \boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_N &= \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} \chi_1 \cos(\psi_p - \psi_i), \\ \boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_N &= -\frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} \chi_1 \sin(\psi_p - \psi_i), \\ \boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N &= \frac{7G}{2c^2 r^3} J \cos \alpha,\end{aligned}\tag{2.134}$$

így (2.118) értelmében $\dot{\kappa}_i = 0$ (az SO járulék eltűnik, az SS és QM járulékok kiejtik egymást).

Most már csupán azt kell megvizsgálunk, az ellenirányítottságot megőrzi-e a dinamika. Egyrészt (2.120) egyenletből már beláttuk, hogy az egyenlő tömegű fekete lyukak közti szög megmarad. Független megerősítésként $a_3 = 0$ az (2.129) egyenletben $\boldsymbol{\Omega}_L \times \hat{\mathbf{S}}_i = 0$ feltételhez vezet, míg (2.75) összefüggésből

$$\boldsymbol{\Omega}_i \times \hat{\mathbf{S}}_i = \frac{7G}{2c^2 r^3} J \cos \alpha \left[\sin(\psi_p - \psi_i) \hat{\mathbf{A}}_N + \cos(\psi_p - \psi_i) \hat{\mathbf{Q}}_N \right]\tag{2.135}$$

következik. Így (2.130) értelmében

$$\dot{\psi}_i = \frac{7G}{2c^2 r^3} J \cos \alpha.\tag{2.136}$$

Mivel a jobboldal nem függ az i indextől, másodszor is beláttuk, hogy a spinek ellenirányítottsága megőrizhető. A (2.53)-(2.54) kényszeregyenletek szintén triviálisan teljesülnek.

Tehát az egyenlő tömegű, egyenlő, de ellenirányított, a mozgás síkjában fekvő spinű fekete lyukak konfigurációját a vezető rendű SO, SS és QM járulékokkal kiegészített konzervatív PN dinamika megőrzi a bespirálozás során.

Felhasználva a (2.55) egyenletet

$$\dot{\psi}_i = \frac{7G}{2c^2 r^3} L_N (1 + \epsilon_{PN} + \epsilon_{2PN}) , \quad (2.137)$$

ahol az együtthatók az egyenlő tömegű esetben

$$\epsilon_{PN} = \frac{1}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{13}{4} \frac{Gm}{c^2 r} , \quad (2.138)$$

$$\epsilon_{2PN} = \frac{3}{128} \left(\frac{v}{c} \right)^4 - \frac{13}{32} \frac{Gm}{c^2 r} \left(\frac{\dot{r}}{c} \right)^2 + \frac{63}{32} \frac{Gm}{c^2 r} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right)^2 . \quad (2.139)$$

2.9. Összefoglalás

A kompakt spines kettős rendszer fejlődését egy $\mathbf{J}$ teljes impulzusmomentumhoz és tetszőleges $\hat{\mathbf{x}}$ tengelyhez kapcsolt inerciarendszerben három Euler szög (α inklináció, felszálló csomó $-\phi_n$ hossza, periasztron ψ_p argumentuma), az oszkuláló ellipszis alakját meghatározó a_r félnagytengely és e_r excentricitás, valamint a spinek κ_i polár és ψ_i azimutális szögei adják meg. Ezen belül a teljes-, newtoni pálya-, és két spin-impulzusmomentum geometriája 5 szögváltozóval jellemezhető (inklináció, spin polár és azimutális szögek), melyekhez a teljesség kedvéért hozzá kell venni egy skálázó mennyiséget, a teljes impulzusmomentum J nagyságát (mely a konzervatív dinamika megmaradó mennyisége). További (konzervatív dinamikában megmaradó) fizikai paraméterek az m_i tömegek, a w_i állapotegyenlet-paraméterek és a χ_i dimenziótlan spin-nagyságok. Utóbbiakat a (2.53)-(2.54) kényszerek kapcsolják össze a többi változóval.

Az összes említett változónak a vezető rendű SO, SS és QM járulékokkal kiegészített konzervatív PN dinamika szerint történő időfejlődését tartalmazó egyenletet megadtam a második PN rendig bezárólag, ezek (2.110), (2.111), (2.115), (2.95), (2.96), (2.118), (2.130). A (kepleri módon értelmezett) χ_p valódi anomália fejlődését megadó (2.103) egyenletből következő

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{L_N}{\mu r^2} - \boldsymbol{\Omega}_A \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \right) \frac{d}{d\chi_p} \quad (2.140)$$

változócsere segítségével az egyenletrendszer átírható χ_p szerinti fejlődésekre. Így az $(\alpha, \psi_p, a_r, e_r, \kappa_i, \psi_i)$ változókra vonatkozó *elsőrendű közönséges differenciálegyenletekből álló zárt rendszer* áll elő a χ_p független változóban. A ϕ_n evolúciója lecsatolódik a rendszerről, valamint a spinek közti γ szög evolúciója is következmény.

Egyenlő tömegű fekete lyukakból álló kompakt kettősökre bebizonyítottam, hogy a vezető rendű SO, SS és QM járulékokkal kiegészített konzervatív PN dinamika értelmében:

(a) a spinek közti szög állandó,

(b) a párhuzamos (azonos vagy ellentétes irányítottságú) spinek esetén létezik olyan (időben változó, nem egyértelműen meghatározott) tengely, mely körül a két spin mereven forog,

(c) ellenirányított, azonos nagyságú spinek mozgás síkjában vett konfigurációja megmaradó (a spinek azonos szögsebességű 1PN precessziót végeznek a mozgás síkjában).

Utóbbi eredmény jelentősége az, hogy amennyiben a fenti konfiguráció bármely oknál fogva előáll, a bespirálozás során a dinamika ezt megőrzi és a fekete lyuk kettős a (numerikus futtatások eredményei szerinti) maximális kilökődést biztosító konfigurációban érkezik a bezuhanás szakaszába.

3. fejezet

Szekuláris spin és kvadrupól gravitációs sugárzási veszteségek

A 3.1 alfejezetben a gravitációs sugárzás által a kettős rendszerből elvitt energia számolását vázolom fel. Ismertetem a módszert, a változókat, majd a radiális periódus mentén való átlagolást. A szekuláris energia-veszteségekhez adott SS és QM járulékokat a 3.2 alfejezetben adom meg. A 3.3 alfejezet tartalmazza azt a fontos eredményt, hogy a választott pontosságig a spin vektorokat a gravitációs sugárzás nem változtatja meg. Az eredmények összefoglalását a 3.4 alfejezet tartalmazza.

3.1. Az energiaveszteség számolása

3.1.1. Gravitációs sugárzás

Gravitációs sugárzás akkor keletkezik, ha a kettős rendszer I^{ij} tömeg-kvadrupól momentuma időben lineáris vagy négyzetes rendtől eltérően változik. A gravitációs sugárzás által elvitt energiát az Einstein által levezetett kvadrupól formula adja:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \sum_{i,j} I^{(3)ij} I^{(3)ij} , \quad (3.1)$$

ahol a zárójelbe tett szám az időderiválás rendjét jelöli. A rendszer

$$I_N^{ij} = \mu (x^i x^j)^{STF} \quad (3.2)$$

kvadrupól-momentumának számolásakor az STF szimmetrikus, spúrmentes részt jelöl. Az impulzus és impulzusmomentum gravitációs sugárzását hasonló kifejezések adják meg. A vezető rend fölött a veszteségekbe magasabb tömeg-momentumok is belezácsolnak (például az oktapól-momentum), valamint az ún sebesség-multipól momentumok is, kezdve a sebesség-kvadrupól járulékkal [67]. Mivel az x^i koordináta második időderiváltja inercia-rendszerben gyorsulás-komponens, a 2.4 alfejezetben ismertetett összes járulék szerepet kap benne. Így a veszteségeknek lesznek SO, SS, QM részei.

A kvadrupól-formula vezető rendben 2.5 PN rendű veszteségekhez vezet:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\left(\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}\right) &= \frac{(G/c^5)(\mu r^2/T^3)^2}{\mu v^2} = \mathcal{O}\left(\frac{Gm}{c^2 r}\right) \mathcal{O}\left(\frac{c^2}{v^2}\right) \mathcal{O}\left(\frac{r^5}{c^5 T^5}\right) \mathcal{O}(\eta) \mathcal{O}(T^{-1}) \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^{5/2}) \mathcal{O}(\eta) \mathcal{O}(T^{-1}) . \end{aligned}$$

Ehhez képest az SO, SS, QM gravitációs sugárzási járulékok további 1,5 PN, illetve 2PN renddel kisebbek. Az SS és QM sugárzási veszteségekről elmondhatjuk például, hogy 2PN sugárzási rendben vagy 4,5 PN abszolút rendben jelennek meg.

3.1.2. Az energiaveszteség számolásához használt dinamikai változók

Azoknak a változóknak gravitációs sugárzás miatt történő megváltozása érdekes, melyeknek nincs szekuláris konzervatív változása. Ebben az esetben ugyanis a vezető rendű evolúció a gravitációs sugárzás miatt bekövetkező disszipáció. Az előző fejezetben ismertetett konzervatív dinamika értelmében a megmaradó változók: a_r (vagy E_N), e_r (vagy A_N), J , κ_i lesznek.

Az előző fejezetben használt (a_r, e_r) vagy (E_N, A_N) változók helyett a korai [3], [4], [5] munkáinkban levezetett disszipatív veszteségekben az $(E, \bar{L})$ változók szerepelnek. Itt $\bar{L}$ az SS és QM járulékok miatt meg nem maradó pálya-impulzusmomentum vektor nagyságának szögátlagos egy radiális periódusra [3]. Szintén bevezettem az $(E, \bar{L})$ mennyiségekhez tartozó kepleri ellipszishez tartozó Laplace-Runge-Lenz vektor-hosszát, $\bar{A}$ -t. Az eredmények ismertetéséhez szükséges tehát megadni az átjárást a változók között.

Ez a dinamika tanulmányozásán keresztül valósítható meg. Az oszkuláló ellipszis E_N , L_N dinamikai mennyiségei nem maradnak meg a mozgás során. Mint azt a [62] forrásban belátták, a rendszer

$$E = E_N + E_{PN} + E_{2PN} + E_{SO} + E_{SS} + E_{QM} \quad (3.3)$$

összenergiája azonban megmaradó, hasonlóan a $\mathbf{J}$ teljes impulzusmomentumhoz.

A (2.6), (2.16) és (2.17) egyenletekből származtatható:

$$v^2 = \frac{2E_N}{\mu} + \frac{2Gm}{r} , \quad (3.4)$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2E_N}{\mu} + \frac{2Gm}{r} - \frac{L_N^2}{\mu^2 r^2} . \quad (3.5)$$

Az (3.5) radiális egyenletben szereplő E_N , L_N mennyiségeket a dinamikát jellemző E , L mennyiségekkel fogom kifejezni. Ennek előnye, hogy E megmaradó, L -ből pedig származtatható egy megmaradó mennyiség, ahogy azt a következőkben látni fogjuk. Előtte azonban expliciten bemutatom a kétféle változópáros kapcsolatát.

Az energia és a pálya-impulzusmomentum négyzetének explicit alakjai

Az előző fejezetben megadott gyorsulásokkal ekvivalens Lagrange függvényekből származtathatók a megfelelő energiajárulékok (a PN és a 2PN a [67] munkában, az SO (Newton-

Wigner-Price féle spin-választás mellett) a [73] munkában, az SS a [3] és a QM a [5] munkákban szerepel)¹:

$$E_{PN} = \mu c^2 \left\{ \frac{3}{8} (1 - 3\eta) \frac{v^4}{c^4} + \frac{1}{2} (3 + \eta) \frac{Gm}{c^2 r} \frac{v^2}{c^2} + \frac{\eta}{2} \frac{Gm}{c^2 r} \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right)^2 \right\}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} E_{2PN} = & \mu c^2 \left\{ \frac{5}{16} (1 - 7\eta + 13\eta^2) \frac{v^6}{c^6} - \frac{3}{8} \eta (1 - 3\eta) \frac{Gm}{c^2 r} \frac{\dot{r}^4}{c^4} \right. \\ & + \frac{1}{8} (21 - 23\eta - 27\eta^2) \frac{Gm}{c^2 r} \frac{v^4}{c^4} + \frac{1}{8} (14 - 55\eta + 4\eta^2) \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right)^2 \frac{v^2}{c^2} \\ & + \frac{\eta}{4} (1 - 15\eta) \frac{Gm}{c^2 r} \frac{v^2}{c^2} \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{1}{4} (2 + 15\eta) \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right)^3 \\ & \left. + \frac{1}{8} (4 + 69\eta + 12\eta^2) \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right)^2 \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$E_{SO} = 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} E_{SS} = & -\frac{G^3 m^4 \eta^2}{2c^4 r^3} \chi_1 \chi_2 \left\{ 3 \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 - \cos \gamma \right. \\ & \left. - 3 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos (2\chi_p - \zeta_{(+)}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} E_{QM} = & -\frac{G^3 m^4 \eta^2}{2c^4 r^3} \sum_{i=1}^2 w_i \chi_i^2 \nu^{2i-3} \\ & \times [1 - 3 \sin^2 \kappa_i \cos^2 (\chi_p - \zeta_i)] . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Innen kapjuk, hogy

$$E_N = E - E_{PN} - E_{2PN} - E_{SO} - E_{SS} - E_{QM}. \quad (3.11)$$

A pálya-impulzusmomentum járulékait (2.45)-(2.49) összefüggések adják meg. Ezek közül az SO járulékot a $\zeta_i = \psi_i - \psi_p$ jelölésekkel egyszerűbb alakra írhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{SO}}^{NWP} = & -\frac{G^2 m^3 \eta^2}{2c^3 r} \sum_{i=1}^2 (4\nu^{2i-3} + 3) \chi_i \left[\cos \kappa_i \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right. \\ & \left. + \sin \kappa_i \sin (\chi_p - \zeta_i) \left(\sin \chi_p \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} - \cos \chi_p \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{N}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A 2. fejezetben már szó volt arról, hogy a teljes pálya-impulzusmomentumnak nincsenek SS és QM járulécai. Nagyságának négyzete:

$$L^2 = (1 + 2\epsilon_{PN} + \epsilon_{PN}^2 + 2\epsilon_{2PN}) L_N^2 - L_N \frac{G^2 m^3 \eta^2}{c^3 r} \sum_{i=1}^2 (4\nu^{2i-3} + 3) \chi_i \cos \kappa_i. \quad (3.13)$$

¹Az 1PN és 2PN járulékokba visszaírtam G és c mennyiségeket. Az SS és QM járulékok [3] illetve [5] forrásokban található χ változója helyett itt χ_p szerepel, mivel vezető rendben ezek megegyeznek. A ψ_0 változó jelölése itt ψ_p és $\delta_i = 2(\psi_0 - \psi_i)$ helyett $-2\zeta_i$ változó szerepel, valamint $\zeta_{(+)} = \zeta_1 + \zeta_2$.

Ebből sorfejtéssel kapjuk, hogy

$$L_N^2 = (1 - 2\epsilon_{PN} + 3\epsilon_{PN}^2 - 2\epsilon_{2PN}) L^2 + \frac{G^2 m^3 \eta^2 L}{c^3 r} \sum_{i=1}^2 (4\nu^{2i-3} + 3) \chi_i \cos \kappa_i . \quad (3.14)$$

3.1.3. A pálya-impulzusmomentum nagysága

A fejezet további részében az egyszerűség kedvéért a vezető rend mellett csak a spin és kvadrupól tagokat tartom meg. Ez teljes mértékben elégséges a célul kitűzött spin és kvadrupól energiaveszteség járulékok számolásához.

A pálya-impulzusmomentum nagyságának fejlődése

Az (2.63)-(2.64) spinprecessziós egyenletekből és a teljes impulzusmomentum megmaradásból származtatható a pálya-impulzusmomentum fejlődése, valamint nagyságának evolúciója, az $\dot{L} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \dot{\mathbf{L}}$ összefüggés szerint. Mivel mind a spin-, mind a kvadrupól járulékok vezető rendűek a maguk nemében, a projekció képzésekor $\hat{\mathbf{L}}$ az $\hat{\mathbf{L}}_N$ vektorral helyettesíthető:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= -\hat{\mathbf{L}}_N \cdot (\dot{\mathbf{S}}_1 + \dot{\mathbf{S}}_2) = -\sum_{i=1}^2 \hat{\mathbf{L}}_N \cdot (\boldsymbol{\Omega}_i \times \mathbf{S}_i) \\ &= \frac{Gm^2\eta}{c} \sum_{i=1}^2 \nu^{2i-3} \chi_i \sin \kappa_i \left[-(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_N) \sin \zeta_i + (\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_N) \cos \zeta_i \right] . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Az utolsó lépés a (2.75) egyenletből a $\zeta_i = \psi_i - \psi_p$ jelöléscserével és (2.3) felhasználásával következik. A szögsebesség-projekciókat (2.72)-(2.73) egyenletek adják meg, ezek felhasználásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{3G^3 m^4 \eta^2}{c^4 r^3} \chi_1 \chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin (2\chi_p - \zeta_{(+)}) \\ &\quad + \frac{3G^3 m^4 \eta^2}{2c^4 r^3} \sum_{i=1}^2 \nu^{2i-3} w_i \chi_i^2 \sin^2 \kappa_i \sin (2\chi_p - 2\zeta_i) . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ez pontosan az SS és QM esetekben megadott változások összege. (A megfelelő jelöléscserék után a [3] munka (2.20) és a [5] munka (2.12) egyenleteinek összege.)

A radiális periódus felett átlagolt pálya-impulzusmomentum nagyság

Az $L(\chi_p)$ pillanatnyi pálya-impulzusmomentum a (3.16) egyszerű integrálásával kapható meg:

$$L(\chi_p) = L_0 + \int_0^{\chi_p} \dot{L} \frac{dt}{d\chi_p} d\chi_p . \quad (3.17)$$

Itt $L_0 = L(0)$ és elegendő az összes mennyiség nulladrendű részét venni az integrálban (hiszen az már önmagában is perturbáció). Így a korábban megadott (2.103) fejlődés egyenletből $dt/d\chi_p = \mu r^2/L_N$, ahol L_N állandó, mivel csak vezető rendben szükséges. A

(2.19) paraméterezés felhasználásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
 L(\chi_p) &= L_0 + \frac{3G^3m^6\eta^4}{c^4L_N^3} \chi_1\chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad \times \int_0^{\chi_p} (Gm\mu + A_N \cos \chi_p) \sin (2\chi_p - \zeta_{(+)}) d\chi_p \\
 &\quad + \frac{3G^3m^6\eta^4}{2c^4L_N^3} \sum_{i=1}^2 \nu^{2i-3} w_i \chi_i^2 \sin^2 \kappa_i \\
 &\quad \times \int_0^{\chi_p} (Gm\mu + A_N \cos \chi_p) \sin (2\chi_p - 2\zeta_i) d\chi_p \\
 &= L_0 + \frac{G^3m^6\eta^4}{2c^4L_N^3} \chi_1\chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 [\Theta(\chi_p; \zeta_{(+)}) - \Theta(0; \zeta_{(+)})] \\
 &\quad + \frac{G^3m^6\eta^4}{4c^4L_N^3} \sum_{i=1}^2 \nu^{2i-3} w_i \chi_i^2 \sin^2 \kappa_i [\Theta(\chi_p; 2\zeta_i) - \Theta(0; 2\zeta_i)] , \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

ahol

$$\Theta(y; x) = -A_N [\cos(3y - x) + 3 \cos(y - x)] - 3Gm^2\eta [\cos(2y - x)] . \quad (3.19)$$

Az így levezetett pillanatnyi $L(\chi_p) - L_0$ a [3] és [5] munkákban megadott járulékok összege. Belátható, hogy $L(0) = L(2\pi) = 0$, vagyis egy radiális periódus elteltével a pálya-impulzusmomentum nagysága ismét eredeti értékét veszi fel, annak ellenére, hogy a radiális periódus során értéke változik mind az SS, mind a QM járulékok miatt. Vezessük be a pálya-impulzusmomentum nagyságának szögátlagát:

$$\bar{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(\chi_p) d\chi_p . \quad (3.20)$$

Ehhez használjuk ki, hogy nulladrendben:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta(\chi_p; x) - \Theta(0; x)] d\chi_p = (4A_N + 3Gm^2\eta) \cos x , \quad (3.21)$$

így

$$\begin{aligned}
 \bar{L} &= L_0 + \frac{G^3m^6\eta^4 (4A_N + 3Gm^2\eta)}{2c^4L_N^3} \chi_1\chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos \zeta_{(+)} \\
 &\quad + \frac{G^3m^6\eta^4 (4A_N + 3Gm^2\eta)}{4c^4L_N^3} \sum_{i=1}^2 \nu^{2i-3} w_i \chi_i^2 \sin^2 \kappa_i \cos(2\zeta_i) . \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

A pillanatnyi pálya-impulzusmomentum nagyság

Vegyük észre, hogy az elsőrendű tagokban $L_N = L_0 = \bar{L}$, valamint $A_N = \bar{A}$ cserék végezhetők. Itt

$$\bar{A} = \left(G^2m^2\mu^2 + \frac{2E\bar{L}^2}{\mu} \right)^{1/2} \quad (3.23)$$

az E és $\bar{L}$ által meghatározott kepleri mozgás Laplace-Runge-Lenz vektora. Az $L(\chi_p)$ pálya-impulzusmomentum nagyság pillanatnyi értéke tehát felírható az átlagolt mennyiségek segítségével is, mint

$$\begin{aligned} L(\chi_p) &= \bar{L} + \delta L \\ \delta L &= \frac{G^3 m^6 \eta^4}{2c^4 \bar{L}^3} \chi_1 \chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \bar{\Theta}(\chi_p; \zeta_{(+)}) \\ &\quad + \frac{G^3 m^6 \eta^4}{4c^4 \bar{L}^3} \sum_{i=1}^2 \nu^{2i-3} w_i \chi_i^2 \sin^2 \kappa_i \bar{\Theta}(\chi_p; 2\zeta_i) , \end{aligned} \quad (3.24)$$

ahol

$$\bar{\Theta}(\chi_p; x) = -\bar{A} [\cos(3\chi_p - x) + 3\cos(\chi_p - x)] - 3Gm^2\eta [\cos(2\chi_p - x)] . \quad (3.25)$$

Végül megjegyezzük, hogy mivel χ_p csak a perturbációkban elsőrendű tagokban jelentkezik, a fenti összefüggések érvényesek maradnak bármely másik olyan χ paraméterre, mely nulladrendben megegyezik χ_p -vel. Ezt a tulajdonságot használjuk ki az alfejezet hátralévő részében.

3.1.4. A radiális egyenlet és egy általánosított valódi anomália paraméterezés

Az (3.5) radiális egyenletben E_N , L_N mennyiségeket helyettesítsük az (3.11) és (3.14) kifejezéseikkel, utóbbiban pedig használjuk fel (3.24) összefüggést. Ismét csak a spin és kvadrupól tagok megtartásával (felhasználva, hogy $E_{SO} = 0$):

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{2(E - E_{SS} - E_{QM})}{\mu} + \frac{2Gm}{r} - \frac{\bar{L}^2 + 2\bar{L}\delta L}{\mu^2 r^2} \\ &\quad - \frac{G^2 m \bar{L}}{c^3 r^3} \sum_{i=1}^2 (4\nu^{2i-3} + 3) \chi_i \cos \kappa_i . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Az $r_{\min}$, $r_{\max}$ fordulópontok $\dot{r} = 0$ egyenlet megoldásaiként állnak elő, ezek explicit alakját [65], [3], [5], [73] munkákban adtuk meg. Ezután egy új $r(\chi)$ paraméterezését vezetjük be a radiális mozgásnak, mely a következő feltételeknek tesz eleget

$$r(0) = r_{\min} , \quad r(\pi) = r_{\max} \quad (3.27)$$

$$\frac{dr}{d(\cos \chi)} = -\Gamma r^2 , \quad (3.28)$$

ahol Γ egy állandó. Az SO, SS és QM járulékokat tartalmazó új paraméterezést részletesen a [73] munkában adtuk meg, itt terjedelmi okokból ettől eltekintek. Mind azt bebizonyítottuk [91], [92] munkákban, a szekuláris effektusok számolásakor előálló integrálok számolása rendkívüli módon egyszerűsödik ebben a paraméterezésben: a komplex e^{ix} változóra való áttérés után az integrálok a reziduum-tétel segítségével számolhatók és az egyetlen pólus az origó lesz.

3.2. Spin és kvadrupól járulékok a szekuláris energiaszűrésben

A gravitációs sugárzás által okozott pillanatnyi energiaszűrést (3.1) explicit alakja adja meg. Ennek vezető rendű járuléka [93], SO és SS része [67], valamint QM része [5] munkákban található meg. Áttérve a fejezet korábbi részében ismertetett változókra a radiális perióduson átlagolt szekuláris energiaszűrést az előző alfejezetben ismertetett módszerrel számoltuk ki. Az SO járulékot a [65], az SS és QM járulékokat a [3] és [5] munkák tartalmazzák. Utóbbiakat (a vezető rendű járulékkal együtt) alább adom meg²:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_N + \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{SS} + \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{QM}, \quad (3.29)$$

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_N = -\frac{G^2 m (-2E\mu)^{3/2}}{15c^5 \bar{L}^7} (148E^2 \bar{L}^4 + 732G^2 m^2 \mu^3 E \bar{L}^2 + 425G^4 m^4 \mu^6), \quad (3.30)$$

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{SS-self} = \frac{G^4 m^4 \eta^2 (-2E\mu)^{3/2}}{960c^9 \bar{L}^{11}} \sum_i \nu^{2i-3} \chi_i^2 [C_1 \sin^2 \kappa_i \cos 2\zeta_i + C_2 (6 + \sin^2 \kappa_i)], \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{S_1 S_2} &= -\frac{G^4 m^4 \eta^2 (-2E\mu)^{3/2}}{480c^9 \bar{L}^{11}} \chi_1 \chi_2 \\ &\times (C_3 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos \zeta_{(+)} + C_4 \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 + C_5 \cos \gamma), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{QM} &= -\frac{G^4 m^4 \eta^2 (-2E\mu)^{3/2}}{30c^9 \bar{L}^{11}} \\ &\times \sum_{i=1}^2 w_i \nu^{2i-3} \chi_i^2 [C_6 \sin^2 \kappa_i \cos 2\zeta_i + C_7 (2 - 3 \sin^2 \kappa_i)], \end{aligned} \quad (3.33)$$

ahol a C_k együtthatók:

$$\begin{aligned} C_1 &= -(72E^3 \bar{L}^6 + 428G^2 m^2 \mu^3 E^2 \bar{L}^4 + 406G^4 m^4 \mu^6 E \bar{L}^2 + 105G^6 m^6 \mu^9), \\ C_2 &= -4(72E^3 \bar{L}^6 + 660G^2 m^2 \mu^3 E^2 \bar{L}^4 + 910G^4 m^4 \mu^6 E \bar{L}^2 + 315G^6 m^6 \mu^9), \\ C_3 &= -(60744E^3 \bar{L}^6 + 602668G^2 m^2 \mu^3 E^2 \bar{L}^4 + 819798G^4 m^4 \mu^6 E \bar{L}^2 + 266825G^6 m^6 \mu^9), \\ C_4 &= 4(17064E^3 \bar{L}^6 + 241140G^2 m^2 \mu^3 E^2 \bar{L}^4 + 453670G^4 m^4 \mu^6 E \bar{L}^2 + 199899G^6 m^6 \mu^9), \\ C_5 &= -12(2056E^3 \bar{L}^6 + 28260G^2 m^2 \mu^3 E^2 \bar{L}^4 + 52430G^4 m^4 \mu^6 E \bar{L}^2 + 22911G^6 m^6 \mu^9), \\ C_6 &= -\mu \bar{A}^2 (948E^2 \bar{L}^4 + 7832G^2 m^2 \mu^3 E \bar{L}^2 + 6775G^4 m^4 \mu^6), \\ C_7 &= 708E^3 \bar{L}^6 + 10020G^2 m^2 \mu^3 E^2 \bar{L}^4 + 18865G^4 m^4 \mu^6 E \bar{L}^2 + 8316G^6 m^6 \mu^9. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Az (3.31) spin-önkölsönhatási járulék a [3] munkám megjelenéséig sem pillanatnyi, sem szekuláris formában nem volt ismert, míg az $S_1 S_2$ és QM járulékokok szekuláris alakja új, saját eredmény.

Az energiaszűrésből (körpálya esetben) származtattuk a gravitációs hullám fázisát [69], mely (az amplitudóval együtt) a gravitációs hullámok ún. „matched filtering” mód-

²A [3] munka jelöléseiből a $\psi_i - \psi_0 = \zeta_i$ és $(S_i/m_i)^2 = (G/c)^2 m^2 \eta \nu^{2i-3} \chi_i^2$ helyettesítésekkel kapjuk az SS járulékokat. A [5] munka jelöléseiből $\delta_i = -2\zeta_i$ és $p_i = -(G^2/c^4) w_i \eta \nu^{2i-3} \chi_i^2$ helyettesítésekkel kapjuk a QM járulékokat.

szerrel történő keresésében fontos szereppel bír és beépült a jelenleg használatos keresési algoritmusokba [94].

A [3], [4], [5] munkákban az $\bar{L}$, κ_i , γ megfelelő veszteségeit is megadtam / megadtuk (ezeket terjedelmi okokból itt nem ismertetem), így elsőrendű zárt differenciálegyenlet formájában állnak elő a sugárzási veszteségek.

3.3. A spin vektor 2PN sugárzási rendben

A fejezetet azzal a fontos megjegyzéssel zárom, hogy a gravitációs sugárzás sem a spinek nagyságát, sem irányát nem befolyásolja. Vezető rendben tengelyszimmetrikus testek sugárzási fejlődése a Burke-Thorne potenciálból (annak gradiense a reakcióerő minusszorosa) származtatható [63]. A [64] munkában levezettük, hogy a reakcióerő a spineknek csak az irányát változtatja meg (1,5 PN rendben a vezető sugárzási rend után, azaz 4PN rendben), míg nagysága változatlan a tekintett 2,5PN+2PN pontosságig. A korábban ismertetett átlagolási eljárás segítségével a [4] munkám második fejezetében bebizonyítottam, hogy a pillanatnyi változás egy radiális periódus alatt kiátlagolódik, így *a spinvektorok szekuláris megváltozása nulla*:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{S}_i}{dt} \right\rangle = 0 . \quad (3.35)$$

Ennek az eredménynek a következő fejezetben lesz jelentősége, amikor a spines kettős rendszer konzervatív és disszipatív fejlődését egyidőben tárgyalom majd.

3.4. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a kompakt kettős rendszerek disszipatív fejlődését vizsgáltam. Megmutattam az átjárást a konzervatív dinamikát ismertető 2 fejezet változóiból a disszipatív dinamikát alkalmasan leíró változóikba, és ismertettem a szekuláris sugárzási effektusok számolásának technikáját. A vezető rendű (N), a PN, 2PN és SO járulékok ismertek voltak, ezért itt a SS és QM járulékok levezetésének módját adtam meg. Az önkölcsönhatási spin járulékok létezése munkám előtt nem volt ismert. A levezetett új eredmények közül terjedelmi okokból csak a szekuláris energiaveszteséget adtam meg, a szekuláris pályaimpulzuszmomentum veszteségeket és szekuláris szög-fejlődéseket a [3], [4] és [5] munkáim tartalmazzák, hasonlóan annak az eredményemnek a levezetését is, miszerint a spin vektoroknak nincs szekuláris sugárzási fejlődése.

4. fejezet

A spin-átfordulás jelensége és az X alakú rádiógalaxisok

Az X alakú rádiógalaxisok (XRG) a rádiógalaxisok egyre népesebb, jelenleg közel 100 tagú osztályát alkotják. Az X alakot két egymással szöget bezáró nyaláb-pár adja. A nyalábok (jet-ek) aktív galaxismagok (AGN) központi szupernehéz fekete lyukából erednek. A szupernehéz fekete lyukak körül akkréciós korong található, az akkréció (plazmarészecskék közel-körpályán) bonyolult, nyílt és zárt erővonalakat egyaránt tartalmazó mágneses mezőt hoz létre. Az akkréciós folyamatok és mágneses mező együttes hatásának eredménye, hogy a korongra merőleges irányokban Poynting-fluxus formájában energia távozik, ennek szerepe, hogy impulzusmomentumot vigyen el a rendszerből (a fekete lyuk az akkréció miatt egyre gyorsabban forog, viszont az ÁRE egy maximális forgásnál gyorsabb forgást nem enged meg Kerr fekete lyukak esetén). A jelenségekört kimerítő irodalom tanulmányozta [95]-[98]. A környezettel való kölcsönhatás során nagyenergiájú részecskékből álló, kiloparszek (vagy ennél is nagyobb) hosszúságú nyalábok alakulnak ki, melyek az akkréciós korongra merőlegesek. Mivel az akkréciós korong (egyensúlyi helyzetben) a fekete lyuk egyenlítői síkjában helyezkedik el, a nyaláb egyúttal a fekete lyuk spinjének irányát is kijelöli. A továbbiakban feltesszük, hogy a nyalábok és a spinek iránya azonos. Ebből következik, hogy amennyiben két nyaláb-párat észlelünk adott rádió-forrásban, akkor vagy két fekete lyuk okozza ezeket, vagy egyetlen fekete lyuk spinjének iránya változott meg valamilyen ok következtében. Utóbbi esetet valószínűsíti, hogy a nyaláb-párok spektruma általában nem egyforma, egyiküknek meredek a rádió spektruma, ami azzal magyarázható, hogy a közelmúltban nem kapott energia-utánpótlást (vagyis régi nyalábról van szó, ún. szinkrotron kora tipikusan néhányszor 10^7 év). Ezzel szemben a másik aránylag lapos spektrummal rendelkezik, ez egy fiatal nyaláb [99]. A fekete lyuk spinjének irányváltozására természetes magyarázatot ad egy másik fekete lyukak való egyesülés folyamata. A 2. fejezetben láttuk, hogy 2PN rendig a *teljes* impulzusmomentum marad meg, így egy bejövő kisebb fekete lyuk pálya-impulzusmomentuma jelentős változást okozhat a nagyobb fekete lyuk spinjében. A bezuhanás korszakának numerikus vizsgálatából már korábban is ismert volt, hogy összemérhető tömegű fekete lyukak összeolvadása a spin-irányok megváltozásához vezet [100].

A fejezetben ismertetem a spin-átfordulást magyarázó saját modellt. Felhasználok, hogy a szupernehéz fekete lyukak egyesülésüket megelőzően, a bespirálozási szakaszban precesszálnak, valamint gravitációs sugárzási disszipáció hat rájuk. A 4.1 alfejezetben meghatározom, hogy milyen távolságtól kezdődően lesz a gravitációs sugárzás a vezető disszipatív hatás. A 4.2 alfejezetben a két szupernehéz fekete lyuk tömegarányát vizsgálva a [6] munkában található érvelésnél pontosabb alakban is belátom, hogy a legvalószínűbb tömegarány $\nu = m_2/m_1 = 0,03 \div 0,3$ tartományban található. A 4.3 alfejezetben a domináns precessziós hatás (az SO precesszió) valamint a vezető rendű, körpályán átlagolt gravitációs sugárzás figyelembevételével megmutatom, hogy ebben a tömegaránytartományban a domináns spin jelentős irányváltoztatáson esik át a bespirálozás során [6]. A minimális irányváltozás szögét a 4.4 alfejezetben vezetem le, [7] eredményeinek felhasználásával. Végül a 4.5 alfejezetben összehasonlítom az XRG-k keletkezésének spin-átfordulási mechanizmussal való magyarázatát egyéb magyarázatokkal [85]. A fejezet eredményeinek tömör összefoglalását a 4.6 alfejezet tartalmazza.

4.1. A gravitációs sugárzás, mint domináns disszipatív hatás

A szupernehéz fekete lyukak galaxisok központi részében található. Anya-galaxisaik találkozásait és egyesülését követően a dinamikai surlódás (a másik galaxis csillag-populációjával való kölcsönhatás) hatására egymáshoz olyan közel kerülnek, ahol a gravitációs sugárzás válik a legjelentősebb disszipatív hatássá. Ennek következtében végül összeolvadnak. A következőkben meghatározzuk, hogy milyen szeparációnál válik dominánssá a kibocsátott gravitációs hullámok által képviselt disszipáció.

A gravitációs sugárzás tipikus időskáláját következő módon kaphatjuk meg. Tekintsük a legegyszerűbb esetet, a (kvázi-)körpályát. A newtoni körpálya feltétel (gravitációs erő=centripetális erő) adja, hogy egzaktul teljesül

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{Gm}{c^2 r} = \varepsilon . \quad (4.1)$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E &= -\frac{Gm\mu}{r} = -c^2 m \varepsilon \eta , \\ \bar{L} &= L = \mu r v = \frac{G}{c} m^2 \varepsilon^{-1/2} \eta . \end{aligned} \quad (4.2)$$

A [6] munkában a gravitációs sugárzás időskáláját következőképpen értelmeztük

$$\frac{1}{t_{GW}} = -\frac{\dot{L}}{L} \approx \frac{32c^3}{5Gm} \varepsilon^4 \eta , \quad (4.3)$$

ahol $\dot{L}$ a gravitációs sugárzás miatt bekövetkező pillanatnyi pálya-impulzuszmomentum veszteség volt. Mivel ezt nem adtam meg a 3. fejezetben, a gravitációs sugárzás időskáláját a következőképpen becsülöm meg:

$$\frac{1}{t_{gw}} \simeq \frac{1}{E} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_N . \quad (4.4)$$

A (3.30) szekuláris energiaveszteség, a körpálya-feltételek, valamint a PN paraméter és tömegarány definícióinak behelyettesítése után:

$$\frac{1}{t_{gw}} \simeq \frac{106\sqrt{2}c^3}{5Gm} \varepsilon^4 \eta . \quad (4.5)$$

A kétféle definíció által adott időskála csupán egy 4,68 szorzóban különbözik egymástól, míg az össztömegtől, tömegaránytól és posztnewtoni paramétertől (vagyis szeparációtól, relativ sebességtől) egyformán függenek. A továbbiakban megadandó nagyságrendi becslésekhez ezért a (4.3) definíciót is alkalmazhatjuk.

A bejövő (kisebb) fekete lyuk pálya-impulzuszmomentuma a környező csillagpopulációval való kölcsönhatás miatt csökken. Ennek karakterisztikus időskálája [101]:

$$t_{DF} = \frac{v^3}{2\pi G^2 m_2 \rho_{distr} \Lambda} \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 . \quad (4.6)$$

A sebesség maximálisan megengedhető változása $\Delta v = v$. A nevezőben szereplő $\Lambda = \ln(b_{max}/b_{min})$, a rendszerben lévő legnagyobb és tipikus távolság arányának logaritmus; utóbbi nagy a (gáz-, por-) felhők esetén, így $\Lambda \approx 1$, míg csillagok és sötét anyag részecskék esetén kicsi, azaz $\Lambda \approx 10 \div 20$. Az általunk vizsgált esetben az első becslés alkalmazható, így [101] gondolatmenetét követve $\Lambda = 3$. A ρ_{distr} sűrűségű kompakt csillagdisztribúció m_{distr} tömege a fekete lyuk kettős m tömegével összemérhető [102], [103], r_{distr} sugara pedig néhány parszek. Gömbszimmetrikus eloszlást feltételezve,

$$\rho_{distr} = \frac{3m}{4\pi r_{distr}^3} . \quad (4.7)$$

A PN paraméter és tömegarány definíciója alkalmazásával így

$$\frac{1}{t_{DF}} = \frac{9G^2}{2c^3} \frac{m^2}{r_{distr}^3} \varepsilon^{-3/2} \eta (1 + \nu) . \quad (4.8)$$

A két időskála a PN paraméter következő értékénél válik összehasonlíthatóvá:

$$\varepsilon^* = K(\nu) \left(\frac{Gm}{c^2 r_{distr}} \right)^{6/11} , \quad (4.9)$$

ahol

$$K(\nu) = \left[\frac{45}{64} (1 + \nu) \right]^{2/11} \in (0,938, 1,064) \quad (4.10)$$

egységnyi nagyságú szorzó. Az ε^* PN paraméterhez az

$$r^* = K^{-1}(\nu) \left(\frac{Gm}{c^2} \right)^{5/11} r_{distr}^{6/11} \quad (4.11)$$

szeparáció tartozik. Megfigyelhető, hogy a fenti mennyiségek tömegaránytól való függése igen gyenge, ez a $2/11$ hatvány miatt van. (Vagyis más Λ és $\Delta v/v$ értékekre is hasonló eredményt kaptunk volna.)

A PN paraméter a tömegtől és a csillagpopuláció sugarától $m^{6/11}$, illetve $r_{distr}^{-6/11}$ módon függ:

$$\varepsilon^* \approx 10^{-3} \left(\frac{m}{10^8 M_\odot} \right)^{6/11} \left(\frac{5 \text{ pc}}{r_{distr}} \right)^{6/11}, \quad (4.12)$$

míg az a szeparáció, ahol a gravitációs sugárzás a dinamikai surlódásnál erősebb disszipatív hatássá válik, $m^{5/11}$ és $r_{distr}^{6/11}$ függéseket mutat:

$$r^* \approx 0.005 \text{ pc} \left(\frac{m}{10^8 M_\odot} \right)^{5/11} \left(\frac{r_{distr}}{5 \text{ pc}} \right)^{6/11}. \quad (4.13)$$

Az $r_{distr} = 5 \text{ pc}$ és $m = 10^8 M_\odot$ értékek mellett $\varepsilon^* \approx 10^{-3}$ és $r^* \approx 0.005 \text{ pc}$. Ha $m = 10^9 M_\odot$, akkor $r^* \approx 0.01 \text{ pc}$.

Következésképpen a gravitációs sugárzás, mint vezető disszipatív hatás határát kijelölő távolság és PN paraméter egyaránt igen gyengén függ mind a csillagpopuláció sugarától, mind a teljes tömegtől. Ennél még gyengébben, elhanyagolható módon függ a tömegaránytól.

A gravitációs sugárzási disszipáció által dominált, PN sorfejtéssel leírható dinamika tehát az $\varepsilon \in (\varepsilon^* \approx 10^{-3}, r_{ms} \lesssim 10^{-1})$ PN paramétertartományban alkalmazható (itt r_{ms} az adott pontosságú közelítés marginálisan stabil körpályája).

4.2. A tipikus tömegarány

Szupermasszív fekete lyukak találkozásakor a tipikus tömegarányt [6] munkában becsültük meg. A gondolatmenetet (az ott megadottnál precízebb alakban) az alábbiakban ismertetem.

A galaxisok központjában található szupernehéz fekete lyukak $\Phi_{BH}(M_{BH})$ eloszlási függvénye hatványfüggvény, exponenciális levágással [104]. Ez igen jól közelíthető egy tört hatványfüggvénnyel [105]–[107], amit a megfigyelések is megerősítenek [108]. Az eloszlási függvény az $m_a \simeq 3 \times 10^6 M_\odot$ alsó tömeg-korlátától az $m_* \simeq 10^8 M_\odot$ töréspontig a $\Phi_{BH}(M_{BH}) \propto M_{BH}^{-\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} \in (1, 2)$ hatványfüggést követi, majd onnan az $m_b \simeq 3 \times 10^9 M_\odot$ -ig a $\Phi_{BH}(M_{BH}) \propto M_{BH}^{-\tilde{\beta}}$, $\tilde{\beta} \geq 3$ függést. Becslésünket a $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ legkisebb megengedett értékeivel fogjuk végezni. Megjegyezzük még, hogy az m_a , m_b és m_* értékekből látszik, hogy minkét tömegtartományban a felső korlát hozzávetőleg 30-szorosa az alsónak.

Adott $q = \nu^{-1} \geq 1$ tömegarányhoz tartozó $d\mathcal{N}/dq$ találkozások száma arányos a két fekete lyuk tömeg szerinti eloszlási függvényének és az F találkozási rátájának szorzata felett vett, a kisebb fekete lyuk m_2 tömege szerinti integrállal:

$$\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \propto \int_{m_a}^{m_b/q} \Phi_{BH}(m_2) \Phi_{BH}(qm_2) F(q, m_2) dm_2. \quad (4.14)$$

A találkozási ráta arányos a hatáskeresztmetszettel (elhanyagoljuk a galaxisok relatív sebességétől való gyenge függést, mivel a galaxisok sebessége nem túlságosan különbözik egymástól; a szökési sebességkülönbség elérése a Hubble-időnél hosszabb lenne).

A hatáskeresztmetszet meghatározásához feltesszük, hogy galaxisok összeolvadása esetén a központi szupernehéz fekete lyukak is egyesülnek, így a továbbiakban a galaxisok egyesülésének hatáskeresztmetszetét becsüljük meg. Megjegyezzük továbbá, hogy a galaxisok központjában található fekete lyukak és anyaggalaxisaik tömegei korrelációban vannak, mivel

- a központi szupernehéz fekete lyuk tömege és az őt tartalmazó galaxis központi dudorának (bulge) tömege korrelációban van [109],
- a központi szupernehéz fekete lyuk tömege arányos mind a szferoidális galaxistömeg-komponenssel, mind a galaxis teljes (sötét anyagot is tartalmazó) tömegével [110].

Feltehető, hogy a nehezebb fekete lyuk, azaz a nehezebb galaxis határozza meg az F találkozási rátát. Mivel a galaxis hatáskeresztmetszete a galaxis tömegének függvénye, utóbbi pedig a becslés szempontjából arányosnak vehető a központi fekete lyuk tömegével, a találkozási ráta $F \sim (qm_2)^\xi$ függést mutat. Modellünkben $\xi = 1/2$ értéket vettük, a következő megfigyelésre alapozva:

- a mi galaxisunk összehasonlítása szférikus törpegalaxisokkal azt mutatja, hogy a sugár 10-szeres növekedése (a hatáskeresztmetszet 10^2 -szoros növekedése) a tömeg 10^4 -szoros növekedésével jár együtt [111]-[112].

Mint korábban megjegyeztük, a hatványfüggvény m_* törési pontja a szupernehéz fekete lyukak tömegtartományát két $q_* = 30$ intervallum-határ arányú részre osztja. Ennek figyelembevételével (az összes tömeget m_* tömegre normálva) kapjuk, hogy amennyiben $q \in [1, 30]$, a találkozások száma

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \right|_{q \in [1, 30]} &\propto \int_{m_a}^{m_*/q} \left(\frac{m_2}{m_*} \right)^{-\tilde{\alpha}} \left(\frac{m_2 q}{m_*} \right)^{-\tilde{\alpha}} \left(\frac{m_2 q}{m_*} \right)^\xi dm_2 \\ &+ \int_{m_*/q}^{m_*} \left(\frac{m_2}{m_*} \right)^{-\tilde{\alpha}} \left(\frac{m_2 q}{m_*} \right)^{-\tilde{\beta}} \left(\frac{m_2 q}{m_*} \right)^\xi dm_2 \\ &+ \int_{m_*}^{m_b/q} \left(\frac{m_2}{m_*} \right)^{-\tilde{\beta}} \left(\frac{m_2 q}{m_*} \right)^{-\tilde{\beta}} \left(\frac{m_2 q}{m_*} \right)^\xi dm_2 . \end{aligned} \quad (4.15)$$

amikor pedig $q \in (30, 300]$, akkor

$$\left. \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \right|_{q \in [30, 1000]} \propto \int_{m_a}^{m_b/q} \left(\frac{m_2}{m_*} \right)^{-\tilde{\alpha}} \left(\frac{m_2 q}{m_*} \right)^{-\tilde{\beta}} \left(\frac{m_2 q}{m_*} \right)^\xi dm_2 . \quad (4.16)$$

A (4.15) első sora az alsó tömegtartományból származó két fekete lyuk, a középső sor egy alsó- és egy felső tömegtartományból származó fekete lyuk, a harmadik pedig két felső tömegtartományból származó fekete lyuk találkozásából származik. A $q \leq 30$ feltétel biztosítja, hogy az integrálok felső határa nagyobb legyen az alsónál. Végül (4.16) egy alsó és egy felső tartománybeli fekete lyuk páros találkozását fejezi ki.

Az m_2 feletti integrálás következőket adja

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \right|_{q \in [1,30]} &\propto \frac{q^{\xi-\alpha}}{1+\xi-2\alpha} \left[\left(\frac{m_2}{m_\star} \right)^{1+\xi-2\alpha} \right]_{m_a}^{m_\star/q} \\
&+ \frac{q^{\xi-\beta}}{1+\xi-\alpha-\beta} \left[\left(\frac{m_2}{m_\star} \right)^{1+\xi-\alpha-\beta} \right]_{m_\star/q}^{m_\star} \\
&+ \frac{q^{\xi-\beta}}{1+\xi-2\beta} \left[\left(\frac{m_2}{m_\star} \right)^{1+\xi-2\beta} \right]_{m_\star}^{m_b/q} \\
&= \frac{q^{-1+\alpha} - 30^{(-1-\xi+2\alpha)} q^{\xi-\alpha}}{1+\xi-2\alpha} \\
&+ \frac{q^{\xi-\beta} - q^{-1+\alpha}}{1+\xi-\alpha-\beta} \\
&+ \frac{30^{(1+\xi-2\beta)} q^{-1+\beta} - q^{\xi-\beta}}{1+\xi-2\beta} , \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \right|_{q \in [30,1000]} &\propto \frac{q^{\xi-\beta}}{1+\xi-\alpha-\beta} \left[\left(\frac{m_2}{m_\star} \right)^{1+\xi-\alpha-\beta} \right]_{m_a}^{m_b/q} \\
&= \frac{30^{(1+\xi-\alpha-\beta)} q^{-1+\alpha} - 30^{(-1-\xi+\alpha+\beta)} q^{\xi-\beta}}{1+\xi-\alpha-\beta} . \tag{4.18}
\end{aligned}$$

(Itt felhasználtuk, hogy $m_b/m_\star \approx m_\star/m_a \approx 30$.) A választott $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 3$ és $\xi = 1/2$ értékek mellett ezek

$$\left. \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \right|_{q \in [1,30]} = \frac{0.185}{q^{0.5}} - \frac{2.99 \times 10^{-3}}{q^{2.5}} - 8.42 \times 10^{-10} q^2 - 2.69 \times 10^{-2} , \tag{4.19}$$

$$\left. \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \right|_{q \in [30,1000]} = \frac{33.17}{q^{2.5}} - 1.36 \times 10^{-6} . \tag{4.20}$$

A fenti összefüggésekbe normálásokat vezettem be, azaz megköveteltem az

$$\int_1^{30} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [1,30]} dq + \int_{30}^{1000} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [30,1000]} dq = 1 \tag{4.21}$$

összefüggés teljesülését.

Adott $[q_1, q_2]$ tömegarány tartományhoz tartozó találkozások számát $\mathcal{N}_{q_1 \div q_2} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} dq$ módon értelmezve, az $[1, 3]$, $[3, 30]$ illetve $[30, 1000]$ tartományokra a következő becslést kapom:

$$\mathcal{N}_{1 \div 3} = 21\% , \quad \mathcal{N}_{3 \div 30} = 66\% , \quad \mathcal{N}_{30 \div 1000} = 13\% . \tag{4.22}$$

A fentiek értelmében a legvalószínűbb tömegarány-tartomány a $q \in (3, 30)$, összhangban a [6] munka becsléseivel.

Ez a fontos eredmény szükségessé teszi a fekete lyukak összeolvadásának modellezését nemegyenlő tömegarányra¹. A tömegarány, mint második kis paraméter a bespirálózás

¹A bevezető szakaszát vizsgáló numerikus módszerek csak a közelmúltban váltak képessé nem-egyenlő tömegek esetét vizsgálni és eredményeket szolgáltatni, az 1/8 tömegarányra spines esetben [113], illetve annál kisebb tömegarányra, de a spinek elhanyagolásával [114].

4.1. táblázat. Az S_1/L nagyságának becslése az $\varepsilon = 10^{-3} \div 10^{-1}$ PN tartományban, a szupernehéz fekete lyuk kettősök különböző lehetséges tömegarányaira.

$S_1/L = \varepsilon^{1/2}\nu^{-1}$	$\varepsilon \approx 10^{-3}$	$\varepsilon \approx 10^{-1}$
$\nu = 1$	0.03 ($S_1 \ll L$)	0.3 ($S_1 < L$)
$\nu = 1/3$	0.1 ($S_1 < L$)	1 ($S_1 \approx L$)
$\nu = 1/30$	1 ($S_1 \approx L$)	10 ($S_1 > L$)
$\nu = 1/900$	30 ($S_1 \gg L$)	300 ($S_1 \gg L$)

szakaszában minőségileg új jelenségekhez vezet, mint ahogy azt a következő fejezetben látni fogjuk.

4.3. A spin-átfordulás mechanizmusa

Az itt tárgyalt mechanizmust a [6] munkában ismertettük részletesen.

4.3.1. A spinek és pálya-impulzusmomentum relatív nagysága

A spinek és pálya-impulzusmomentum relatív nagyságára vonatkozó becslések könnyen előállnak (2.3) és a newtoni $L_N = \mu r v$ kifejezések felhasználásával:

$$\frac{S_2}{S_1} = \nu^2 \frac{\chi_2}{\chi_1} . \quad (4.23)$$

$$\frac{S_i}{L} = \varepsilon^{1/2} \nu^{2i-3} \chi_i . \quad (4.24)$$

Láttuk, hogy a tipikus tömegarány $\nu \in (1/30, 1/3)$, ez egy második kis paramétert jelent az elméletben. Gyorsan forgó fekete lyukak esetén χ_i közel egységnyi, így $S_2 \ll S_1$, $S_2 \ll L$ valamint $S_1/L \approx \varepsilon^{1/2}\nu^{-1}$. Bár a bespirálozás elején $S_1 \ll L$, végefele már $S_1 \gg L$ teljesül. Ez a tulajdonság különbözteti meg a tipikus tömegarányt a $\nu \in [1/3, 1]$ összemérhető tömegek és a $\nu \in [1/900, 1/30]$ fekete lyuk - próbarészecskének tekinthető esetektől. Előbbiben $S_1 \ll L$, utóbbiban $S_1 \gg L$ a bespirálozás teljes időtartama alatt. Ezen becslések részletesen a 4.1 táblázatban láthatók.

Az S_1/L arány bespirálozás során egynél kisebb értékről egynél nagyobb értékre való változása okozza a következőkben tárgyalandó spin-átfordulás jelenséget.

4.3.2. A vezető rendű precessziók

A spinek vezető rendű SO precessziója és a teljes impulzusmomentum megmaradásából

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{G}{2c^2 r^3} [(4 + 3\nu) \mathbf{S}_1 + (4 + 3\nu^{-1}) \mathbf{S}_2] \times \mathbf{L} \quad (4.25)$$

következik. A ν tömegarányban sorfejtve, vezető rendben ($\mathbf{S}_2$ nagysága ν^2 -szer kisebb S_1 -nél, így elhanyagolható):

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = \frac{2G}{c^2 r^3} \mathbf{L} \times \mathbf{S}_1, \quad (4.26)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{2G}{c^2 r^3} \mathbf{S}_1 \times \mathbf{L}. \quad (4.27)$$

Az $\mathbf{L}_N$ -hez hozzáadtam $\mathbf{L}_{SO}$ -t, ez vezető rendben megengedett, így állt elő (4.26) jobb oldala. Ezek szerint, vezető rendben, az $\mathbf{S}_1$ és $\mathbf{L}$ egymás körül precesszálnak. Ha az eltűnő $(2G/c^2 r^3) \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ illetve $(2G/c^2 r^3) \mathbf{L} \times \mathbf{L}$ kifejezéseket adjuk a (4.26) és (4.27) precessziós egyenletek jobb oldalához, következőket kapjuk:

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = \frac{2G}{c^2 r^3} \mathbf{J} \times \mathbf{S}_1, \quad (4.28)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{2G}{c^2 r^3} \mathbf{J} \times \mathbf{L}, \quad (4.29)$$

vagyis úgy is tekinthetjük, hogy a precessziók $\mathbf{J}$ körül történnek. Utóbbi a 2PN konzervatív dinamika megmaradó iránya, így a $\mathbf{J}$ körüli precesszió rendkívül szemléletes jelentéssel bír.

4.3.3. Vezető rendű disszipatív dinamika

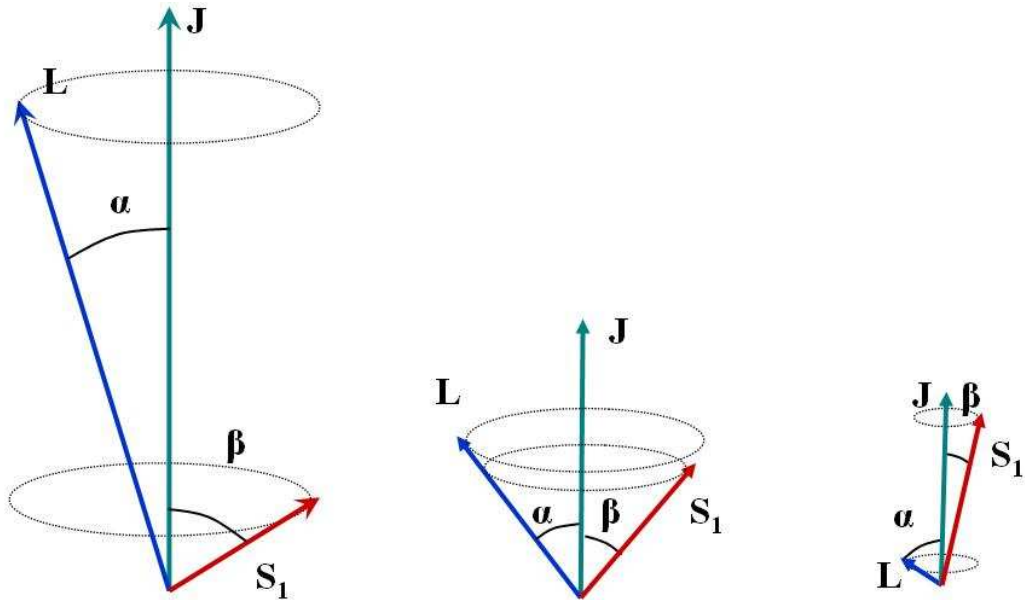
A 2.5 PN rendtől kezdődően a dinamika disszipatívvá válik, a gravitációs sugárzás energiát, impulzust és impulzusmomentumot visz el a rendszerből. A pálya excentricitása hamarabb „szétsugárzódik”, mint ahogy a félnagy tengely csökken, ezért a gravitációs sugárzás közel-körpályákhoz vezet [115]. A körpályán átlagolt vezető rendű pálya-impulzusmomentum veszteség

$$\dot{\mathbf{L}}^{GW} = -\frac{32G\mu^2}{5r} \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right)^{5/2} \hat{\mathbf{L}}. \quad (4.30)$$

A pálya-impulzusmomentum teljes változását (4.29) és (4.30) összege adja. Az SO precesszió és vezető rendű gravitációs sugárzási visszahatás figyelembevételével a körpályán átlagolt dinamikát [63] munkában írták fel, az $\mathbf{S}_2 = 0$ és a $\nu = 1$ esetekre. A tipikus $\nu \in (1/30, 1/3)$ tömegarány esetén, a ν szerinti sorfejtés vezető rendjére az első eset vonatkozik.

Mivel tetszőleges $\mathbf{X}$ vektor változása $\dot{\mathbf{X}} = X\dot{\hat{\mathbf{X}}} + \dot{X}\hat{\mathbf{X}}$, irányának megváltozását $\dot{\hat{\mathbf{X}}} = (\dot{\mathbf{X}} - \dot{X}\hat{\mathbf{X}})/X$ adja. Az $X^2 = \mathbf{X}^2$ azonosságból pedig $\dot{X} = \hat{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{X}}$ következik. Így (4.28)-(4.30) egyenletekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= 0, \\ \dot{\hat{\mathbf{S}}}_1 &= \frac{2G}{c^2 r^3} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{S}}_1, \\ \dot{L} &= -\frac{32G\mu^2}{5r} \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right)^{5/2}, \\ \dot{\hat{\mathbf{L}}} &= \frac{2G}{c^2 r^3} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{L}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$



4.1. ábra. A régi nyaláb az eredeti $\mathbf{S}_1$ spin irányába mutat. A két fekete lyuk közeledtével lassú, SO kölcsönhatás által generált precessziós mozgás kezdődik (bal oldali ábra) a teljes $\mathbf{J}$ impulzusmomentum iránya körül. A gravitációs sugárzási veszteségek olyanok, hogy a precessziós időskálán átlagolva $\mathbf{J}$ iránya megmarad. A pályasugár csökkenésével $\mathbf{L}$ nagysága is csökken. Mivel a spin nagyságát nem változtatja meg a gravitációs sugárzás, az α szög növekszik, a β pedig csökken. A precesszió felgyorsul, amikor $\mathbf{L}$ és $\mathbf{S}$ nagysága összemérhetővé válik, ami a $\nu \in (1/30, 1/3)$ tömegarány tartományban a bespirálozás során következik be (középső ábra). A gravitációs sugárzás miatt $\mathbf{L}$ nagysága tovább csökken, míg végül a teljes impulzusmomentum domináns részét a spin adja. Ezért a bespirálozás végén a spin vektor hozzávetőleg a kezdeti teljes impulzusmomentum irányába mutat, ami egyúttal hozzávetőleg a kezdeti pálya-impulzusmomentum iránya is (jobb oldali ábra). Az új spin irányában újabb nyaláb alakulhat ki. A spin-átfordulás tehát még a bespirálozás korszakában bekövetkezik. A kezdeti és végső konfigurációk között a precesszió ún. szuper-szelet hozhat létre, mely "kisöpörheti" a régi nyaláb tövét. A megfigyelések alátámasztják az ilyen konfigurációk létezését [6].

A $\mathbf{J}$ teljes impulzusmomentum is megváltozik a gravitációs sugárzási visszahatás nyomán. Az (4.30) figyelembevételével (mivel más változás nincs), $\dot{\mathbf{J}} = \dot{L}\hat{\mathbf{L}}$, így

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{L} (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) , \\ \dot{\mathbf{J}} &= \frac{\dot{L}}{J} [\hat{\mathbf{L}} - (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) \hat{\mathbf{J}}] . \end{aligned} \quad (4.32)$$

A második (4.32) egyenletből látható, hogy amikor J kicsi $\dot{L}$ -hez képest, $\mathbf{J}$ iránya gyorsan változik. Ez az ún. tranzíciós precesszió ritka esete [63], amire a későbbiekben még visszatérünk.

Az $\mathbf{L}$, $\mathbf{S}_1$ és $\mathbf{J}$ vektorok ν -ben vezető rendben parallelogrammát alkotnak, melynek szögei $\alpha = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{J}})$ és $\beta = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{J}})$. A (4.31) és (4.32) egyenletekből levezethető ezen szögek fejlődése

$$\dot{\alpha} = -\frac{\dot{L}}{J} \sin \alpha > 0 , \quad (4.33)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{L}}{J} \sin \alpha < 0 . \quad (4.34)$$

Utóbbi egyenletben felhasználtuk $\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{L}} = \cos(\alpha + \beta)$ összefüggést.

Gravitációs sugárzás hiányában, a (4.28) and (4.29) egyenletek értelmében az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{S}_1$ vektorok egyaránt a rögzített $\mathbf{J}$ körül precesszálnak. A gravitációs sugárzás a forgástengelyt megváltoztatja, azonban a pálya-impulzusmomentum és a domináns spin által bezárt $\alpha + \beta$ szög még így is állandó marad a bespirálozás során. A $\mathbf{J}$ és $\mathbf{L}$ közti szög növekszik, a $\mathbf{J}$ és $\mathbf{S}_1$ közti csökken. A folyamatot a 4.1 ábra mutatja be.

Az impulzusmomentum $\dot{\mathbf{J}} = \dot{L}\hat{\mathbf{L}}$ megváltozása a pálya-impulzusmomentum irányába esik. Mivel utóbbi $\mathbf{J}$ körül precesszál, $\mathbf{J}$ egy precesszió során történő átlagos megváltozása $\mathbf{J}$ irányú. Ez a fontos következtetés akkor érvényes, ha az Ω_p precessziós szögsebesség jóval nagyobb, mint $\dot{\alpha}$. Amennyiben összemérhetők lennének, $\dot{\mathbf{J}} = \dot{L}\hat{\mathbf{L}}$ változás $\mathbf{J}$ -re merőleges komponense már nem átlagolódna ki egy precesszió alatt, hiszen α jelentős növekedése miatt szignifikánsan különbözne a precesszió elején és végén.

Azaz az $\Omega_p \gg \dot{\alpha}$ feltételt teljesítő disszipatív dinamika (ún. egyszerű precesszió esete [63]) igen jó közelítésben az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{S}_1$ vektorok rögzített $\hat{\mathbf{J}}$ körül történő precessziójaként tekinthető. Mind az $\mathbf{L}$, mind a $\mathbf{J}$ nagysága fokozatosan csökken, míg $\mathbf{S}_1$ nagysága változatlan, lásd 3.3 alfejezetet. Így α növekszik, β pedig csökken. Mindez azt eredményezi, hogy a bespirálozás során $\mathbf{L}$ fokozatosan elfordul $\mathbf{J}$ -től, míg $\mathbf{S}_1$ közeledik hozzá. Ez történik az esetek túlnyomó részében.

Amennyiben $\Omega_p \approx \dot{\alpha}$ (tranzíciós precesszió), már nem érvényes, hogy $\dot{\mathbf{J}}$ precessziós időskálán való megváltozása $\hat{\mathbf{J}}$ irányú. Azaz $\mathbf{J}$ iránya minden precessziós ciklus után más, az evolúció igen bonyolulttá válik és analitikus megoldása nem ismert. Az alfejezet végén megmutatom, milyen esetekben lehet tranzíciós precesszióra számítani.

A sugárzási időskálát (4.3) egyenlet adja meg, a precessziós időskálát pedig a $\Omega_p = 2GJ/c^2 r^3$ kifejezésből származtatott

$$\Omega_p \approx \frac{2c^3}{Gm} \varepsilon^{5/2} \eta \frac{J}{L} \quad (4.35)$$

4.2. táblázat. Az $\dot{L}/L$ bespirálozási ráta, az Ω_p precessziós szögsebesség és a $\mathbf{L}$, $\mathbf{S}_1$ vektorok $\mathbf{J}$ -hez viszonyított $\dot{\alpha}$ szögváltozási sebessége, a bespirálozás $\nu = 1/30 \div 1/3$ tömegtartományban jellemző három ($L > S_1$, $L \approx S_1$ és $L < S_1$) egymást követő korszakában. A zárójelekben található számok inverz időskálák, s^{-1} egységben kifejezve; a $\nu = 10^{-1}$ tömegarány; 10^{-3} , 10^{-2} és 10^{-1} PN paraméter; illetve $m = 10^8 M_\odot$ (azaz $c^3/Gm = 2 \times 10^{-3} s^{-1}$) esetekre vonatkoznak.

	$L > S_1$	$L \approx S_1$	$L < S_1$
$-\dot{L}/L$	$\frac{32c^3}{5Gm}\varepsilon^4\eta$ ($\approx 10^{-15}$)	$\frac{32c^3}{5Gm}\varepsilon^4\eta$ ($\approx 10^{-11}$)	$\frac{32c^3}{5Gm}\varepsilon^4\eta$ ($\approx 10^{-7}$)
Ω_p	$\frac{2c^3}{Gm}\varepsilon^{5/2}\eta$ ($\approx 10^{-11}$)	$\frac{2c^3}{Gm}\varepsilon^{5/2}\eta\frac{J}{L}$ ($\approx 10^{-8}\frac{J}{L}$)	$\frac{2c^3}{Gm}\varepsilon^3$ ($\approx 10^{-5}$)
$\frac{\dot{\alpha}}{\sin(\alpha+\beta)}$	$\frac{32c^3}{5Gm}\varepsilon^{9/2}\frac{\eta}{\nu}$ ($\approx 10^{-16}$)	$\frac{32c^3}{5Gm}\varepsilon^{9/2}\frac{\eta}{\nu}\frac{L^2}{J^2}$ ($\approx 10^{-11}\frac{L^2}{J^2}$)	$\frac{32c^3}{5Gm}\varepsilon^{7/2}\eta\nu$ ($\approx 10^{-8}$)

összefüggéssel becsülhetjük meg, míg a pálya-impulzusmomentum (és a spin) irányváltozásának időskáláját

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} &\approx \frac{32c^3}{5Gm}\varepsilon^{7/2}\eta\nu\left(\frac{S_1}{J}\right)^2\sin(\alpha+\beta) \\
 &\approx \frac{32c^3}{5Gm}\varepsilon^{9/2}\eta\nu^{-1}\left(\frac{L}{J}\right)^2\sin(\alpha+\beta)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

kifejezés adja. Itt felhasználtuk

$$\sin\alpha = \frac{S_1}{J}\sin(\alpha+\beta) \approx \varepsilon^{1/2}\nu^{-1}\frac{L}{J}\sin(\alpha+\beta) \tag{4.37}$$

és (4.24) összefüggéseket. A három időskála összehasonlítása a bespirálozás $S_1/L \approx 0.3$, $S_1 \approx L$ és $S_1/L \approx 3$ korszakaiban 4.2 táblázatban látható. Az első sor felső (azaz nagyságrendi) becsléseket ad² a kettős rendszer összeolvadásáig szükséges időre: 30 millió év, 300 év, illetve néhány hónap. A második sorban látható számok azt mutatják, hogy a precessziós időskála a bespirálozás három szakaszában 3000 év, 3 év, illetve egy nap nagyságrendű. A harmadik sor számait az Ω_p^{-1} precessziós időskálával szorozva az irányváltozás szöge becsülhető. Ez precesszióként: 2 arcsec (6×10^{-4} arcsec/év) és 3 arcmin per precesszió (per nap) értékek között változik.

A táblázatból az is látható, hogy a precessziós ráta és az irányváltozási sebesség a bespirálozás $S_1 \approx L$ korszakában (amikor $\varepsilon^{1/2}\nu^{-1} \approx 1$) összemérhető lehet, amennyiben

$$\left[\frac{16}{5}\sin(\alpha+\beta)\right]^{-1/3}\frac{J}{L} \approx (\varepsilon^2\nu^{-1})^{1/3} \approx \varepsilon^{1/2} \approx \nu, \tag{4.38}$$

²A sugárzási időskála nem állandó, hanem időben növekszik, valamint a bezuhanás (rövid) szakaszát sem veszem itt figyelembe.

azaz $\nu = 10^{-1}$ és a szögletes zárójel egységnyi értéke esetén $J/L \approx 10^{-1}$, így $\dot{\alpha} \approx \Omega_p \approx 10^{-9}$ (ez még mindig 100-szor gyorsabb a gravitációs sugárzás okozta bespirálózásnál).

A J teljes impulzusmomentum csak abban az esetben vehet fel ilyen kis értéket, ha $\mathbf{L}$ és $\mathbf{S}_1$ szinte tökéletesen ellenirányított, azaz $\alpha + \beta \approx \pi - \delta$, $\delta \ll 1$, és $L \approx S_1$. Vajon a tranzíciós precesszió kialakulásának (4.38) feltétele milyen kényszert ad a δ eltérési szögére? Egyrészt

$$\frac{J}{L} = \frac{L \cos \alpha + S_1 \cos \beta}{L} \approx \delta \sin \alpha, \quad (4.39)$$

valamint (4.37) és (4.38) felhasználásával belátható, hogy a tranzíciós precesszió csak akkor következhet be, ha a tökéletes ellen-irányítottságtól való eltérés szöge igen kicsi, $\nu^{3/2}$ rendű. Megállapíthatjuk, hogy ez nem egy tipikus esete a szupernehéz fekete lyukak találkozásának.

Szupernehéz fekete lyukak tipikus találkozása (tetszőleges $\mathbf{L}$ és $\mathbf{S}_1$ közti szögek, $\nu \in (1/30, 1/3)$ tömegarány) esetén a bespirálózás során a domináns spin új irányba fordul, lehetőséget teremtve egy új nyaláb-pár kialakulására. Ez megmagyarázza, miként keletkezhetnek X alakú rádiógalaxisok (XRG), melyeknek egyik nyaláb-párja új, másik régi. A köztes precessziós periódusban, amennyiben a spin irányában energia hagyja el a rendszert, szuper-szélként viselkedve, kisöpri a régi nyaláb tövének tartományát. Hasonló helyzetre utaló megfigyelések (a két rádió tartományban látható lebeny - nyaláb maradvány - egymástól való eltávolodása) jól ismertek [86], [116].

4.3.4. A spin-átfordulás üteme

A (4.24) összefüggés felhasználásával, merőleges konfigurációban ($\alpha + \beta = \pi/2$) Pithagorasz tételéből $J^2 = L^2 + S_1^2$ így

$$\left(\frac{L}{J}\right)^2 = (1 + \varepsilon \nu^{-2} \chi_1^2)^{-1}. \quad (4.40)$$

Behelyettesítve (4.36) összefüggésbe kapjuk, hogy

$$\dot{\alpha} = C \nu^{-1} \varepsilon^{9/2} (1 + \varepsilon \nu^{-2} \chi_1^2)^{-1}, \quad (4.41)$$

ahol

$$C = \frac{32c^3 \eta}{5Gm} \quad (4.42)$$

állandó. Látható, hogy $\dot{\alpha}$ monoton növekvő függvénye ε -nak, azaz a csökkenő r -rel növekszik. Ez azt jelenti, hogy a spin-átfordulás üteme a bespirálózás során egyre gyorsul.

A bespirálózás alatti tetszőleges időintervallumban a spin-átfordulás szögét az adott időintervallum feletti integrálással kapjuk:

$$\delta\alpha = \int \dot{\alpha}(r) dt = \int \frac{\dot{\alpha}(r)}{\dot{r}_{GW}} dr. \quad (4.43)$$

Itt $\dot{r}_{gw}$ a sugár bespirálózás miatt bekövetkező változása. Mivel kepleri körpályán $L^2 = Gm\mu^2 r$, fennáll, hogy $\dot{r}_{GW} = 2(Gm\mu^2)^{-1} L \dot{L}^{GW}$. A (4.3) összefüggés felhasználásával így

$$\dot{r}_{gw} = -\frac{64\eta}{5} c \varepsilon^3, \quad (4.44)$$

valamint

$$\delta\alpha \approx \frac{5C}{64\eta\nu c} \int \frac{\varepsilon^{-1/2}}{1 + \varepsilon\nu^{-2}\chi_1^2} d\varepsilon . \quad (4.45)$$

Tipikus, $\nu \approx 0.1$ tömegarány esetén az $\varepsilon^* \approx 10^{-3}$ PN paraméter-értéknél kezdődő bespirálózás (itt $L > S_1$) első fázisa az $\varepsilon_1 \approx \nu^2\chi_1^{-2}$ értékig tart (ahol $L \approx S_1$ teljesül). Ezután a második fázisban folytatódik, mely $\varepsilon_{fin} = (Gm/c^2 r_{ms})$ értékig tart (itt $L < S_1$). Az r_{ms} a marginálisan stabil körpálya sugara. Közel maximális ($\chi_1 \lesssim 1$) spin esetén ez $r_{ms} \gtrsim 2Gm/c^2$, azaz ilyenkor $\varepsilon_{fin} \lesssim 0.5$. A két fázis alatt bekövetkező spin-átfordulások aránya

$$\frac{\delta\alpha_I}{\delta\alpha_{II}} = \frac{\int_{10^{-3}}^{10^{-2}} \frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+100\varepsilon} d\varepsilon}{\int_{10^{-2}}^{0.5} \frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+100\varepsilon} d\varepsilon} = 0.74 , \quad (4.46)$$

azaz összemérhetők.

Most vizsgáljuk meg, mennyi ideig tart a két fázis. Ezt hasonló módszerrel számoljuk

$$\delta t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{dr}{\dot{r}_{gw}} \right| = -\frac{5Gm}{64\eta c^3} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varepsilon^{-5} d\varepsilon = \frac{5Gm}{256\eta c^3} \varepsilon^{-4} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} , \quad (4.47)$$

és

$$\frac{\delta t_I}{\delta t_{II}} = \frac{\int_{10^{-3}}^{10^{-2}} \varepsilon^{-5} d\varepsilon}{\int_{10^{-2}}^{0.5} \varepsilon^{-5} d\varepsilon} \approx 9999 . \quad (4.48)$$

Beláttuk tehát, hogy a spin-átfordulás második fele hozzávetőleg 10^4 -szer gyorsabban zajlik az első felénél. Ez a megnövekedett PN paraméter és spin-átfordulási ütemek következménye. A fenti becslésekből látható, hogy a spin-átfordulás jelentős (mindenképpen megfigyelhető mértékű) része a bespirálózás idejének utolsó részében következik be. A 4.2 táblázatban bemutatott példában ez 3 év.

4.4. A spin-átfordulás szöge

4.4.1. A spin iránya a bespirálózás során

Kifejezem a J/S_1 arányt kétféleképpen: először a $J = L \cos \alpha + S_1 \cos \beta$ összefüggésből, $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$ behelyettesítéssel; másodszor a spin és teljes impulzusmomentum $\hat{\mathbf{L}}$ -irányú vetületének egyenlőségét felhasználva (vezető rendben), mely szerint $J \sin \alpha = S_1 \sin(\alpha + \beta)$. A kétféle kifejezés egyenlőségéből, felhasználva (4.24) összefüggést is, elemi trigonometriai összefüggések felhasználásával belátható, hogy:

$$\tan \alpha \approx \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\chi_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \nu + \cos(\alpha + \beta)} . \quad (4.49)$$

Ezzel meghatároztam a pálya-impulzusmomentumnak a teljes impulzusmomentum (megmaradó) irányához viszonyított szögét a spin nagysága, a spin és pálya-impulzusmomentum közti szög és a tömegarány függvényében. A kifejezésben szerepel még a PN paraméter értéke is, mely a szeparáció, illetve a sebesség függvénye. Mivel $\alpha + \beta$ állandó, (4.49) összefüggés a spin irányát is meghatározza.

A bespirálozás végét jellemző ε_{fin} paraméter értéket behelyettesítve a (4.49) összefüggésbe, a pálya-impulzusmomentum bespirálozás végén jellemző, $\hat{\mathbf{J}}$ tengelytől mért α_{fin} irányát kapjuk. Innen a spin végső iránya is származtatható. Itt jegyezzük meg, hogy numerikus futtatások eredményeire alapozva igen bonyolult végső spin formulákat már közöltek az irodalomban [79], azonban azok egyrészt összemérhető tömegű fekete lyukakra vonatkoznak, másrészt a bezuhanás korszakának történéseit jellemzik. Az itt vizsgált tömegarány-tartományban a bespirálozási korszak végére már csak elhanyagolható pálya-impulzusmomentum marad (a spinhez képest). Ennek a bezuhanás során történő szétsugárzása nem lehet túlságosan nagy hatással a végső spin irányra.

Sajátos esetek

Vizsgáljuk meg a következő sajátos eseteket:

i) A spin és pálya-impulzusmomentum azonos irányú (a bejövő fekete lyuk egyenlítői síkban érkezik), azaz $\alpha + \beta = 0$. A (4.49) összefüggés értelmében $\alpha = 0$, vagyis a spin megőrzi eredeti irányát. Ez az eset vonatkozik az ún. „nedves” összeolvadásokra (wet merger), ahol a környező anyaggal való kölcsönhatás a pályát egyenlítői síkba hozza.

ii) A spin és pálya-impulzusmomentum ellentétes irányú, $\alpha + \beta = \pi$. Mivel eredetileg a pálya-impulzusmomentum dominál (és meghatározza $\mathbf{J}$ irányát), $\alpha = \pi$.

iii) Azon $\alpha + \beta = \arccos(-\chi_1^{-1}\varepsilon^{-1/2}\nu)$ konfigurációkra, melyekre (4.49) jobb oldalának nevezője eltűnik, $\alpha = \pi/2$.

Tipikus konfigurációk a bespirálozás elején és végén

Mivel (4.33)-(4.34) egyenletek értelmében a bespirálozás során az $\alpha + \beta$ szög állandó, valamint χ_1 is állandó, adott tömegarány mellett α szög az ε függvénye lesz, azaz az r szeparációval és v sebességgel együtt változik.

Vizsgáljunk először meg egy tipikusnak mondható tömegarány értéket. A $\nu = 1/10$ esetén a bespirálozás kezdetén $(S_1/L)_{in} \approx \chi_1 \varepsilon_{in}^{1/2} \nu^{-1} = 0.316\chi_1$, végén pedig $(S_1/L)_{fin} \approx \chi_1 \varepsilon_{fin}^{1/2} \nu^{-1} = 3.162\chi_1$. Mivel $\tan \alpha \leq S_1/L$ és $\tan \beta \leq L/S_1$ (akkor egyenlők, ha a spin és a pálya-impulzusmomentum egymásra merőlegesek), kapjuk, hogy $\tan \alpha_{in} \leq 0.316\chi_1$ és $\tan \beta_{fin} \leq 0.316\chi_1^{-1}$. Maximális forgás esetén ($\chi_1 = 1$) kapjuk, hogy $\alpha_{in}, \beta_{fin} \leq 0.316 = 18.105^\circ$.

Majd vizsgáljuk meg, mit ad a (4.49) összefüggés a tipikus tömegarány-tartomány szélein.

A $\nu = 1/3$ tömegarányra $\tan \alpha_{in} \leq (S_1/L)_{in} \approx \chi_1 \varepsilon_{in}^{1/2} \nu^{-1} = 0.095\chi_1$, maximális forgás esetén így $\alpha_{in} \leq 0.095 = 5.44^\circ$, vagyis, mint vártuk, a pálya-impulzusmomentum és a teljes impulzusmomentum irányai igen közel esnek. Ez a feltétel tulajdonképpen a $\nu \in (1/3, 1)$ tartomány egészére fennáll. A (4.49) sorfejtésével kapjuk, hogy

$$\alpha_{in} \approx \chi_1 \varepsilon_{in}^{1/2} \nu^{-1} \sin \beta_{in} = 0.032\chi_1 \nu^{-1} \sin \beta_{in} . \quad (4.50)$$

A $\nu = 1/30$ tömegarányra $\tan \beta_{fin} \leq (L/S_1)_{fin} \approx \chi_1^{-1} \varepsilon_{fin}^{-1/2} \nu = 0.105\chi_1^{-1}$, maximális forgás esetén így $\beta_{fin} \leq 0.105 = 6.04^\circ$, vagyis, mint vártuk, a domináns spin határozza

meg a teljes impulzusmomentum irányát. Ez a feltétel a $\nu \in (1/900, 1/30)$ tartomány egészére teljesül. A (4.49) sorfejtése (β_{fin} -ben elsőrendig, felhasználva, hogy $\chi_1^{-1} \varepsilon_{fin}^{-1/2} \nu$ rendje β) adja, hogy

$$\beta_{fin} \approx \chi_1^{-1} \varepsilon_{fin}^{-1/2} \nu \sin \alpha_{fin} = 3.162 \chi_1^{-1} \nu \sin \alpha_{fin} . \quad (4.51)$$

Lassan forgó ($\chi_1 \approx 0.1$) fekete lyukak esetén a fenti összefüggés csak $\nu \in (1/900, 1/300)$ tartományban érvényes.

4.4.2. A spin-átfordulás szögének korlátai

A spin-átfordulás σ szögére alsó korlátot a spin irányát jellemző β szög megváltozásából kapunk:

$$\sigma_{\min} = \beta_{in} - \beta_{fin} = \alpha_{fin} - \alpha_{in} . \quad (4.52)$$

A második egyenlőségben felhasználtuk, hogy $\alpha_{in} + \beta_{in} = \alpha_{fin} + \beta_{fin}$.

Ez az eredmény a 3-dimenziós probléma 2-dimenziós szemléltetéséből következik (4.1 ábra). Figyelembe kell vennünk azonban, hogy a spin-átfordulás szöge csak abban az esetben (4.52), ha az SO precesszió szöge 2π egész számszorosa. Amennyiben ez a szög $(2k+1)\pi$, a spin-átfordulás szöge a lehető legnagyobb lesz:

$$\sigma_{\max} = \beta_{in} + \beta_{fin} - l\pi = 2(\alpha_{in} + \beta_{in}) - l\pi - (\alpha_{in} + \alpha_{fin}) . \quad (4.53)$$

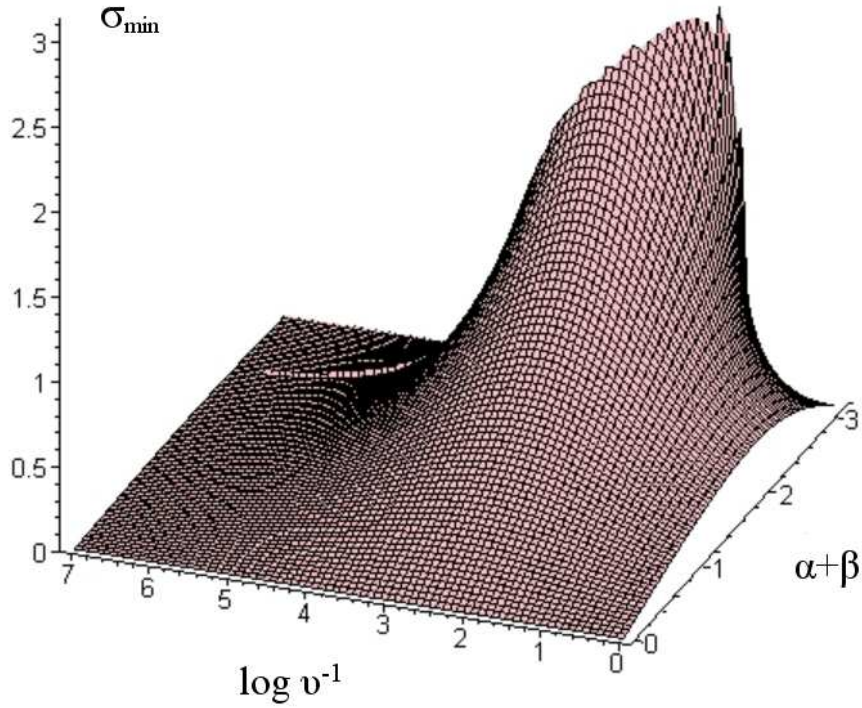
Itt $l = 0$ ha $\beta_{in} + \beta_{fin} \leq \pi$, illetve $l = 1$ ha $\pi < \beta_{in} + \beta_{fin} < 2\pi$.

A $\sigma_{\max}$ és $\sigma_{\min}$ közti különbséget az okozza, hogy a spin csak közelítőleg fordul át $\hat{\mathbf{J}}$ irányába. Minél közelebb lesz $\mathbf{S}_1^{fin}$ iránya $\hat{\mathbf{J}}$ -hez (minél kisebb ν), annál inkább tart $\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \beta_{fin} - \beta_{in}$ nullához.

A $\nu \in (1/30, 1/3)$ tipikus tömegarány-tartományban, adott $\alpha + \beta$ spin és pálya-impulzusmomentum közti szögre és χ_1 spin-nagyságra (4.49), (4.52) és (4.53) adják meg a spin-átfordulás lehetséges szögeit. A rendszer $\sigma_{\min}$ -re való numerikus megoldása a $\chi_1 = 1$ esetben, $\alpha + \beta$ és ν függvényében a 4.2 ábrán látható. (A $\nu \in (1/3, 1)$ tömegarány-tartományban (4.49) és így az ábra is csak akkor érvényes, ha $\chi_2 \ll 1$.) Adott tömegarányra $\sigma_{\min}$ maximuma az $\alpha + \beta$ szög $\pi/2$ és π értékei közé esik. Az ábra igazolja, hogy a tipikus $\nu \in (1/30, 1/3)$ tömegarány-tartományban szignifikáns spin-átfordulás következik be, míg kisebb tömegarány esetén ez az effektus csökken. Az 1/100-nál kisebb tömegarányoknál a spin nem fordul új irányba, a behulló kis fekete lyuk próbarészecskének tekinthető.

4.5. Az XRG-k keletkezési mechanizmusainak összehasonlítása

Az [85] munkában összehasonlítottuk az X-alakú rádiógalaxisok keletkezésének javasolt mechanizmusait. A fejezetben tárgyalt spin-átfordulás mechanizmusa mellett még 3 má-



4.2. ábra. A spin átfordulásának $\sigma_{\min}$ szöge a spin és pálya-impulzusmomentum közti (bespirálozás során megmaradó) $\alpha + \beta$ szögének és a tömegaránynak függvényében, $\chi_1 = 1$ esetre (az ábra $\nu \in (1/3, 1)$ része csak $\chi_2 \ll 1$ esetén érvényes). Adott tömegarányra a spin-átfordulás szögének maximuma $\pi/2$ és π közé esik. A $\nu = 1; 1/3; 1/30$ és $1/1000$ tömegarányok a $\log \nu^{-1}$ tengelyen a $0; 1,09; 3,40$ és $6,91$ értékeket veszik fel. Ennek figyelembevételével látható, hogy a legjelentősebb spin-átfordulás a bespirálozás során pontosan a tipikusnak mondható $\nu \in (1/30, 1/3)$ tömegarány tartományban történik. Az $1/100$ -nál kisebb tömegarányok esetén a spin iránya nem változik meg, a behulló kis fekete lyuk próbarészecskének tekinthető [7].

sik modell létezik. Mielőtt ezeket ismertetném, röviden áttekintem az X alakú rádiógalaxisokkal kapcsolatos megfigyeléseket, valamint megjegyzem, hogy a szakirodalomban a nyalábokat szokás lebenyeknek (lobes) vagy szárnyaknak (wings) is nevezni.

A 3CRR katalógusban az XRG-k hozzávetőleg 10%-át teszik ki [83], [117] a fényes, FR II típusú [118] rádió galaxisoknak³. A FIRST rádió-felmérés [119] felhasználásával számos új XRG jelöltet találtak [120], [121], [122]. Az XRG-k rádió tartományban mutatott luminozitása általában az FR I és FR II típusok közti határhoz közel helyezkedik el [123], ezért meglepő, hogy

- Egyetlen esetben sem FR II típusú mindkét lebeny-pár. Általában az egyik lebeny-pár külső részén forró foltok találhatók (elsődleges lebeny-pár), míg a másik kevésbé kollimált (másodlagos lebeny-pár, szárny) [83], [122].

Az X alakú rádiógalaxisokkal kapcsolatos statisztikai elemzések szerint:

- XRGk kizárólag 0.2-nél nagyobb ellipticitású galaxisokban fordulnak elő [124].
- Az elsődleges rádió lebeny-pár tipikusan a galaxis optikai nagytengelyének irányába mutat [124], [122], [125], annak ellenére, hogy a (nem X-alakú) rádió-hangos elliptikus galaxisok semmiféle ilyen korrelációt nem mutatnak [126]. A másodlagos lebenyek az optikai kistengellyel mutatnak szoros korrelációt [124].
- Összehasonlítva két rádió galaxis mintát: az egyik 29 XRG-t, a másik 36 közönséges rádió galaxist tartalmaz, vöröseltolódásuk és luminozitásuk hasonló, [127] munkában azt találták, hogy az XRG mintában szignifikánsan nehezebb szupernehéz fekete lyukak vannak.

Az XRG-k keletkezésének modelljei:

1) Kettős AGN. A két nyalábot két fekete lyuk hozza létre, melyek összeolvadó masszív elliptikus galaxisok központi szupernehéz fekete lyukai [128]. Példák: NGC 326, XRG J1130+0058, a modell kompatibilis az XRG-kre jellemző nagyobb tömeggel. Nem magyarázza, miért csak egyik nyaláb-pár FR II típusú, valamint a rádió-optikai tengelyek korrelációját.

2) Visszafolyás / eltérülés modell. A másodlagos lebeny-pár a forró foltokból származó szinkrotron plazma legnagyobb nyomás-gradiens irányába történő visszafolyásából származik [83], [129], [130], [125]. Megmagyarázza, miért csak egyik lebeny-pár FR II típusú, de nem következik belőle az XRG-kre jellemző nagyobb tömeg. Ellentmondásban áll azzal is, hogy az XRG-k egy részében a másodlagos lebenyek sokkal kiterjedtebbek, hosszabbak, mint az elsődlegesek, pl. 3C 223.1, 3C 403, NGC 326, J1130+0058, 4C+00.58 esetén.

3) Nyaláb-réteg kölcsönhatási modell. A másodlagos lebenyek úgy alakulnak ki, hogy a nyaláb megtörik a gázban gazdag csillag-rétegeken, melyek egy elliptikus és egy diszk-galaxis összeolvadásából keletkeztek [85]. A nyaláb dekollimációját és oldalirányba való

³A Fanaroff és Riley [118] által bevezetett FR I és FR II típusú rádióforrások közti határ $P_{178 \text{ MHz}} = 2 \times 10^{25} \text{ W Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ értéknél található.

megtörését a Cen A rádiógalaxison végzett mérések valószínűsítik [131], [132], valamint összhangban áll más rádió-galaxisokon (3C 321, 3C 433) történt megfigyelésekkel. A modell konzisztens az XRG-kre jellemző nagyobb tömeggel, összhangban áll azzal, hogy csak az egyik nyaláb-pár FR II típusú, megengedi a hosszabb másodlagos lebenyek kialakulását és magyarázza a rádió-optikai korrelációt (a gáz-csillag rétegek többnyire az optikai nagytengelyen helyezkednek el, így csak az optikai nagytengely irányú nyalábok törnek meg, és a törés a kistengely irányába tereli a másodlagos nyalábot). Hiányossága, hogy az XRG-k eddigi közvetlen megfigyelése nem tette lehetővé igazolását.

4) Spin-átfordulás a fekete lyukak összeolvadása során. Megmagyarázza az XRG-kre jellemző nagyobb tömeget. A másodlagos lebenyek a régi, elhaló nyaláb maradványai, az elsődleges lebenyek újak, tehát energetikusak (FR II típusúak). Megengedi a hosszabb másodlagos lebenyek létezését (azok korábban alakultak ki). Nem ad magyarázatot a rádió-optikai tengelyek korrelációjára.

A természetben esetenként a négy modell bármelyike megvalósulhat, de statisztikailag a spin-átfordulás tűnik a leggyakoribbnak, mivel az Univerzum történetében a galaxisok összeolvadása gyakori esemény és a tipikus tömegarány ismeretében a spin irányának átfordulása kötelezően megtörténik. A jövőbeli kutatásoknak viszont tisztázni kell a rádió nyalábok és a gazda-galaxisok optikai tengelyei közti korreláció eredetét. Könnyen elképzelhető, hogy ez a szupernehéz fekete lyukak és a másik galaxis csillagpopulációjának dinamikai surlódásként ismert kölcsönhatására vezethető vissza.

4.6. Összefoglalás

Ebben a fejezetben szupernehéz fekete lyukak kettős rendszerével kapcsolatos eredményeket ismertettem. Megmutattam, hogy amikor a két fekete lyuk hozzávetőleg 0.005 pc távolságra megközelíti egymást, a gravitációs sugárzás veszi át a vezető disszipatív hatás szerepét (korábban a dinamikai surlódás képviselte ugyanezt). Ez a szám gyengén függ az össztömegtől és még gyengébben a tömegaránytól ($m^{5/11}$, illetve $(1 + \nu)^{2/11}$ módon). Megmutattam, hogy szupernehéz fekete lyukak találkozásakor a tömegek aránya tipikusan nem 1, hanem a $\nu \in (1/30, 1/3)$ tömegarány a legvalószínűbb. Így a lezajló összeolvadási folyamatot nem egyenlő tömegekkel, hanem mintegy tízszeres tömegaránnyal érdemes modellezni, amennyiben tipikus történéseket szeretnénk látni. A tömegarány, mint második kis paraméter megjelenése a formalizmusban, azzal a következménnyel jár az említett tömegarány-tartományban, hogy míg a bespirálozás elején a domináns spin $S_1 \ll L$ feltételt teljesíti, a végén már $S_1 \gg L$ lesz igaz. Ezt felhasználva analitikus módszerekkel megmutattam, hogy az SO precesszió és a gravitációs sugárzási disszipáció hatására a domináns spin iránya még a bespirálozás során új irányba fordul. Ez az új irány hozzávetőlegesen megegyezik a bejövő, kisebb fekete lyuk eredeti (≈ 0.005 pc távolságnál vett) pálya-impulzusmomentumának irányával. Mivel a bespirálozás végén a pálya-impulzusmomentum jelentéktelen a spinhez képest, a bezuhanás szakasza során már nem tudja azt jelentősen megváltoztatni. Ez a tipikus eset gyökeresen különbözik a

spin-átfordulás irodalomban fellelhető vizsgálatától, ahol egyszeres és kétszeres tömegarányok esetén a jelenség bekövetkeztét a bezuhanás numerikus vizsgálatából igazolták. Az általam kidolgozott formalizmus lehetővé tette, hogy a spin-átfordulás szögét megadjam a pálya-impulzusmomentum és domináns spin közti szög, a spin nagysága, a tömegarány, valamint a PN korszak végén jellemző PN paraméter függvényében. Mivel aktív galaxismagokban a spinek irányában energetikus, nagy kiterjedésű nyalábok alakulnak ki, a spin-átfordulás jelensége magyarázatot ad a megfigyelt X-alakú rádiógalaxisok legnagyobb részének létezésére. A mechanizmus előnyeit és hátrányait összehasonlítottam az X-alakú rádiógalaxisok kialakulásának másik 3 elméletével.

5. fejezet

Kompakt kettős rendszerekkel kapcsolatos eredmények

Az alább felsorolt, kompakt kettős rendszerekkel kapcsolatos eredmények egyben a témával kapcsolatos tézispontok is:

1. Kompakt kettős rendszerek konzervatív dinamikájában

(a) Meghatároztam a spines kompakt kettős rendszerek dinamikai leírásához szükséges minimális számú változót. Ezek a következők: az oszkuláló ellipszis öt pálya-eleme (félnagy tengely, excentricitás, inklináció, felszálló csomó hossza, periasztron argumentuma), valamint a két spin-vektor polár és azimutális szögei. Ezen belül a teljes-, newtoni pálya-, és két spin-impulzusmomentum geometriája 5 szögváltozóval jellemezhető (inklináció, spin polár és azimutális szögek), melyekhez a teljesség kedvéért hozzá kell venni egy skálázó mennyiséget, a teljes impulzusmomentum nagyságát (mely a konzervatív dinamika megmaradó mennyisége). További (konzervatív dinamikában megmaradó) fizikai paraméterek a tömegek, az állapotegyenlet-paraméterek és a dimenziótlan spin-nagyságok. Utóbbiakat két kényszer kapcsolja össze a többi változóval. [1].

(b) A 2PN pontosságban, a vezető rendű spin-pálya, spin-spin és kvadrupól-monopól járulékok figyelembe vételével felírtam egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletekből álló zárt rendszert az említett változókra. A differenciálegyenlet-rendszer független változója az oszkuláló ellipszis valódi anomália paramétere [2].

(c) Egyenlő tömegű fekete lyukakból álló kompakt kettősökre bebizonyítottam, hogy a vezető rendű spin-pálya, spin-spin és kvadrupól-monopól járulékokkal kiegészített konzervatív PN dinamika értelmében: (i) a spinek közti szög állandó, (ii) a párhuzamos (azonos vagy ellentétes irányítottságú) spinek esetén létezik olyan (időben változó, nem egyértelműen meghatározott) tengely, mely körül a két spin mereven forog, és (iii) ellenirányított, azonos nagyságú spinek mozgás síkjában vett konfigurációját a dinamika megőrzi (a spinek azonos szögsebességű 1PN precessziót végeznek a mozgás síkjában) [2]. Utóbbi eredmény jelentősége az, hogy amennyiben a fenti

konfiguráció bármely oknál fogva előáll, a bespirálozás során a dinamika ezt megőrzi és a fekete lyuk kettős a (numerikus futtatások eredményei szerinti) maximális kilökődést biztosító konfigurációban érkezik a bezuhanás szakaszába.

2. Kompakt kettős rendszerek disszipatív dinamikájában meghatároztam a
 - (a) spin-spin,
 - (b) önspin és
 - (c) tömeg kvadrupól - tömeg monopól kölcsönhatási járulékokat a kompakt kettős rendszer energia- és impulzusmomentum veszteségeiben, tetszőlegesen excentrikus pályák esetén. Mindhárom esetben kiszámoltam a pillanatnyi kifejezések radiális periódusra vett átlagát, szekuláris energia- és impulzusmomentum veszteségek formájában [3], [4], [5]. Az önspin kölcsönhatási járuléknak munkám előtt a körpálya határesetre sem volt ismert.
 - (d) Bebizonyítottam, hogy a spin szekuláris sugárzási megváltozása nulla.
3. Bebizonyítottam, hogy a szupernehéz fekete lyukak összeolvadásakor a spin-pálya csatolás és a gravitációs sugárzás kombinált hatására a domináns spin, és vele együtt a nagyenergiájú részecskékből álló, rádió-tartományban észlelhető nyalábok új irányba fordulnak. Megmutattam, hogy a leggyakrabban előforduló tömegarány $1/30 \div 1/3$ között van. Bizonyítottam, hogy ebben a tömegarány-tartományban a spin átfordulása a bespirálozás során következik be és analitikusan tárgyalható (hasonló jelenséget korábban csak numerikus módszerekkel, összemérhető tömegű esetben, az összeolvadás második, bezuhanási szakaszában mutattak ki) [6]. Összefüggést adtam meg a kezdeti és végső spin-irányok kapcsolatára, a tömegarány, a domináns spin nagysága és a spin pályasíkkal bezárt szögének függvényében [7]. A jelenség megmagyarázza az X-alakú rádiógalaxisok jelentős részének kialakulását.

II. rész

Brán-elméleti kutatások

dc_223_11

6. fejezet

Bevezetés a brán-világokba

Klasszikus fizikai ismereteink szerint sztatikus, pontszerű forrás esetén mind az elektromos mező, mind a gravitáció $1/r^2$ -es távolságfüggést mutat. (Esetleges mágneses monopólus által keltett mágneses mező sztatikus esetben hasonló függést mutatna.) A nevező kettes hatványa a Gauss törvénnyel áll kapcsolatban, nevezetesen azzal, hogy adott tértartomány fölött integrálva, a tartományt magábazáró felszín két dimenziós. Az adott kölcsönhatásokat tartalmazó tér dimenziószámát tehát az $1/r^2$ -es törvény pontos mérésével igazolhatjuk. Míg a Coulomb-törvény esetén ezt 10^{-16} m-es pontossággal már évtizedekkel ezelőtt megtörtént [133], [134], addig a gravitáció esetén az inverz négyzetes törvényt napjainkra is csupán 10^{-4} m pontossáig sikerült kimérni az eredeti Eötvös kísérletnek az EötWash csoport által végzett különböző pontosításaival [135], [136]. Az eltérés a gravitáció elektromágnesességhez viszonyított igen gyenge erősségéből fakad.

A gravitáció tehát nem biztos, hogy három dimenziós kölcsönhatás, lehetséges, hogy van olyan, az említett pontosságú méréssel nem ellentmondó korrekciója, ami magasabb dimenziós térben hat. Mivel ezek a mérések földi körülmények között, kis energiákon történnek, elképzelhető, hogy a magasabb dimenzós térbe hatoló gravitációs mező nagy energiákon még hangsúlyosabb. (A gravitáció nagy-energiás viselkedésének leírásához mindenképpen új elméletre, kvantumgravitációra lesz szükség.) Az elképzelés, hogy a megszokott három térbeli dimenzióon kívül a gravitáció legalább még egy másik, Planck-hossznál kiterjedtebb dimenzióban is jelen van, tetszetős feloldása lehet a hierarchia-problémának, mely szerint a gravitáció igen gyenge jellege akadályt jelent a 4 alapvető kölcsönhatás nagyenergiás egyesítésében [137].

A magasabb dimenziós gravitációelméletek keret-elmélete a $10+1$ dimenziós M-elmélet, melynek egyes szuperhúr- és szupergravitáció-elméletek $9+1$ dimenziós határesetei. A kompakt térbeli dimenziók fölött integrálva, alacsonyabb dimenziós effektív elméletekhez jutunk. A Kaluza-Klein típusú kompakt extra dimenziós esettől akkor lehet eltérni, azaz nem-kompakt extra dimenziók akkor lehetségesek, ha alacsony energiákon a standard modell mezőit valamilyen mechanizmus a $3+1$ dimenziós téridőbe kényszeríti.

Ismert olyan mechanizmus, ahol a gravitáció a standard modell mezőinél kettővel több kiterjedt dimenzióban jelenik meg (a témában való elmélyüléshez javaslok [138] munkákat). Ennek a 2 kodimenziós esetnek jó analógiája egy kúp, melynek csúcsa a $3+1$ dimen-

ziós téridő, palástja pedig egy kettővel nagyobb dimenziójú sokaság. A kúp nyílásszögével kapcsolatos deficit-szög egy kozmológiai állandóhoz hasonló feszültséget eredményez a $3+1$ dimenziós téridőben. Ha ezen felül reguláris anyagot is helyezünk a $3+1$ dimenziós téridőbe, mind a feszültségnek, mind az anyag energia-impulzusának fejlődnie kell, ez azonban kozmológiai alkalmazásokban a „kúp” környezetében metrikus szingularitásokhoz vezet, azaz modell-függő levágásokat tesz szükségessé [139]. A problémákat a gravitációs hatás-hoz hozzávett ún. Gauss-Bonnet (görbületben négyzetes) taggal orvosolják [140], mely négyenél nagyobb dimenziószám esetén már nem topológiai invariáns, ugyanakkor a belőle származó mozgásegyenletek a metrikában másodrendű differenciálegyenletek maradnak.

Ennél egyszerűbb természetesen, ha a kodimenzió mindössze egy, a következőkben erre az esetre szorítkozok. A standard modell mezőit $3+1$ dimenzióba kényszerítő mechanizmus ilyenkor hasonló ahhoz az elektrodinamikából jól ismert szituációhoz, miszerint felületi töltéssűrűség, illetve felületi áramok ugrást (diszkontinuitást) okoznak a felületre merőleges elektromos, illetve felülethez érintő mágneses mező komponensekben. Míg a Maxwell egyenletek értelmében az elektromágneses mező forrásai a töltések és áramok, addig az Einstein egyenlet szerint a gravitáció / görbület forrása az energia-impulzus. Azaz a $3+1$ dimenziós hiperfelületre kényszerített standard modell mezők energia-impulzusa ugrást eredményez a gravitáció / görbület bizonyos „komponenseiben”.

Lanczos [141], Sen [142] és Darmois [143] speciális koordinátarendszerben megfogalmazott ezzel kapcsolatos korai eredményeit Israel írta fel máig használatos, koordinátarendszer-független alakban [144]. A két Israel-feltétel megértéséhez azonban szükséges jóval korábbra visszamennünk. Már Gauss kapcsolatot teremtett az euklideszi térbe ágyazott felületek belső és külső görbülete között (első és második fundamentális formák), híres *Theorema Egregium* eredményével. A belső görbület (indukált metrika) a felület saját görbületét méri, míg a külső görbület a beágyazás függvénye. A tétel szerint, ha az egyik megváltozik, a másiknak is meg kell változnia, mégpedig úgy, hogy az elsőt kompenzálja. Ha a belső görbület nem változik, csak a külső, akkor annak különböző ún. szekcionális görbületei változnak egymás változását kompenzáló módon. Igen jól szemlélteti a tételt Kuchař hasonlata a szélfúttá esernyőről [145]: ha a szél hatására az egyik irányban megnő a szekcionális görbület, a merőleges irányban csökkenni fog. Az euklideszi teret görbült téridőre cserélve, a Theorema Egregium általánosítása a kétszer kontrahált Gauss egyenletként ismert összefüggés lesz, mely a teljes görbületet a (hiper)felület belső és külső görbületének kifejezésekként adja meg.

A Lanczos-Darmois-Israel eredmények szerint a hiperfelületen megjelenő disztribúcionális energia-impulzus tenzor az indukált metrikát folytonosan hagyja (első Israel feltétel), azonban a külső görbületben ugrást okoz (második Israel feltétel, Lanczos egyenlet). Az „illesztési feltételek” néven is ismert eredmény mind térszerű, mind időszzerű hiperfelületekre érvényes, fényszerű felületekre pedig Barrabès és Israel dolgozták ki általánosítását [146]. Az eredmény belső csillagmegoldások és külső, vákuum téridő-tartományok illesztésekor használatos, olyankor mind az indukált metrika, mind a külső görbület folytonosságát megköveteljük, hiszen nem indokolt disztribúcionális anyagot feltételezni a (térszerű) csillagfelületen. A magasabb dimenziós gravitációelmélet szempontjából azonban ponto-

san a $3+1$ dimenziós (időszerű) hiperfelületen létező disztribucionális energia-impulzus a fontos, létezését a hiperfelület külső görbületének ugrása biztosítja.

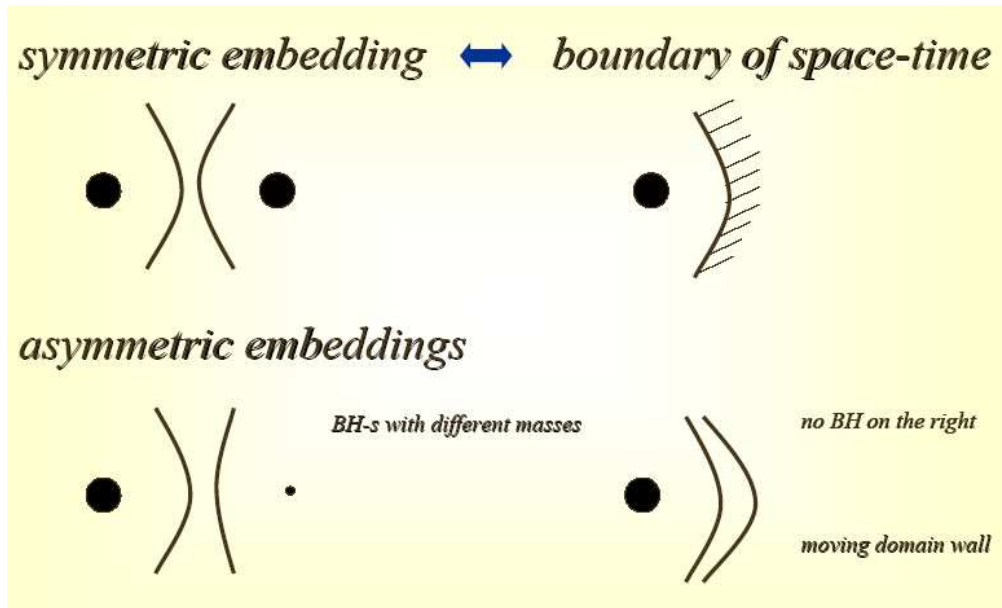
A $3+1$ dimenziós hiperfelületet (részecskefizikus körökben ennek a 3 dimenziós térszerű részét) bránnak nevezik, a $3+1+1$ dimenziós gravitációelméletet, melyben a standard mező forrásai csupán a bránon léteznek, brán-elméletnek. A disztribucionális energia-impulzus része az ún. brán-feszültség is. Ennek az elméletnek az ősi változata az ún. Randall-Sundrum II-es modell [147], melyben a brán Minkowski (azaz anyagmentes) az eggyel magasabb dimenziós sokaság pedig Anti de Sitter (AdS5), azaz görbülete egyetlen negatív kozmológiai állandóval jellemezhető. Természetesen, a Randall-Sundrum II-es modell ezért csak a sík (anyag és energiamentes) brán perturbációinak nyomkövetésére volt alkalmas, valódi gravitációs jelenségek vizsgálatára aligha. Ezenkívül a brán-feszültség és az 5 -dimenziós kozmológiai állandó finomhangolását feltételezi.

A brán-elmélet görbült bránokat is megengedő változatának dinamikáját Shiromizu, Maeda és Sasaki dolgozták ki [148], a bránon érvényes al-egyenletrendszer $3+1$ felbontását pedig Maartens [149]. Kényelmes és közkedvelt választás a brán ún. Z_2 -szimmetrikus beágyazása, az említett szerzők is ezt alkalmazták. Ilyenkor a brán két oldalán található téridőtartományok tükör-szimmetrikusak, ez matematikai szempontból igen leegyszerűsíti a tárgyalást, a brán a fél-téridő határaként is tekinthető. A gravitáció geometriai felfogásában azonban ez a megkötés értelmetlen, a bránok mozgását és dinamikáját inkább a teljes $3+1+1$ dimenziós téridőben szeretnénk látni. Ez teszi szükségessé az aszimmetrikus beágyazás bevezetését. A szimmetrikus és aszimmetrikus beágyazásokat a 6.1 ábrán szemléltetem. Az aszimmetrikus beágyazásokkal kapcsolatos korai eredmények többnyire kozmológiai alkalmazások, az aszimmetria Friedmann egyenletre gyakorolt hatásait tekintik. Vizsgálták a brán két oldalán vett különböző kozmológiai konstansok [150]-[152], a különböző tömegű $5D$ fekete lyukak [153] vagy mindkettő együttes hatását [154]-[156].

A Shiromizu, Maeda és Sasaki általános gravitációs dinamikáját aszimmetrikus beágyazás esetére a [8] munkámban elsőként adtam meg. Ugyancsak itt lelhető fel első ízben a bránra vonatkozó teljes gravitációs dinamika, mely tenzori, vektori és skalár egyenletekből áll.

A tenzori egyenlet *effektív Einstein egyenletként* ismert, baloldalán a $3+1$ dimenziós Einstein tenzor, jobboldalán a brán gravitációjának forrásai szerepelnek. Az általános relativitáselméletben már megjelenő 4 -dimenziós kozmológiai állandó és standard modell mezők energia-impulzus tenzora mellett ide sorolhatók (a) az energia-impulzusban négyzetes (így nagy energiákon dominánssá váló) források, (b) az 5 -dimenziós téridő Weyl (nem-lokális forrásokra visszavezethető) görbületének ún. elektromos projekciója, (c) esetleges 5 -dimenziós, nem standard modell mezők (például a kompakt dimenziók feletti integrálásból származó ún. moduli mezők) bránra eső része (ún. visszahúzottja), végül (d) az aszimmetrikus beágyazásból származó forrás-tag, mely a kozmológiai állandóhoz is járulékot ad.

A vektori egyenlet nem más, mint a Codazzi egyenlet, míg a skalár egyenlet a kétszer kontrahált Gauss egyenlet, mint azt [8] munkámban megmutattam. Térszerű hiperfelület esetén ezek a beágyazott hiperfelületet jellemző nevezetes azonosságok pontosan az impul-



6.1. ábra. Szimmetrikus (felső sor) és aszimmetrikus (alsó sor) brán-beágyazások. A szimmetrikus esetben a brán határfelületként is tekinthető. Aszimmetrikus esetben a két oldalon minden más lehet, beleértve azt is, van-e fekete lyuk ott. [Gergely Árpád László: *Current status and open problems in brane-world gravity*, Babes-Bolyai Egyetem, Kolozsvár, Románia, 7-th Bolyai-Lobachevsky-Gauss International Conference on Non-Euclidian Geometry and its Applications konferencián elhangzott meghívott plenáris előadás nyomán.]

zus és a hamiltoni kényszerrel állnak kapcsolatban, magukban hordozva az időfejlődést meghatározó teljes információt. Analógia lapján nyilvánvaló, hogy a vektori és skalár-egyenletek a brán-elméletben a bránra tranzverzális irányú, extra-dimenziós fejlődésért felelősek. Ezzel szemben az effektív Einstein egyenlet a gravitáció bránon való fejlődését írja le.

Az effektív Einstein egyenletet (főként szimmetrikus beágyazás feltevése mellett, lásd Maartens és Koyama [157] összefoglalóját) igen kiterjedten alkalmazták. Az M-elmélettől eltérően a brán-elmélet megfigyelésekkel összevethető kozmológiai és asztrofizikai jóslatokat ad. A korai remények azzal álltak kapcsolatban, hogy az új forrástagok magyarázatul szolgálhatnak az Univerzum 74%-át kitöltő sötét energia és 23%-át kitevő sötét anyagra. Ma már tudjuk, hogy a sötét energiát a geometriai eredetű forrástagok nem váltják ki¹, a sötét anyagot viszont jelenlegi tudásunk szerint helyettesíthetik, mind a galaxishalmazok dinamikájában [158], mind a galaktikus dinamikában [159], azaz megoldják a galaktikus forgásgörbék problémáját [160].

Az elmélet legegyszerűbb alkalmazása kétségtől a gömbszimmetrikus brán megtalálása volt [161]. Mivel formálisan az 5-dimenziós Weyl görbület elektromos része rendelkezik az elektromágneses energia-impulzus tenzor algebrai tulajdonságaival, ez nem más,

¹Megjegyzem itt, hogy az ún. indukált gravitációs járulék dinamikához való hozzáadásával sikerült ún. öngyorsító kozmológiát kidolgozni, ez az elmélet azonban instabilnak bizonyult.

mint at ÁRE-ből jól ismert Reissner-Nordström fekete lyuk megoldás, azzal a lényeges változtatással, hogy az elektromos töltés négyzetének szerepét az ún. árapály-töltés veszi át, melynek előjele mind pozitív, mind negatív lehet. Értékét a Naprendszerben elvégzett megfigyelések korlátozzák [162], [17]. Az árapálytöltésű fekete lyuk forgó általánosítását is kidolgozták [163]. A gravitációs kollapszus bránon bekövetkező változatát [164]-[168] munkákban vizsgálták. Mint ahogy azt később részletezni fogom, lényeges különbség nagy energiákon lép fel [14]. Csillagmegoldásokat szintén találtak [169]-[171].

A brán-elmélet kozmológiai aspektusait is kiterjedt vizsgálatoknak vetették alá. A korai univerzumban a módosulások jelentősek [172]. Az eredetileg igen forró brán termikus sugárzásából az 5-dimenziós térben akár fekete lyuk is kialakulhat [173]. Ez a fekete lyuk módosítja az 5-dimenziós Weyl-görbületet, így visszahat a brán mozgására és görbületére (a rajta megnyilvánuló 4-dimenziós gravitációra). A struktúra-képződés egyes aspektusait [174] munkában elemezték. Mivel az egyenletek nem zárulnak a bránon, a perturbatív tárgyalásban elért haladás ellenére [175] a bránon érvényes teljes perturbációelmélet nem ismert. Következésképpen a kozmikus háttérsugárzást és struktúra-képződést teljes általánosságban eddig még nem tárgyalták. A nukleoszintézis [176] és Ia típusú szupernóva-adatokkal való összevetés megtörtént [177], az elmélet ezekkel kompatibilisnek bizonyult.

Végül vizsgálták a brán-feszültség lehetséges értékét, ez egy nagy pozitív szám. A negatív 5-dimenziós kozmológiai állandóval majdnem pontosan finomhangolt, úgy, hogy a 4-dimenziós kozmológiai állandó értéke a megfigyelésekkel összhangban kicsi lehet. A brán-feszültségre különböző alsó korlátokat vezettek be, ezek a gravitációs állandó méréséből [135], a brán-elméleti hatások nukleoszintéziskor már elhanyagolható jellegének követelményéből [178] vagy éppen asztrofizikai megfontolásokból [169] következnek. A korlátokat a [179] munkánkban foglaltuk össze.

Az értekezésnek az egy kodimenziós brán-elméletet tárgyaló második része következő módon épül fel. A 7. fejezetben a brán-világokban érvényes dinamikát tárgyalom, a [8] és [9] munkáim nyomán. Itt a brán beágyazása tetszőleges (nem tükörszimmetrikus), valamint a brán-feszültség időben változhat. A gravitációs dinamikát jellemző effektív Einstein egyenlet, Codazzi egyenlet, kétszer kontrahált Gauss egyenletek levezetése mellett megadom a bránon érvényes Bianchi azonosságot és a brán külső görbületét a rajta fellelhető energia-impulzussal összekapcsoló Lanczos egyenletet is.

A brán-kozmológiát a 8. fejezetben dolgozom ki általános feltételek mellett, azaz a Friedmann bránt a fekete lyukat és sugárzást is tartalmazó Vaidya-Anti de Sitter (VAdS5) téridőbe ágyazva. Ez lehetővé teszi az energiát sugárzó brán dinamikájának általánosítását az aszimmetrikus beágyazást tartalmazó esetre [11]. A brán-feszültség változására a folyadék membránok feszültségének hőmérséklet-függését jellemző Eötvös törvényt [180] alkalmazva, a megfigyelésekkel összhangban álló egyszerű kozmológiai modellt dolgozok ki [10]. Tárgyalom a brán-kozmológia sztatikus, ún. Einstein-brán megoldását [12], valamint ennek homogén párját [13]. Bebizonyítom, hogy az Einstein-brán sérti a brán-elméletben általánosan elfogadott unicitás-tételt, miszerint az összes kozmológiai brán vákuum Schwarzschild-Anti de Sitter (SAdS5) téridőbe ágyazható [12].

A brán-elmélet asztrofizikai alkalmazásait a 9. fejezetben vizsgálom. Részletezem

a bránon bekövetkező gravitációs kollapszusban az ÁRE-hez képest fellépő eltéréseket [14]. A gömbszimmetrikus belső és külső csillagmegoldások illeszthetőségének feltételei is módosulnak [15]. Tárgyalom a 3+1 dimenziós világunkban brán fekete lyukként megjelenő 5 dimenziós fekete húrt [16]. Ezt követően az árapálytöltésű fekete lyukként ismert brán-megoldással kapcsolatos kutatásaimat ismertetem. Az árapálytöltésű fekete lyuk által okozott fényelhajlást a gyenge gravitáció tartományában vizsgálom [17]. A tárgyalás a perturbációszámítás második rendjéig megy el a tömeg és az árapálytöltéssel kapcsolatos kis paraméterekben. A fekete lyuk termodinamika keretén belül tárgyalom az árapálytöltésű fekete lyuk termodinamikai jellegzetességeit, valamint a gravitációs hullámok sugárzási hatékonyságára vonatkozó termodinamikai korlát segítségével korlátozom az árapálytöltés lehetséges értéktartományát [18].

A 10. fejezetben összefoglalom a fő saját eredményeket és megadom az ezekhez kapcsolódó tézispontokat.

7. fejezet

Kovariáns gravitációs dinamika

Ebben a fejezetben a gravitációs dinamika bránra vetített változatát ismertetem. A tárgyalás a [8] és a [9] munkáimat követi. Az irodalomban létező korábbi vizsgálatokhoz képest új elemek a brán 5-dimenziós téridőbe való ágyazásának aszimmetriája és a brán-feszültség változó jellegének feltevése, valamint a teljes dinamika megadása.

A következőkben az 5D, 4D, 3D az öt-, négy-, illetve háromdimenziós mennyiségek megkülönböztető jele lesz. Feltesszük, hogy az 5D téridő fóliázható, azaz olyan időszerű hiperfelület-seregbe bontható, melynek egyik eleme a brán. A felülhullám az 5D mennyiségeket jelöli. Az egyetlen 5D mennyiség, amely nem viseli ezt a megkülönböztető jelzést, az időszerű hiperfelületek n normálisa (melyet jobb irányba mutatónak veszünk és eleget tesz $n^c n_c = 1$ feltételnek). A latin indexek 0 és 4 közötti értékeket vesznek fel. A Lie-deriváltakban szereplő vektormezőket vastag betű jelzi. A felülvonás a brán jobb (R) és bal (L) oldalán vett mennyiségek átlagát jelöli. Kivétel $\bar{L}_{ab}$, ez nem az L_{ab} átlaga, hanem az L_{ab} definíciója szerint az abban szereplő mennyiségek átlagával képezzük. A Δ a jobb és bal oldalakon vett értékek különbsége. A TF index a brán metrikával képezett spurmentesítést jelöli. Kerek illetve szögletes zárójelbe helyezett indexek az adott indexeken elvégzendő szimmetrizálást illetve antiszimmetrizálás műveletét jelölik.

A fejezet célja levezetni az effektív Einstein egyenletet, valamint a teljes dinamikát megadó társ-egyenleteket, ezekről belátni, hogy éppen a Codazzi és a kétszer kontrahált Gauss egyenletek. Szintén tárgyalni fogom a Lanczos egyenletet és a brán Bianchi-azonosságot.

7.1. Az 5D Einstein egyenletek felbontása

Az 5D téridő $\tilde{g}_{ab}$ metrikája felbontható a brán $n^a = (\partial/\partial y)^a$ normál-vektora és az $y = 0$ feltétellel megadott bránon indukált g_{ab} metrika (első fundamentális forma) segítségével:

$$\tilde{g}_{ab} = n_a n_b + g_{ab} . \quad (7.1)$$

Az 5D geometria fejlődését az 5D Einstein egyenlet határozza meg:

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{\kappa}^2 \left[-\tilde{\Lambda} \tilde{g}_{ab} + \tilde{T}_{ab} + \tau_{ab} \delta(y) \right] . \quad (7.2)$$

ahol $\tilde{\kappa}^2$ és $\tilde{\kappa}^2\tilde{\Lambda}$ az 5D gravitációs csatolási állandó, illetve kozmológiai állandó. $\tilde{T}_{ab}$ az 5D energia-impulzus tenzor reguláris része, mely nem standard modell mezőkből származik (pl. inflációval kapcsolatos skalár-mező, moduli-mező, bránon kívüli források sugárzása), τ_{ab} pedig a disztribucionális, bránon lokalizált része, mely így eleget tesz a $\tau_{ik}n^i = 0$ feltételnek. A brán energia-impulzus tenzor tovább bontható

$$\tau_{ab} = -\lambda g_{ab} + T_{ab} \quad (7.3)$$

módon, ahol λ az ún. brán feszültség és T_{ab} a bránon található standard modell mezőkből származó energia-impulzus tenzor.

Tetszőleges $\tilde{T}_{b_1\dots b_s}^{a_1\dots a_r}$ tenzor bránra vetített kovariáns és Lie-deriváltjait a $g_{c_1\dots c_r b_1\dots b_s}^{a_1\dots a_r d_1\dots d_s} = g_{c_1\dots c_r}^{a_1\dots a_r} g_{b_1\dots b_s}^{d_1\dots d_s}$ projektorok segítségével képezzük:

$$\nabla_a \tilde{T}_{b_1\dots b_s}^{a_1\dots a_r} = g_{ac_1\dots c_r b_1\dots b_s}^{ca_1\dots a_r d_1\dots d_s} \tilde{\nabla}_c \tilde{T}_{d_1\dots d_s}^{c_1\dots c_r} , \quad (7.4)$$

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{V}}} \tilde{T}_{b_1\dots b_s}^{a_1\dots a_r} = g_{c_1\dots c_r b_1\dots b_s}^{a_1\dots a_r d_1\dots d_s} \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\mathbf{V}}} \tilde{T}_{d_1\dots d_s}^{c_1\dots c_r} . \quad (7.5)$$

Amennyiben mind a $\tilde{T}_{b_1\dots b_s}^{a_1\dots a_r}$ tenzor, mind a $\tilde{V}^a$ vektor a hiperfelületeken értelmezett, fenti definíciók az indukált metrikával kompatibilis kovariáns és Lie-deriváltat adják. Amennyiben azonban $\tilde{V}^a$ tranzverzális a hiperfelületekre, a vetített Lie-derivált tranzverzális fejlődéssel függ össze. A hiperfelületek 5D-be való ágyazását a $K_{ab} = \nabla_a n_b$ külső görbület (második fundamentális forma) jellemzi. Jelölje K a spúrját. Könnyen belátható, hogy K_{ab} szimmetrikus, ha a brán normálist $n_b = \beta \tilde{\nabla}_b \chi$ alakban vesszük (β tetszőleges függvény; χ =állandó pedig a hiperfelületek definíciója, így χ egy tranzverzális koordináta). A külső görbület eleget tesz

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} g_{ab} = 2K_{ab} \quad (7.6)$$

feltételnek. Az n^a kongruencia görbülete [181] $\alpha^b = n^c \tilde{\nabla}_c n^b = g_d^b \alpha^d$. Így

$$\tilde{\nabla}_a n_b = K_{ab} + n_a \alpha_b . \quad (7.7)$$

Bevezetjük a következő tenzorokat:

$$E_{ab} = K_{ac} K_b^c - \mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} + \nabla_b \alpha_a - \alpha_b \alpha_a , \quad (7.8)$$

$$F_{ab} = K K_{ab} - K_{ac} K_b^c , \quad (7.9)$$

melyek spúrját E és F jelöli. Látható, hogy K_{ab} tranzverzális fejlődését E_{ab} tartalmazza.

Az 5D Einstein tenzor bránra vett projekciói:

$$g_a^c g_b^d \tilde{G}_{cd} = G_{ab} - F_{ab} + E_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab} (F - 2E) , \quad (7.10a)$$

$$g_a^c n^d \tilde{G}_{cd} = g_a^c n^d \tilde{R}_{cd} = \nabla_c K_a^c - \nabla_a K , \quad (7.10b)$$

$$2n^a n^b \tilde{G}_{ab} = -R + F . \quad (7.10c)$$

Mivel $\tilde{G}_{ab}$ -t a (7.2) 5D Einstein egyenlet meghatározza, a fenti egyenletek interpretációja a következő. A (7.10a) tenzor-egyenlet (E_{ab} - keresztül) meghatározza K_{ab} fóliázásra mérőleges fejlődését. A (7.6) egyenlettel együtt a (g_{ab}, K_{ab}) bránon értelmezett gravitációs

változók hiperfelületekre merőleges fejlődését adják. A (7.10b) vektor-egyenlet nem más, mint a Codazzi egyenlet, mely a (g_{ab}, K_{ab}) változókra egy kényszerfeltételt jelent, akárcsak a (7.10c) skalár-egyenlet. (A vektor és skalár-egyenletek a térszerű fóliázáskor megjelenő diffeomorfizmus és Hamilton-i kényszereinek megfelelői. Jelen esetben azonban ezen egyenletek időirányú deriváltakat tartalmaznak és a bránra tranzverzális fejlődést leíró teljes egyenletrendszer nem hiperbolikus, hanem elliptikus jellegű.)

A brán-elméletekben azonban nem a (7.10a)-(7.10c) egyenletrendszer használata terjedt el, hanem egy ekvivalens rendszer, amit a következőkben vezetek le. Ehhez a (7.10a) tenzor-projekciót felbontom spúrra:

$$g^{ab}\tilde{G}_{ab} = -R + F - 3E, \quad (7.11)$$

valamint spúr-mentes részre:

$$\left(g_a^c g_b^d \tilde{G}_{cd}\right)^{TF} = (R_{ab} - F_{ab} + E_{ab})^{TF}. \quad (7.12)$$

Itt TF jelöli a tenzorok spúr-mentes részét, azaz $f_{ab}^{TF} = f_{ab} - f g_{ab}/4$ bármely, a fóliázás hiperfelületein értelmezett f_{ab} tenzor esetén.

A (7.11) egyenletet a (7.10c) egyenlettel megfelelően kombinálva a kétszer kontrahált Gauss egyenlet áll elő:

$$\tilde{R} = R - F + 2E. \quad (7.13)$$

Kiküszöbölve R -t a (7.10c) és (7.13) egyenletekből, E kifejezhető kizárólag 5D mennyiségekkel is:

$$E = n^a n^b \tilde{G}_{ab} + \frac{1}{2} \tilde{R}. \quad (7.14)$$

Bevezetjük az 5D Weyl tenzort (ez a gravitáció nem-lokális forrásokból származó része):

$$\tilde{C}_{abcd} = \tilde{R}_{abcd} + \frac{1}{6} \tilde{g}_{a[c} \tilde{g}_{d]b} \tilde{R} - \frac{2}{3} \left(\tilde{g}_{a[c} \tilde{R}_{d]b} - \tilde{g}_{b[c} \tilde{R}_{d]a} \right). \quad (7.15)$$

Ennek az n^a vektor segítségével értelmezett elektromos része

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ac} &= \tilde{C}_{abcd} n^b n^d = g_a^i n^j g_c^k n^l \tilde{R}_{ijkl} + \frac{\tilde{R}}{12} g_{ac} \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(g_a^i g_c^k \tilde{R}_{ik} + g_{ac} n^i n^k \tilde{R}_{ik} \right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Felhasználva a következő projekciókat:

$$\begin{aligned} g_a^i n^j g_c^k n^l \tilde{R}_{ijkl} &= E_{ac}, \\ g_a^i g_c^k \tilde{R}_{ik} &= R_{ac} - F_{ac} + E_{ac}, \\ n^i n^k \tilde{R}_{ik} &= -K_{bd} K^{bd} - E, \end{aligned} \quad (7.17)$$

kapjuk, hogy

$$3\mathcal{E}_{ab} = [-R_{ab} + F_{ab} + 2E_{ab}]^{TF}. \quad (7.18)$$

Végül kiküszöbölve R_{ab} -t a (7.12) és (7.18) egyenletekből, hasznos összefüggés áll elő az 5D Weyl tenzor elektromos része, valamint E_{ab}^{TF} között:

$$\mathcal{E}_{ab} + \frac{1}{3} \left(g_a^c g_b^d \tilde{G}_{cd} \right)^{TF} = E_{ab}^{TF}. \quad (7.19)$$

Ez az összefüggés kapcsolatot teremt a $\mathcal{L}_n K_{ab}$ spúr-mentes része és $\mathcal{E}_{ab}$ között. Kiküszöbölve a hiperfelületekre merőleges deriváltat tartalmazó tagot a (7.12) és (7.18) egyenletekből, a következő egyenlet adódik:

$$\mathcal{E}_{ab} - \frac{2}{3} \left(g_a^c g_b^d \tilde{G}_{cd} \right)^{TF} = (-R_{ab} + F_{ab})^{TF} . \quad (7.20)$$

Ezt a spúr-mentes egyenletet a (7.10c) skalár-egyenlettel kombinálva, a 4D Einstein tenzorra a következő hasznos egyenletet kapjuk:

$$G_{ab} = \frac{2}{3} \left(g_a^c g_b^d \tilde{G}_{cd} \right)^{TF} + \frac{1}{2} g_{ab} n^c n^d \tilde{G}_{cd} + F_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} F - \mathcal{E}_{ab} . \quad (7.21)$$

Mivel a fenti egyenlet spúrja éppen a (7.10c) skalár-egyenlet, ezért az 5D Einstein-tenzor felbontásából származó független skalár-egyenlet szerepét az eredeti (7.10a) tenzor-projekció spúrja veszi át, amiről megmutattuk, hogy a (7.13) kétszer kontrahált Gauss egyenlettel vagy a (7.14) egyenlettel is helyettesíthető.

A (7.21) egyenlet mutatja, hogy a brán gravitáció forrásai a következők: az 5D anyag (az $\tilde{G}_{cd}$ -t meghatározó 5D Einstein egyenlet révén), a brán külső görbülete (az F -tagokon keresztül) valamint az 5D Weyl tenzor elektromos része. A többi független egyenlet a (7.10b) Codazzi egyenlet, valamint a (7.13) kétszer kontrahált Gauss egyenlet. Ez a három egyenlet együtt ekvivalens az 5D Einstein egyenlettel.

A következő fejezetben a külső görbületről megmutatom, hogy a brán energia-impulzus tenzorával kifejezhető. A brán-megfigyelő által észlelt gravitációs dinamika szempontjából viszont problémát jelent az $\mathcal{E}_{ab}$ forrástagra vonatkozó brán-fejlődéseggyenlet hiánya. Bár $\mathcal{E}_{ab}$ ún. longitudinális részét a vektori egyenlet sok esetben meghatározza [148], általános esetben a tranzverzális része meghatározatlan marad.

7.2. Az Israel-féle illesztési feltételek

A (7.21) tenzori egyenletben az F_{ab} tenzoron keresztül a brán külső görbülete többszörösen is megjelenik a brán Riemann görbületének (annak Einstein részének) forrásaként. A külső görbületet a bránon található megfigyelő értelemszerűen nem mérheti, ezért szerencsés lenne más változókkal kifejezni. A következőkben kapcsolatba hozom a külső görbületet a bránon található energia-impulzussal és a brán feszültségével.

7.2.1. Az indukált metrika folytonossága és a Lanczos egyenlet

Tekintsünk egy időszerű hiperfelületen elhelyezkedő disztibúcionális energia-impulzus eloszlást. A hiperfelület a téridőt két részre osztja. Mindkét tartományban a gravitációs dinamikát a (7.10), vagy ezzel ekvivalens módon a (7.10b), (7.14) és (7.21) egyenletrendszer adja meg. A bránon való áthaladáskor az indukált metrika folytonos kell legyen, hiszen értelmetlen lenne két különböző távolsággal jellemezni a brán két infinitezimálisan közeli pontjának viszonyát. Ez az első Israel-féle illesztési feltétel [144], azaz $\Delta g_{ab} = 0$ és $\bar{g}_{ab} = g_{ab}$.

A második feltétel a Lanczos-egyenlet [141], mely a külső görbület ugrását adja meg a brán energia-impulzus tenzorának függvényében. Utóbbit [156] és [8] nyomán következőképpen látjuk be. Az (7.8), (7.9) és második (7.17) összefüggésből a következőt kapjuk

$$\mathcal{L}_n K_{ab} = -g_a^i g_b^k \tilde{R}_{ik} + Z_{ab} , \quad (7.22)$$

$$Z_{ab} = R_{ab} + 2K_{ac} K_b^c - K K_{ab} + \nabla_b \alpha_a - \alpha_b \alpha_a . \quad (7.23)$$

A (7.2) 5D Einstein egyenletből pedig a

$$g_a^i g_b^k \tilde{R}_{ik} = \tilde{\kappa}^2 \left[\frac{2}{3} \tilde{\Lambda} g_{ab} + g_a^i g_b^k \tilde{T}_{ik} - \frac{1}{3} g_{ab} \tilde{T} + \left(\tau_{ab} - \frac{1}{3} \tau g_{ab} \right) \delta(y) \right] \quad (7.24)$$

összefüggés áll elő. A Lie-derivált az y adaptált koordinátában parciális deriválttá egyszerűsödik, így (7.6) átírható

$$\frac{\partial}{\partial y} K_{ab} = -\tilde{\kappa}^2 \left(\tau_{ab} - \frac{1}{3} \tau g_{ab} \right) \delta(y) + W_{ab} + Z_{ab} , \quad (7.25)$$

$$W_{ab} = -\tilde{\kappa}^2 \left[\frac{2}{3} \tilde{\Lambda} g_{ab} + g_a^i g_b^k \tilde{T}_{ik} - \frac{1}{3} g_{ab} \tilde{T} \right] \quad (7.26)$$

alakra. A bevezetett Z_{ab} és W_{ab} tenzorok fontos közös tulajdonsága, hogy mindenütt végesek. A határfelületet is magába foglaló vékony réteg felett integrálva, a réteg vastagságát nullához közelítve, ezen tagok járuléka nullához tart és előáll a Lanczos egyenlet:

$$\Delta K_{ab} = -\tilde{\kappa}^2 \left(\tau_{ab} - \frac{\tau}{3} g_{ab} \right) . \quad (7.27)$$

Ezt néha a

$$-\tilde{\kappa}^2 \tau_{ab} = \Delta K_{ab} - g_{ab} \Delta K \quad (7.28)$$

ekvivalens formájában alkalmazzuk. A külső görbület a brán két oldalán kifejezhető, mint

$$2K_{ab}^{R,L} = 2\overline{K}_{ab} \pm \Delta K_{ab} , \quad (7.29)$$

ahol a jobboldal második tagját a Lanczos egyenlet adja. Látni fogjuk később, hogy $\overline{K}_{ab}$ -t viszont a Codazzi egyenlet határozza meg.

7.2.2. Külső görbületet tartalmazó forrástagok átlaga és különbsége

A (7.10b), (7.13) és (7.21) dinamikai egyenletek a brán mindkét oldalán felvett időszerű hiperfelületeken érvényesek. Ha ezeket a hiperfelületeket kétoldalról a bránhoz közelítjük, képezhetjük az egyenletek átlagát és különbségét. A Lanczos egyenlet felhasználásával az F_{ab} forrástag, illetve F spúrjának a brán két oldalán vett kifejezéseiből képezett átlaga és különbsége egyszerű számolás eredményeként következőképpen áll elő:

$$\begin{aligned} \overline{F}_{ab} &= \overline{K}_{ab} \overline{K} - \overline{K}_{ac} \overline{K}_b^c + \delta F_{ab} , \\ \overline{F} &= \overline{K}^2 - \overline{K}_{ab} \overline{K}^{ab} + \delta F , \\ \Delta F_{ab} &= -\tilde{\kappa}^2 \left[\overline{K} \left(\tau_{ab} - \frac{1}{3} g_{ab} \tau \right) + \overline{K}_{ab} \frac{\tau}{3} - 2\overline{K}_{c(a} \tau_{b)}^c \right] , \\ \Delta F &= 2\tilde{\kappa}^2 \overline{K}_{ab} \tau^{ab} . \end{aligned} \quad (7.30)$$

Itt bevezettük a

$$\delta F_{ab} = -\frac{\tilde{\kappa}^4}{4} \left(\tau_{ac} \tau_b^c - \frac{1}{3} \tau \tau_{ab} \right) \quad (7.31)$$

jelölést az $\overline{F}_{ab}$ és F_{ab} funkcionális alakjai különbségének jellemzésére.

A (7.21) egyenlet átlagában megjelenő kombinációra kapjuk, hogy

$$\delta F_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} \delta F = \tilde{\kappa}^4 \left[S_{ab} + \frac{\lambda}{6} T_{ab} - \frac{\lambda^2}{12} g_{ab} \right]. \quad (7.32)$$

Itt az S_{ab} tenzor a T_{ab} -ben kvadratikusan következő kifejezés:

$$S_{ab} = \frac{1}{4} \left[-T_{ac} T_b^c + \frac{T}{3} T_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} \left(-T_{cd} T^{cd} + \frac{T^2}{3} \right) \right]. \quad (7.33)$$

7.2.3. Szimmetrikus és aszimmetrikus beágyazások

A Z_2 -szimmetrikus beágyazás azt jelenti, hogy a brán jobb és bal oldalán található 5D tartományok azonosak. Ez többnyire azzal jár, hogy a fizikai és geometriai mennyiségek azonosak a két oldalon, így azok különbsége nulla. Egyetlen fontos kivétel van, a külső görbület. Mivel a brántól jobbra eső tartományban a brán n^a normálisával, míg balra ennek ellentettjével képezzük, Z_2 -szimmetria esetén $K_{ab}^R = -K_{ab}^L$, azaz $\overline{K}_{ab} = 0$.

Ezért $\overline{K}_{ab}$ pontosan az aszimmetria mértéke. A (7.21) egyenlet átlagában ez a következő kombinációban jelenik meg:

$$\overline{L}_{ab} = \overline{K}_{ab} \overline{K} - \overline{K}_{ac} \overline{K}_b^c - \frac{g_{ab}}{2} \left(\overline{K}^2 - \overline{K}_{cd} \overline{K}^{cd} \right), \quad (7.34)$$

(szimmetrikus beágyazás esetén $\overline{L}_{ab} = 0$). Spúrja

$$\overline{L} = \overline{K}_{ab} \overline{K}^{ab} - \overline{K}^2, \quad (7.35)$$

spúr-mentes része pedig

$$\overline{L}_{ab}^{TF} = \overline{K}_{ab} \overline{K} - \overline{K}_{ac} \overline{K}_b^c + \frac{\overline{L}}{4} g_{ab}. \quad (7.36)$$

7.3. Gravitációs dinamika a bránon

7.3.1. Az effektív Einstein egyenlet

Az 5D Einstein egyenlet skalár és tenzori projekciójának spúrtalan részéből képezett (7.21) egyenlet átlaga:

$$\begin{aligned} G_{ab} = & \frac{2}{3} \overline{\left(g_a^c g_b^d \tilde{G}_{cd} \right)^{TF}} + \frac{1}{2} g_{ab} \overline{\left(n^c n^d \tilde{G}_{cd} \right)} \\ & + \overline{F}_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} \overline{F} - \overline{\mathcal{E}}_{ab}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Felhasználva a (7.2) 5D Einstein egyenletet, a (7.33), (7.34) definíciókat, valamint bevezetve a 4D gravitációs és kozmológiai „állandókat”

$$\kappa^2 = \frac{1}{6} \tilde{\kappa}^4 \lambda, \quad (7.38)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{\bar{L}}{4} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \overline{(n^c n^d \tilde{T}_{cd})} , \quad (7.39)$$

ahol

$$2\Lambda_0 = \kappa^2 \lambda + \tilde{\kappa}^2 \bar{\Lambda} , \quad (7.40)$$

előáll a g_{ab} brán-metrika fejlődését meghatározó effektív Einstein egyenlet:

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} + \tilde{\kappa}^4 S_{ab} - \bar{\mathcal{E}}_{ab} + \bar{L}_{ab}^{TF} + \bar{\mathcal{P}}_{ab} . \quad (7.41)$$

Megjegyezzük, hogy a gravitáció vonzó jellege miatt $\kappa^2 > 0$, azaz $\lambda > 0$, valamint a brán feszültség esetleges változása esetén κ^2 , Λ de még Λ_0 is változni fog. Az effektív Einstein egyenlet $\bar{\mathcal{P}}_{ab}$ forrástagja az esetleges 5D nem standard modell mezők energia-impulzus tenzorának bránra eső visszahúzottja:

$$\bar{\mathcal{P}}_{ab} = \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \overline{(g_a^c g_b^d \tilde{T}_{cd})}^{TF} . \quad (7.42)$$

Az effektív Einstein egyenlet forrástagjai közül $\bar{L}_{ab}^{TF}$ és $\bar{L}$ a brán beágyazásának aszimmetriájától, az $\mathcal{E}_{ac}$ az 5D Weyl görbülettől, míg a $n^c n^d \tilde{T}_{cd}$ és $g_a^c g_b^d \tilde{T}_{cd}$ 5D források projekciói az 5D források fejlődésétől függenek.

7.3.2. Különbség-egyenletek

Az 5D Einstein egyenlet skalár és tenzori projekciója spúrtalan részének a brán jobb és bal oldalán felírt alakjait kivonva egymásból, különbség egyenleteket kapunk:

$$-\lambda \bar{K} + T_{ab} \bar{K}^{ab} = \Delta \left(n^a n^b \tilde{T}_{ab} \right) - \Delta \tilde{\Lambda} , \quad (7.43a)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_{ab} &= \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \Delta \left(g_a^c g_b^d \tilde{T}_{cd} \right)^{TF} \\ -\tilde{\kappa}^2 \left[\bar{K} T_{ab} + \frac{T}{3} \bar{K}_{ab} + \frac{2}{3} \lambda \bar{K}_{ab} - 2 \bar{K}_{(a} T_{b)c} \right]^{TF} &. \end{aligned} \quad (7.43b)$$

Az első összefüggés a beágyazásra vonatkozó (az adott 4D és 5D anyagi forrásoktól függő) kényszerként fogható fel. A második összefüggés megadja $\Delta \mathcal{E}_{ab}$ mennyiséget a beágyazás, a 4D és 5D anyagi források függvényében.

7.3.3. A Codazzi egyenlet

A brán két oldalán vett (7.10b) Codazzi egyenlet átlaga és különbsége:

$$\nabla_c \bar{K}_a^c - \nabla_a \bar{K} = \tilde{\kappa}^2 \overline{(g_a^c n^d \tilde{T}_{cd})} , \quad (7.44a)$$

$$\nabla_c \tau_a^c = -\Delta \left(g_a^c n^d \tilde{T}_{cd} \right) . \quad (7.44b)$$

Az első, az átlagolt Codazzi egyenlet a beágyazásra és az 5D anyagi forrásokra (szimmetrikus beágyazás esetén csupán utóbbira) vonatkozó kényszeregyenlet. A második, a különbség Codazzi egyenlet a bránra vonatkozó energia mérleg egyenlet, részletesen kiírva:

$$\nabla_c T_a^c = \nabla_a \lambda - \Delta \left(g_a^c n^d \tilde{T}_{cd} \right) . \quad (7.45)$$

Ez az első dinamikai egyenlet, melyhez a változó brán-feszültség módosító járulékot ad. A 4D anyagi források energia-impulzus tenzorának divergenciája tehát két okból különbözhet nullától: (i) egyes 5D nem standard modell mezők miatt, például sugárzás [11], [173], [179], [182]-[187], valamint (ii) változó brán-feszültség miatt [9].

7.3.4. A kétszer kontrahált Gauss egyenlet

Mint ahogyan azt láttuk, az 5D Einstein egyenlet projekciónak tárgyalásában, a független skalár egyenlet a (7.13) kétszer kontrahált Gauss egyenlet, vagy az ezzel ekvivalens, az R kiküszöbölésével kapott (7.14) egyenlet. Utóbbit a (7.2) 5D Einstein egyenlet segítségével átírhatjuk a következő alakra:

$$E = \tilde{\kappa}^2 \left(n^a n^b \tilde{T}_{ab} - \frac{\tilde{T}}{3} + \frac{2\tilde{\Lambda}}{3} \right). \quad (7.46)$$

Mivel E a külső görbületből áll elő, (7.46) egyenlet a beágyazásra és az 5D anyagi forrásokra vonatkozó kényszer.

7.3.5. A brán Bianchi azonosság

Az effektív Einstein egyenlet 4D kovariáns divergenciáját képezve a kétszer kontrahált brán Bianchi azonosságot kapjuk. Ez meghatározza a $(\bar{\mathcal{E}}_{ab} - \bar{L}_{ab}^{TF} - \bar{\mathcal{P}}_{ab})$ forrástag longitudinális részét:

$$\begin{aligned} \nabla^a (\bar{\mathcal{E}}_{ab} - \bar{L}_{ab}^{TF} - \bar{\mathcal{P}}_{ab}) = & \\ \frac{\nabla_b \bar{L}}{4} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \nabla_b (\overline{n^c n^d \tilde{T}_{cd}}) - \kappa^2 \Delta (g_b^c n^d \tilde{T}_{cd}) + \frac{\tilde{\kappa}^4}{4} \left(T_b^a - \frac{T}{3} g_b^a \right) \Delta (g_a^c n^d \tilde{T}_{cd}) & \\ + \frac{\tilde{\kappa}^4}{4} \left[2T^{ac} \nabla_{[b} T_{a]c} + \frac{1}{3} (T_{ab} \nabla^a T - T \nabla_b T) \right] - \frac{\tilde{\kappa}^4}{12} (T_b^a - T g_b^a) \nabla_a \lambda. & \end{aligned} \quad (7.47)$$

A levezetéshez felhasználtuk a $\nabla^a \kappa^2 = (\kappa^2/\lambda) \nabla^a \lambda$ és $\nabla^a \Lambda_0 = \kappa^2 \nabla^a \lambda$ összefüggéseket, melyek κ^2 és Λ_0 definícióból, (7.38) és (7.40) egyenletekből következnek, valamint a (7.45) energia-mérleg egyenletet. Megjegyezzük, hogy változó brán-feszültséget tartalmazó járulékok származnak a következő tagokból: (a) $\nabla^a (\kappa^2) T_{ab}$, (b) $-g_{ab} \nabla^a \Lambda = \dots + \kappa^2 \nabla_b \lambda$, ezeket más $\nabla^a \lambda$ típusú járulékok is kiegészítenek, amikor T_{ab} kovariáns divergenciáját (7.45) formában fejezzük ki. Ennek eredményeképp (b) kiesik, valamint (a) együtthatója megváltozik. A változó brán feszültség teljes járuléka a (7.47) egyenlet utolsó tagjában található. A kétszer kontrahált Bianchi azonosság kozmológiai következményeit a következő fejezetben vizsgáljuk.

Megjegyezzük, hogy a változó brán-feszültség kizárólag a (7.45) és (7.47) egyenleteket módosítja.

7.4. Bránra merőleges fejlődésegyenletek

A brán gravitációs változói a g_{ab} indukált metrika és a K_{ab} külső görbület. Ezek a bránra merőleges n^a irányban a következő módon fejleszthetők. A g_{ab} bránra merőleges fejlődését a (7.6) egyenlet adja, a K_{ab} külső görbület bránra merőleges fejlődését pedig a (7.8) egyenletből nyerjük:

$$\mathcal{L}_n K_{ab} = - \left(E_{ab}^{TF} + \frac{E}{4} g_{ab} \right) + K_{ac} K_b^c + \nabla_b \alpha_a - \alpha_b \alpha_a . \quad (7.48)$$

Itt az E mennyiség és az 5D források kapcsolatát a (7.46) összefüggés adja meg, az E_{ab} spúr-mentes részét pedig $\mathcal{E}_{ab}$ definíciójából és az 5D Einstein egyenletből nyerjük [8] következő módon:

$$E_{ab}^{TF} = \mathcal{E}_{ab} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \left[g_a^c g_b^d \tilde{T}_{cd} + \tau_{ab} \delta(y) \right]^{TF} . \quad (7.49)$$

Az $\mathcal{E}_{ab}$ elektromos projekció a brán bármely oldalán $\mathcal{E}_{ab}^{R,L} = \bar{\mathcal{E}}_{ab} \pm \Delta \mathcal{E}_{ab}/2$ módon fejezhető ki az $\bar{\mathcal{E}}_{ab}$ átlag és $\Delta \mathcal{E}_{ab}$ különbséggel. Előbbi a (7.41) effektív Einstein egyenlet spúr-mentes részéből fejezhető ki, utóbbit (7.43b) adja meg a bránon értelmezett mennyiségekkel.

7.5. Összefoglalás

Ebben a fejezetben részletesen bemutattam, miként lehet a bránon élő megfigyelő szemszögéből tárgyalni a gravitációs dinamikát. Ezt az 5D Einstein egyenletek bránra történő vetítésével értem el, melynek nyomán tenzori, vektori és skalár-projekciók álltak elő. A brán disztribúcionális energia-impulzust tartalmaz (a csak 3+1 dimenzióban létező standard modell mezőket, valamint a brán feszültséget), ez a brán külső görbületében ugrást okoz. Levezettem a gravitációs dinamika tenzori szabadsági fokainak bránon történő fejlődését meghatározó effektív Einstein egyenletet az irodalomban korábban létező alakjánál jóval általánosabb formában, azaz megengedve i) a brán beágyazásának tetszőleges, aszimmetrikus jellegét, ii) a brán feszültségének változását. Utóbbi miatt mind a gravitációs állandó ((7.38) egyenlet), mind a kozmológiai állandó ((7.40) egyenlet) változó lesz, változásait természetesen a megfigyelésekkel összhangba kell hozni. Változó konstansokat tartalmazó egyéb elméletek is ismertek az irodalomban [188]-[189]. Megmutattam, hogy a gravitációs dinamika a Codazzi és a kétszer kontrahált Gauss egyenletekkel válik teljessé. A következő fejezetekben az itt kidolgozott formalizmus alkalmazásaira kerül majd sor.

dc_223_11

8. fejezet

Brán-kozmológia

Ebben a fejezetben az előző fejezetben kidolgozott formalizmus kozmológiai alkalmazásait vizsgálom. A tárgyalás olyan szempontból hagyományos lesz, hogy mind a bránon található anyagra, mind a brán geometriájára felteszem a kozmológiai szimmetriákat, azaz homogén és izotróp brán-kozmológiákat vizsgállok. Az ideális folyadéokra vonatkozó egyenleteket tetszőleges 5D téridő esetén a 8.1 alfejezetben adom meg. Ezt követően felteszem, hogy az 5D téridő sugárzást és töltött fekete lyukat is tartalmazhat, valamint minden pontjában rendelkezik a kozmológiai szimmetriákkal. Az említett tulajdonságokkal bíró töltött VAdS5 téridőt és a kozmológiai egyenleteket a 8.2 alfejezetben ismertetem a [9] munkám nyomán.

A fejezet fennmaradó részében a kozmológiai modell két alkalmazását tárgyalom. A 8.3 alfejezetben olyan modellt ismertetek, melyben az 5D sugárzás a brán által kibocsájtott gravitonokból áll. Itt a sugárzásnak és az aszimmetrikus beágyazásnak a kozmológiai fejlődésre kifejtett együttes hatását vizsgálom, konstans brán feszültség esetén, [11] munkám nyomán. A 8.4 alfejezetben pedig szimmetrikus beágyazás mellett az Eötvös törvény szerint változó brán feszültség hatását tanulmányozom, [10] munkám nyomán.

A 8.5 alfejezet egy további szimmetria, a sztatikusság feltevése mellett előálló kozmológiai bránt ismertet, az Einstein bránt (valamint ennek homogén párját), [12], [13] munkáim nyomán. Az Einstein brán, az irodalom állításaival ellentétben, nem a SAdS5 téridőbe (a VAdS5 téridő vákuum esete) ágyazott. Rámutatok arra, hogy az irodalom unicitás-bizonyítása miért sérül ebben az esetben.

A 8.6 alfejezet összefoglalja a brán-kozmológiával kapcsolatos eredményeket.

8.1. Ideális folyadék Friedmann bránon

A kozmológiai szimmetriákat felmutató, ideális folyadékot tartalmazó bránt Friedmann bránnak nevezzük. Az indukált metrikát következő alakban vesszük fel:

$$g_{ab} = -u_a u_b + a^2(\tau) h_{ab} , \quad (8.1)$$

itt $a(\tau)$ a skálafaktor, τ a kozmológiai idő, h_{ab} a konstans τ időhöz tartozó maximálisan szimmetrikus, konstans görbületű 3-metrika (a görbületi index $k = 1, 0, -1$ lehet). Az

$u^a = (\partial/\partial\tau)^a$ időszerű kongruencia az $u^a u_a = -1$ és $h_{ab} u^a = 0$ feltételeknek tesz eleget. Az első feltételből $u_b \nabla_a u^b = 0$ is következik. Az u^a vektorhoz adaptált bázisban könnyen belátható, hogy az $u^b \nabla_b u^a$ vektor nulla, és mivel egy vektor eltűnése bázis-független állítás, általában is igaz, hogy $u^b \nabla_b u^a = 0$.

Ponttal jelöljük a τ szerinti időderiváltat, ez az u^a irányba vett, az u^a vektormezőre merőleges (konstans τ által jellemzett) hiperfelületre vetített Lie-derivált. A $\dot{h}_{ab} = 0$ feltételből származtatható

$$u^c \nabla_c h_{ab} = -\frac{1}{a^2} (\nabla_a u_b + \nabla_b u_a) , \quad (8.2)$$

ennek spúrja

$$\nabla_a u^a = 3 \frac{\dot{a}}{a} . \quad (8.3)$$

A brán feszültség megváltozása miatt nem sérülhetnek a kozmológiai szimmetriák, így a brán feszültség csakis τ függvénye lehet: $\lambda = \lambda(\tau)$. A bránon található ideális folyadék energia-impulzus tenzora pedig

$$T_{ab} = \rho(\tau) u_a u_b + p(\tau) a^2 h_{ab} , \quad (8.4)$$

a korábban bevezetett u^a pedig a 4-es sebessége. A tér izotrópiája és homogenitása miatt $h_{ab} \nabla^b a = h_{ab} \nabla^b \rho = h_{ab} \nabla^b p = h_{ab} \nabla^b \lambda = 0$, azaz az $f = (a, \rho, p, \lambda)$ függvények bármelyikére igaz, hogy

$$\nabla_a f = g_a^b \nabla_b f = -u_a \dot{f} . \quad (8.5)$$

Hasonló összefüggések érvényesek bármilyen kizárólag csak τ -tól függő mennyiségre.

Az energia-impulzusban kvadratikus (7.33) forrástag az ideális folyadék esetében

$$\tilde{\kappa}^4 S_{ab} = \kappa^2 \frac{\rho}{\lambda} \left[\frac{\rho}{2} u_a u_b + \left(\frac{\rho}{2} + p \right) a^2 h_{ab} \right] . \quad (8.6)$$

Az effektív Einstein egyenletben szereplő többi spúrmentes forrástaghoz egy U effektív energiasűrűséget rendelünk következő módon:

$$-\bar{\mathcal{E}}_{ab} + \bar{L}_{ab}^{TF} + \bar{\mathcal{P}}_{ab} = \kappa^2 U \left(u_a u_b + \frac{a^2}{3} h_{ab} \right) . \quad (8.7)$$

Az U nemlokális (Weyl), a beágyazás aszimmetriáját jellemző és 5D anyagi járulékokat egyaránt tartalmaz.

Az (8.1) metrikához tartozó Einstein tenzor

$$G_{ab} = 3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} u_a u_b - [2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k] h_{ab} . \quad (8.8)$$

A (7.41) effektív Einstein egyenlet nem-triviális projekciói az általánosított Friedmann és általánosított Raychaudhuri egyenletek lesznek:

$$3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \Lambda + \kappa^2 \left[\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + U \right] , \quad (8.9)$$

$$6 \frac{\ddot{a}}{a} = 2\Lambda - \kappa^2 \left[\rho \left(1 + \frac{2\rho}{\lambda} \right) + 3p \left(1 + \frac{\rho}{\lambda} \right) + 2U \right] . \quad (8.10)$$

A (7.45) energia-mérleg egyenlet időszerű és térszerű projekciói:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = -\dot{\lambda} + \Delta(u^c n^d \tilde{T}_{cd}) , \quad (8.11)$$

$$\Delta(h_a^c n^d \tilde{T}_{cd}) = 0 . \quad (8.12)$$

Mivel a normál vektorok a brán két oldalán $n_R = n$ és $n_L = -n$, a (8.11) egyenlet jobboldalának második tagja tükör-szimmetrikus esetben is lehet nem nulla. Ha a (8.11) egyenlet jobboldalán mindkét tag eltűnik, az energia-mérleg egyenlet a folyadékra vonatkozó folytonossági egyenletté válik. Ha csak $\Delta(u^c n^d \tilde{T}_{cd}) = 0$, viszont a brán feszültség változik, a (8.11) egyenlet a $\rho + \lambda$ energiasűrűségű és $p - \lambda$ nyomású folyadékra vonatkozó folytonossági egyenletté válik.

A (7.47) kétszer kontrahált Bianchi azonosság az itt vizsgált sajátos esetben a (7.38), (8.1), (8.3), (8.4), (8.7), (8.12) egyenletek felhasználásával egyszerűsíthető. Megjegyzem, hogy a kozmológiai szimmetriákból az is következik, hogy az U , $\bar{L}$ és $\overline{(n^c n^d \tilde{\Pi}_{cd})}$ kizárólag τ függvényei. A kétszer kontrahált Bianchi azonosság térszerű projekciója identikusan eltűnik, míg az időszerű projekciója:

$$\kappa^2 \left(\dot{U} + 4U\frac{\dot{a}}{a} + U\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right) = \left[\frac{\bar{L}}{4} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \overline{(n^c n^d \tilde{T}_{cd})} \right] - \kappa^2 \left(1 + \frac{\rho}{\lambda} \right) \Delta(u^c n^d \tilde{T}_{cd}) . \quad (8.13)$$

A (7.47) kétszer kontrahált Bianchi azonosság $-(\tilde{\kappa}^4/4)p\dot{\lambda}u_b$ tagja egyszerűsödött a T_{ab} -ban kvadratikus tag megfelelő járulékával, így a (8.13) összefüggés mindössze egy explicit $\dot{\lambda}$ járulékot tartalmaz, mely $(\kappa^2 U)$ deriváltjából származik. Tovább egyszerűsíthető az egyenlet az $U_0(\tau)$ függvény bevezetésével:

$$U = U_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 , \quad (8.14)$$

itt a_0 integrációs konstans. A (7.39) és (7.40) összefüggések felhasználásával a következő áll elő:

$$\kappa^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \left(\dot{U}_0 + U_0 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right) + \dot{\lambda} - \kappa^2 \dot{\lambda} = \kappa^2 \left(1 + \frac{\rho}{\lambda} \right) \Delta(u^c n^d \tilde{T}_{cd}) . \quad (8.15)$$

A kétszer kontrahált Bianchi azonosság egyetlen nemeltűnő (8.15) komponense úgy is előáll, ha az általánosított Friedmann egyenlet időderiváltját képezzük, felhasználjuk a (8.10) általánosított Raychaudhuri egyenletet és a (8.11) energia-mérleg egyenletet. Ebből látszik, hogy a (8.11) energia-mérleg egyenlet általában nem következménye a Friedmann és Raychaudhuri egyenleteknek, mint a standard kozmológiában, hacsak (8.15) nem teljesül azonosan.

Végül felírom a (7.28) Lanczos egyenletet Friedmann bránon található ideális folyadékra:

$$\Delta K_{ab} = -\frac{\tilde{\kappa}^2}{3} [(2\rho + 3p - \lambda)u_a u_b + (\rho + \lambda) a^2 h_{ab}] . \quad (8.16)$$

Összefoglalásképp, a kozmológiai fejlődést a (8.9) általánosított Friedmann egyenlet, a (8.10) általánosított Raychaudhuri egyenlet és a (8.11) energia-mérleg egyenlet határozza meg. A (8.14) behelyettesítés után ezek az egyenletek Λ és U_0 ismeretleneket tartalmaznak, ezek mind a beágyazástól, mind az 5D forrásoktól függenek.

8.2. Töltött 5D Vaidya-Anti de Sitter téridő

A sugárzást és elektromágneses mezőt tartalmazó legáltalánosabb 5D téridő, mely minden pontjában rendelkezik a kozmológiai szimmetriákkal, azaz a Friedmann bránt tetszőleges pontjában tartalmazhatja, a töltött VAdS5 téridő. Az 5D sugárzást geometriai optikai közelítésben tekintjük. Ez azt jelenti, hogy a görbületi sugár mindvégig jóval nagyobb a hullámhossznál. Sugárzást tartalmazó 5D modelleket korábban a [173], [179] és [182]-[187] munkákban vizsgáltak. Az alábbiakban tárgyalni fogom a geometriát, a forrásokat, a beágyazást és a brán-dinamikát, utóbbit a Friedmann, Raychaudhuri és energia-mérleg egyenletek adják.

8.2.1. A geometria

Eddington-Finkelstein típusú koordinátákban a téridő

$$d\tilde{s}^2 = -f(v, r; k) dv^2 + 2\epsilon dv dr + r^2 [d\chi^2 + \mathcal{H}^2(\chi; k) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \quad (8.17)$$

Itt $\epsilon = 1$, ha v kifelé tartó null koordináta (így a $v = \text{konstans}$ vonalak befele tartanak), valamint $\epsilon = -1$, ha v befele tartó null koordináta (kifelé tartó $v = \text{konstans}$ vonalak). A metrikus függvények

$$\mathcal{H}(\chi; k) = \begin{cases} \sin \chi , & k = 1 \\ \chi , & k = 0 \\ \sinh \chi , & k = -1 \end{cases} \quad (8.18)$$

(itt k a konstans görbületű h_{ab} 3-metrika görbületi indexe) és

$$f(v, r; k) = k - \frac{1}{r^2} \left[2m(v) + \frac{\tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda}}{6} r^4 - \frac{q^2(v)}{r^2} \right] . \quad (8.19)$$

Az $m(v)$ és $q(v)$ függvények szabadon megválaszthatók. Ez a töltött VAdS5 téridő. A választott paraméterek függvényében a téridő nulla, egy vagy kettő darab horizonttal rendelkezik. A legegyszerűbb, $m = \text{konstans}$ és $q = 0$ választás mellett kapott metrika (a SAdS5 téridő) horizont szerkezetét [190] munkánkban részletesen tárgyaltuk).

A brán mindkét oldalán VAdS5 téridő található, ezek paraméterei és szabad függvényei különbözők lehetnek. Fekete lyuk tehát mindkét, csak egyik oldalon, esetleg egyik oldalon sem található. A két téridő-tartomány abban is eltérhet egymástól, hogy az $r = 0$ környezetét tartalmazza-e vagy sem. Ezt az η_I ($I = L, R$) index fejezi ki, mely akkor 1, ha a kérdéses tartomány tartalmazza $r = 0$ -t, egyébként 0.

A VAdS5 metrikát kovariánsan következő alakban vesszük fel:

$$\tilde{g}_{ab} = -u_a u_b + n_a n_b + r^2 h_{ab} . \quad (8.20)$$

A (v, r) koordináták helyett használni fogjuk a (τ, y) koordinátákat is. Ezek a folyadék u^a 4-es sebességéhez, valamint a brán $n^a = (-1)^\sigma (\partial/\partial y)^a$ normálisához adaptáltak. A $(-1)^\sigma$

előjelt azért vezetjük be, hogy az y koordináta növekedhessen vagy éppen csökkenhessen a normális mentén. Kifelé tartó y koordináta esetén

$$\sigma = \begin{cases} \eta_R , & \text{jobb tartomány} \\ \eta_L + 1 , & \text{bal tartomány} \end{cases} \quad (8.21)$$

(a brán normálisa, mint korábban, most is jobbra mutat). Megjegyezzük még, hogy u csakis a horizontokon kívül tekinthető időszerűnek, azaz csak ott bír 4-es sebesség jelleggel. A duális koordináta bázisok kapcsolata

$$\begin{aligned} dv &= \dot{v}d\tau + v'dy , \\ dr &= \dot{r}d\tau + r'dy , \end{aligned} \quad (8.22)$$

itt a pont és vessző τ és y szerinti deriváltak. A vektor bázisok a transzponált inverz mátrixsal transzformálódnak:

$$\begin{aligned} u_{\cdot} &\equiv \frac{\partial}{\partial \tau} = \dot{v} \frac{\partial}{\partial v} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} , \\ (-1)^{\sigma} n_{\cdot} &\equiv \frac{\partial}{\partial y} = v' \frac{\partial}{\partial v} + r' \frac{\partial}{\partial r} . \end{aligned} \quad (8.23)$$

A horizontokon kívül az u^a negatív egységnyi normájából kapjuk, hogy

$$f\dot{v} = \epsilon\dot{r} + S_1 (\dot{r}^2 + f)^{1/2} , \quad (8.24)$$

itt $S_1^2 = 1$. Mint azt a [9] munkámban megmutattam, $S_1 = (-1)^{\eta+1}$. Egyszerű számolás vezet a

$$\dot{v}^{-1} = -\epsilon\dot{r} + S_1 (\dot{r}^2 + f)^{1/2} \quad (8.25)$$

összefüggéshez. A fenti két egyenlet szerint a horizonton kívül ($f > 0$) a $\dot{v}$ előjelét S_1 adja, ϵ értékétől függetlenül.

Az u 1-forma így

$$u_{\cdot} \equiv g(u, \cdot) = -S_1 (\dot{r}^2 + f)^{1/2} dv + \epsilon \dot{v} dr . \quad (8.26)$$

A $g(n, u) = 0$ feltételből:

$$r' = \frac{\epsilon f \dot{v} - \dot{r}}{\dot{v}} v' = \epsilon S_1 (\dot{r}^2 + f)^{1/2} \frac{v'}{\dot{v}} , \quad (8.27)$$

míg n^a egységnyi hosszából, az (8.24), (8.25) és (8.27) egyenletek felhasználásával

$$v' = S_2 \dot{v} \quad (8.28)$$

következik ($S_2^2 = 1$). A normális forma tehát

$$n_{\cdot} \equiv g(n, \cdot) = (-1)^{\sigma} \epsilon S_2 (-\dot{r} dv + \dot{v} dr) . \quad (8.29)$$

Az (8.22) és (8.24) egyenletekből az is következik, hogy $u_{\cdot} = -d\tau$ és $n_{\cdot} = (-1)^{\sigma} dy$ (mindkét összefüggés független az S_1 és S_2 előjelektől).

Közvetlen számolás adja az 5D Weyl tenzor elektromos részét:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ab} &= \frac{1}{4r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial f}{\partial r} + 2f - 2k \right) \left(u_a u_b + \frac{r^2}{3} h_{ab} \right) \\ &= \frac{3 [5q^2(v) - 4m(v)r^2]}{2r^6} \left(u_a u_b + \frac{r^2}{3} h_{ab} \right) .\end{aligned}\quad (8.30)$$

Az effectív Einstein egyenletben szereplő megfelelő forrástag így

$$\begin{aligned}-\bar{\mathcal{E}}_{ab} &= \kappa^2 U^{Weyl} \left(u_a u_b + \frac{r^2}{3} h_{ab} \right) , \\ \kappa^2 U^{Weyl} &= \frac{6\bar{m}}{r^4} - \frac{15}{2r^6} \left(\bar{q}^2 + \frac{(\Delta q)^2}{4} \right) .\end{aligned}\quad (8.31)$$

(Itt felhasználtuk azt az általános összefüggést, miszerint tetszőleges h mennyiség négyzetének átlaga $\bar{h}^2 = \bar{h}^2 + (\Delta h)^2/4$ módon számolható)

8.2.2. Az 5D források

A töltött VAdS5 metrika forrásai (8.17) a $\tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda}$ 5D kozmológiai állandó, valamint az $m(v)$ tömegeloszlásért felelős sugárzás és a $q(v)$ töltéssűrűséggel összefüggő elektromágneses mező szuperpozíciója.

Az elektromágneses mező energia-impulzus tenzora:

$$\tilde{T}_{ab}^{EM} = \frac{3q^2(v)}{\tilde{\kappa}^2 r^6} (u_a u_b - n_a n_b + r^2 h_{ab}) , \quad (8.32)$$

ezt az $A_a = l_a q(v)/r^2$ null 5-ös potenciál hozza létre.

A geometriai optikai közelítésben tekintett sugárzás (null por) energia-impulzus tenzora:

$$\tilde{T}_{ab}^{ND} = \frac{3\beta(v, r)}{\tilde{\kappa}^2 r^3} l_a l_b . \quad (8.33)$$

A sugárzás a centrum ($r = 0$) felé tartó, ha $\epsilon = 1$ és kifelé tartó, ha $\epsilon = -1$. Eszerint a sugárzás vagy közelít a bránhoz vagy távolodik tőle, ez a brán két oldalán akár különbözhet is. Az ϵ_I és η_I definícióiból következik, hogy az $\epsilon_I (-1)^{\eta_I}$ globális előjel negatív a bránt elhagyó, pozitív a bránhoz közeledő, általa elnyelt sugárzás esetén.

A (8.33) egyenletben l egy null 1-forma:

$$l = dv = \dot{v} [(-1)^\sigma S_2 n - u] , \quad (8.34)$$

így a folyadék 4-es sebességével és a brán normálisával kifejezve az energia-impulzus tenzor

$$\tilde{T}_{ab}^{ND} = \frac{3\beta \dot{v}^2}{\tilde{\kappa}^2 r^3} [n_a n_b + 2(-1)^{\sigma+1} S_2 u_{(a} n_{b)} + u_a u_b] . \quad (8.35)$$

A lineáris tömegsűrűség dimenziójú $\beta(v, r)$ függvény a sugárzás energia-sűrűségével kapcsolatos. Az 5D Einstein egyenletek összekapcsolják a β, m és q függvényeket:

$$\epsilon\beta = \frac{dm}{dv} - \frac{q}{r^2} \frac{dq}{dv} . \quad (8.36)$$

A bránon (mind később látni fogjuk, ez $r = a(\tau)$ egyenlettel adható meg) a teljes $\tilde{T}_{ab} = \tilde{T}_{ab}^{ND} + \tilde{T}_{ab}^{EM}$ energia-impulzus tenzor (8.11) energia-mérleg egyenletben előforduló projekciója

$$u^c n^d \tilde{T}_{cd} = \frac{3\epsilon(-1)^\sigma \beta \dot{v}^2}{\tilde{\kappa}^2 a^3}, \quad (8.37)$$

így

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) &= -\dot{\lambda} + \frac{3}{\tilde{\kappa}^2 a^3} \Delta [\epsilon(-1)^\sigma \beta \dot{v}^2] \\ &= -\dot{\lambda} + \frac{3}{\tilde{\kappa}^2 a^3} \sum_{I=L,R} \epsilon_I (-1)^{\eta_I} \beta_I \dot{v}_I^2, \end{aligned} \quad (8.38)$$

Végül a $\overline{\mathcal{P}}_{ab}$ forrástagot

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}_{ab} &= \kappa^2 U^{ch-rad} \left(u_a u_b + \frac{a^2}{3} h_{ab} \right), \\ \kappa^2 U^{ch-rad} &= \frac{3}{2a^3} \overline{\beta \dot{v}^2} + \frac{3}{a^6} \left(\overline{q^2} + \frac{(\Delta q)^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (8.39)$$

összefüggés adja meg.

8.2.3. A beágyazás

A brán $y = 0$ helyen található, ezért a (τ, y) koordinátákban csak a τ koordinátája változhat, ez fejezi ki mozgását az 5D téridőben. A $v = v(\tau)$ beágyazási feltételt a (8.24) egyenlet, valamint $r = a(\tau)$ adja. Utóbbi lehetővé teszi, hogy r és $\dot{r}$ helyett az a és $\dot{a}$ mennyiségeket írjuk az előzőekben ismertett képletekbe, amennyiben azokat a bránon értékeljük ki. Az n normálist és a brán u tangensét a (8.23) egyenletek adják meg, míg az indukált metrikát (8.1). Közvetlen számolásból kapjuk a külső görbületet:

$$K_{ab} = (-1)^{\sigma+1} \epsilon S_1 S_2 \left[\frac{2\ddot{a} + \frac{\partial f}{\partial a} - \epsilon \dot{v}^2 \frac{\partial f}{\partial v}}{2(\dot{a}^2 + f)^{1/2}} u_a u_b - (\dot{a}^2 + f)^{1/2} a h_{ab} \right]. \quad (8.40)$$

Bevezetve a

$$2A_I = 2\ddot{a} + \frac{\partial f_I}{\partial a} - \epsilon_I \dot{v}_I^2 \frac{\partial f_I}{\partial v}, \quad (8.41)$$

$$B_I = (-1)^{\eta_I} (\dot{a}^2 + f_I)^{1/2}, \quad (8.42)$$

jelöléseket, ahol $I = R, L$, a külső görbület ugrása és átlaga

$$\epsilon S_1 S_2 \Delta K_{ab} = -2 \left(\frac{A}{B} \right) u_a u_b + 2\overline{B} a h_{ab}, \quad (8.43)$$

$$2\epsilon S_1 S_2 \overline{K}_{ab} = -\Delta \left(\frac{A}{B} \right) u_a u_b + \Delta B a h_{ab}. \quad (8.44)$$

A $\overline{K}_{ab}$ (8.44) kifejezéséből előáll a Λ beágyazásból származó része:

$$\overline{L} = -\frac{3\Delta B}{2a} \left[\Delta \left(\frac{A}{B} \right) + \frac{\Delta B}{a} \right], \quad (8.45)$$

valamint az effektív Einstein egyenlet beágyazásból származó forrás-tagja:

$$\begin{aligned}\bar{L}_{ab}^{TF} &= \kappa^2 U^{emb} \left(u_a u_b + \frac{a^2}{3} h_{ab} \right) \\ \kappa^2 U^{emb} &= \frac{3\Delta B}{8a} \left[\frac{\Delta B}{a} - \Delta \left(\frac{A}{B} \right) \right].\end{aligned}\quad (8.46)$$

Észrevehető, hogy az $\epsilon S_1 S_2$ előjel kiesett az $\bar{L}_{ab}^{TF}$ és $\bar{L}$ kifejezéseiből. Ez nem melepő, mivel mindkettő $\bar{K}_{ab}$ -ben kvadratikus.

8.2.4. Általánosított Friedmann és Raychaudhuri egyenletek

A (8.43) összefüggés és a (8.16) Lanczos egyenlet összehasonlításából kifejezhető $\overline{(A/B)}$ és $\bar{B}$ a brán feszültség és a folyadék változók függvényeként:

$$\epsilon S_1 S_2 \overline{\left(\frac{A}{B} \right)} = \frac{\tilde{\kappa}^2}{6} (2\rho + 3p - \lambda), \quad (8.47)$$

$$\epsilon S_1 S_2 \bar{B} = -\frac{\tilde{\kappa}^2}{6} (\rho + \lambda) a. \quad (8.48)$$

Képezve a (8.42) egyenlet négyzetét, majd átlagolva, ezután felhasználva (7.38) és (8.48) összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$\frac{\kappa^2}{6\lambda} (\rho + \lambda)^2 a^2 + \frac{(\Delta B)^2}{4} = \dot{a}^2 + \bar{f}. \quad (8.49)$$

Végül a (7.40) és (8.19) egyenletekből előáll a Friedmann egyenlet explicit alakja:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{\Lambda_0}{3} + \frac{\kappa^2 \rho}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \frac{2\bar{m}}{a^4} - \frac{\bar{q}^2}{a^6} + \frac{(\Delta B)^2}{4a^2} - \frac{(\Delta q)^2}{4a^6}. \quad (8.50)$$

A ΔB mennyiséget a (8.42) ugrásának négyzetéből számoljuk, felhasználva f és $\bar{B}$ (8.19) és (8.48) kifejezéseit, valamint $\Delta(h^2) = 2\bar{h} \Delta h$ összefüggést mind B , mind q -ra:

$$\epsilon S_1 S_2 \Delta B = \frac{12a^2 \Delta m - 12\bar{q} \Delta q + \tilde{\kappa}^2 a^6 \Delta \tilde{\Lambda}}{2\tilde{\kappa}^2 a^5 (\rho + \lambda)}. \quad (8.51)$$

A globális $\epsilon S_1 S_2$ előjel a Friedmann egyenletben nem szerepel, mert az a $(\Delta B)^2$ kifejezést tartalmazza.

Az A , f és β mennyiségek (8.41), (8.19) és (8.36) definícióiból meghatározzuk A átlagát és ugrását is:

$$\bar{A} = \ddot{a} + \frac{2\bar{m}}{a^3} - \frac{\tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda}}{6} a - \frac{2}{a^5} \left(\bar{q}^2 + \frac{(\Delta q)^2}{4} \right) + \frac{\bar{\beta} \dot{v}^2}{a^2}, \quad (8.52)$$

$$\Delta A = \frac{2\Delta m}{a^3} - \frac{\tilde{\kappa}^2 \Delta \tilde{\Lambda}}{6} a - \frac{4\bar{q} \Delta q}{a^5} + \frac{\Delta(\beta \dot{v}^2)}{a^2}. \quad (8.53)$$

A levezetett ΔA és ΔB kifejezések eleget tesznek

$$3\Delta A + \tilde{\kappa}^2 a C = \tilde{\kappa}^2 (\rho + \lambda) \epsilon S_1 S_2 \Delta B \quad (8.54)$$

összefüggésnek, itt bevezettük a

$$C = \Delta \tilde{\Lambda} + \frac{6\bar{q}\Delta q}{\tilde{\kappa}^2 a^6} - \frac{3\Delta(\beta\dot{v}^2)}{\tilde{\kappa}^2 a^3} \quad (8.55)$$

jelölést. Ugyanez az összefüggés előáll a (8.41) és (8.42) összefüggésekből is. Az $\overline{(A/B)}$ definíciójából egy második kifejezést nyerünk $\overline{A}$ -ra:

$$\overline{A} = \frac{1}{\overline{B}} \left[\frac{\Delta A \Delta B}{4} + \overline{\left(\frac{A}{B}\right)} \left(\overline{B}^2 - \frac{(\Delta B)^2}{4} \right) \right]. \quad (8.56)$$

Ezt a (8.47), (8.48), (8.51), (8.53) összefüggések felhasználásával írhatjuk fel expliciten. Ezt követően összehasonlítjuk $\overline{A}$ kétféle kifejezését, felhasználva (7.38), (7.40) összefüggéseket, és így a Raychaudhuri egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} = & \frac{\Lambda_0}{3} - \frac{\kappa^2}{6} \left[\rho \left(1 + \frac{2\rho}{\lambda} \right) + 3p \left(1 + \frac{\rho}{\lambda} \right) \right] - \frac{2\overline{m}}{a^4} + \frac{2}{a^6} \left(\overline{q}^2 + \frac{(\Delta q)^2}{4} \right) - \frac{\overline{\beta\dot{v}^2}}{a^3} \\ & - \frac{3 \left(12a^2 \Delta m - 12\bar{q}\Delta q + \tilde{\kappa}^2 a^6 \Delta \tilde{\Lambda} \right)}{4\tilde{\kappa}^4 a^9 (\rho + \lambda)^2} \Delta(\beta\dot{v}^2) + \frac{3\Delta_2}{2\tilde{\kappa}^4 a^{12} (\rho + \lambda)^3}. \end{aligned} \quad (8.57)$$

ahol

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & 18a^4 (p - \lambda) (\Delta m)^2 + 12a^2 (\rho - 3p + 4\lambda) \bar{q}\Delta q \Delta m \\ & + \tilde{\kappa}^2 a^8 (2\rho + 3p - \lambda) \Delta \tilde{\Lambda} \Delta m - 6(2\rho - 3p + 5\lambda) \bar{q}^2 (\Delta q)^2 \\ & - \tilde{\kappa}^2 a^6 (\rho + 3p - 2\lambda) \bar{q}\Delta q \Delta \tilde{\Lambda} + \frac{\tilde{\kappa}^4}{24} a^{12} (4\rho + 3p + \lambda) (\Delta \tilde{\Lambda})^2 \end{aligned} \quad (8.58)$$

A Friedmann és Raychaudhuri egyenleteket úgy is levezethetjük, ha U és Λ összes járulékát összegezzük. Ehhez először megjegyezzük, hogy a (8.56) összefüggésből

$$\Delta \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{\Delta A}{\overline{B}} - \overline{\left(\frac{A}{B} \right)} \frac{\Delta B}{\overline{B}}. \quad (8.59)$$

A (8.46) egyenletvől kiindulva kiszámoljuk U^{emb} explicit alakját:

$$\kappa^2 U^{emb} = \frac{9 \left(12a^2 \Delta m - 12\bar{q}\Delta q + \tilde{\kappa}^2 a^6 \Delta \tilde{\Lambda} \right)}{8\tilde{\kappa}^4 a^9 (\rho + \lambda)^2} \Delta(\beta\dot{v}^2) + \frac{9\delta_{2,U}}{8\tilde{\kappa}^4 a^{12} (\rho + \lambda)^3}, \quad (8.60)$$

ahol

$$\begin{aligned} \delta_{2,U} = & 12a^4 (\rho - 3p + 4\lambda) (\Delta m)^2 - 24a^2 (2\rho - 3p + 5\lambda) \bar{q}\Delta q \Delta m \\ & - 2\tilde{\kappa}^2 a^8 (\rho + 3p - 2\lambda) \Delta m \Delta \tilde{\Lambda} + 36(\rho - p + 2\lambda) \bar{q}^2 (\Delta q)^2 \\ & + 6\tilde{\kappa}^2 a^6 (p - \lambda) \bar{q}\Delta q \Delta \tilde{\Lambda} - \frac{\tilde{\kappa}^4}{4} a^{12} (\rho + p) (\Delta \tilde{\Lambda})^2. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Az U (8.31), (8.39) és (8.60) járulékait összegezve, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \kappa^2 U = & \frac{6\overline{m}}{a^4} - \frac{9}{2a^6} \left(\overline{q}^2 + \frac{(\Delta q)^2}{4} \right) + \frac{3\overline{\beta\dot{v}^2}}{2a^3} \\ & + \frac{9 \left(12a^2 \Delta m - 12\bar{q}\Delta q + \tilde{\kappa}^2 a^6 \Delta \tilde{\Lambda} \right)}{8\tilde{\kappa}^4 a^9 (\rho + \lambda)^2} \Delta(\beta\dot{v}^2) + \frac{9\delta_{2,U}}{8\tilde{\kappa}^4 a^{12} (\rho + \lambda)^3}, \end{aligned} \quad (8.62)$$

A Λ kiszámolásához a (7.39) definícióból indulunk ki. Azt kapjuk, hogy

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{3}{2a^6} \left(\bar{q}^2 + \frac{(\Delta q)^2}{4} \right) - \frac{3\bar{\beta}\dot{v}^2}{2a^3} - \frac{9 \left(12a^2 \Delta m - 12\bar{q}\Delta q + \tilde{\kappa}^2 a^6 \Delta \tilde{\Lambda} \right)}{8\tilde{\kappa}^4 a^9 (\rho + \lambda)^2} \Delta(\beta\dot{v}^2) + \frac{9\delta_{2,\Lambda}}{8\tilde{\kappa}^4 a^{12} (\rho + \lambda)^3}, \quad (8.63)$$

ahol

$$\begin{aligned} \delta_{2,\Lambda} = & 12a^4 (\rho + 3p - 2\lambda) (\Delta m)^2 - 72a^2 (p - \lambda) \bar{q}\Delta q \Delta m \\ & + 6\tilde{\kappa}^2 a^8 (\rho + p) \Delta m \Delta \tilde{\Lambda} - 12 (\rho - 3p + 4\lambda) \bar{q}^2 (\Delta q)^2 \\ & - 2\tilde{\kappa}^2 a^6 (2\rho + 3p - \lambda) \bar{q}\Delta q \Delta \tilde{\Lambda} + \frac{\tilde{\kappa}^4}{12} a^{12} (5\rho + 3p + 2\lambda) (\Delta \tilde{\Lambda})^2. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Behelyettesítve U és Λ fenti kifejezéseit (8.9) és (8.10) egyenletekbe, ismét előállnak a Friedmann és Raychaudhuri egyenletek korábban levezetett explícit alakjai, a (8.50) és (8.57) összefüggések. A levezetéshez hasznosnak bizonyuló összefüggések:

$$\delta_{2,\Lambda} + \delta_{2,U} = \frac{2\tilde{\kappa}^4}{3} a^{10} (\rho + \lambda)^3 (\Delta B)^2, \quad (8.65)$$

$$\delta_{2,\Lambda} - \delta_{2,U} = 4\Delta_2. \quad (8.66)$$

Ezzel kétféleképpen is levezettük a töltött VAdS5 téridőbe ágyazott Friedmann brán gravitációs dinamikáját. A [9] munkámban az itt ismertetett egyenletek helyességét egyéb konzisztencia-számolásokkal is ellenőriztem. Az itt kidolgozott formalizmus igen általános, lehetővé teszi például mind belső ($S_1 = 1$), mind külső ($S_1 = -1$) VAdS5 téridő-tartományoknak a brán két oldalához való illesztését. Ezidáig az irodalomban csak belső tartományok illesztését vizsgálták.

8.3. Sugárzó Friedmann brán dinamikája

A [11] munkában megvizsgáltuk az előző alfejezetben kidolgozott kozmológia olyan esetét, melyben a brán feszültség állandó ($\dot{\lambda} = 0$), a brán térszerű része sík ($k = 0$), a brán kozmológiai állandó nulla ($\Lambda = 0 = \Lambda_0$), valamint a brán két oldalán belső, azaz fekete lyukat tartalmazó töltésmentes VAdS5 tartományok találhatók. A brán homogenitása átlagos értelemben értendő, a megengedett kis fluktuációk gravitációs hullámokat keltenek, ezek egyrésze az extra dimenzióba távozhat. Részecskefizikai terminológiában a bránon található részecskék kölcsönhatásai 5D gravitonokat keltenek [191]. Ezt a különösen nagy energiákon jelentős effektust a brán által radiális irányba kibocsátott sugárzás-ként, geometriai optikai közelítésben modellezzük. Az energia-mérleg egyenletben szereplő sugárzással összefüggő tagot a sugárzási korszakban ($p = \rho/3$) érvényes kinetikus elméleti megfontolásokból határozták meg [182] munkában, eszerint, valamint az előző alfejezetben ismertetett előjel-konvenciók szerint:

$$\frac{3}{\tilde{\kappa}^2 a^3} \Delta [\epsilon (-1)^\sigma \beta \dot{v}^2] = -\frac{\tilde{\kappa}^2}{6} \alpha \rho^2, \quad (8.67)$$

itt α egy dimenziótlan kis állandó, míg a mínusz előjel azt fejezi ki, hogy a sugárzás a bránról távozik. Ezt a sugárzást a brán két oldalán szimmetrikusnak vesszük.

A [192] munkában tárgyalt szimmetrikus esetben azt találták, hogy a fekete lyukak tömege monoton növekvő, de a késői kozmológiai korszakban konstanshoz tart. A [11] munkánkban azt vizsgáltuk, hogy amennyiben a brán két oldalán különböző kozmológiai állandók és különböző tömegfüggvények vannak, ez az aszimmetria hogyan módosítja az eredményeket.

A vonatkozó egyenleteket nem adom itt meg (ezek könnyen levezethetők az előző alfejezetben megadott egyenletekből), hanem csak a dinamika numerikus vizsgálatából származó eredményeket ismertetem. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\hat{t} = \frac{\tilde{\kappa}^2 \lambda}{6} \tau, \quad \hat{m} = \frac{36}{\tilde{\kappa}^4 \lambda^2} \overline{m}, \quad (8.68)$$

$$q = \frac{36}{\tilde{\kappa}^4 \lambda^2} \Delta m, \quad \xi = \frac{|\Delta \tilde{\Lambda}|}{\tilde{\kappa}^2 \lambda^2}. \quad (8.69)$$

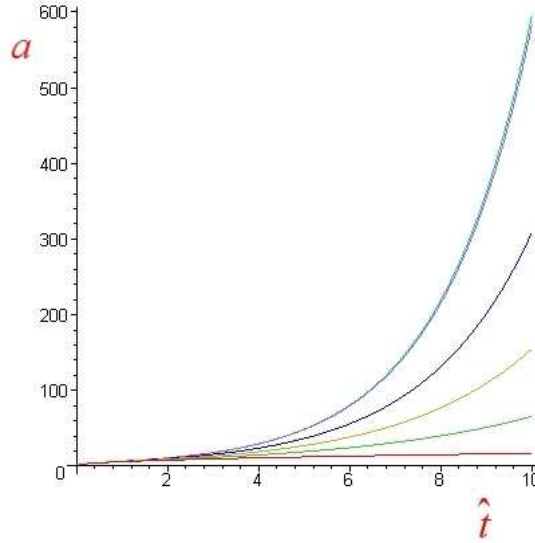
A $\hat{t}$, $\hat{m}/a^4$, q/a^4 és ξ mennyiségek dimenziótlanok, közülük q és ξ az aszimmetriát jellemzik. Mivel $\tilde{\Lambda} < 0$ a brán mindkét oldalán, $|\Delta \tilde{\Lambda}| < -2\tilde{\Lambda}$, a (7.40) egyenletekből

$$0 \leq \xi < \frac{1}{3} \quad (8.70)$$

következik.

Eredményeinket a következő öt ábra foglalja össze. Az első három ábra a ξ változtatásának hatását szemlélteti konstans q (0) mellett, vagyis a kozmológiai konstansban fennálló aszimmetriára koncentrál. A 8.1. ábra a skálafaktor viselkedését mutatja: az 5D kozmológiai konstansok különbözősége a késői kozmológiai korszakban gyorsuló táguláshoz vezet [151], [154]. Ez könnyen belátható a (8.50)-(8.51) egyenletekből, melyek szerint az 5D kozmológiai konstansok közötti eltérés a Friedmann egyenletben egy $(\Delta \tilde{\Lambda})^2/16(\rho + \lambda)^2$ tagot ad, ennek a $\rho \ll \lambda$ késő univerzumbeli értéke $(\Delta \tilde{\Lambda}/4\lambda)^2$, ami a $3(\Delta \tilde{\Lambda}/4\lambda)^2$ effektív 4D kozmológiai konstans hatásának felel meg. A tömegfüggvények $\hat{m}$ átlagának a 8.2. ábrán látszó időfejlődése azt mutatja, hogy az 5D kozmológiai konstansok közti aszimmetria növekedésével az $\hat{m}$ aszimptotikus értéke csökken. Mivel a nukleoszintéziskor már teljesül a $\rho \ll \lambda$ feltétel, a Friedmann egyenlet $\hat{m}$ -et tartalmazó tagja a^{-4} típusú lesz, ezt nevezzük sötét sugárzásnak. A kisebb aszimptotikus $\hat{m}$ azt jelenti, hogy a nukleoszintézisből származó korlátokat [182] az aszimmetria növelésével egyre könnyebb teljesíteni. Végül a 8.3. ábra felhívja a figyelmet arra, hogy annak ellenére, hogy a kezdeti tömegkülönbséget nullának választottuk és a sugárzás is szimmetrikus, a kozmológiai állandók által okozott görbületkülönbség miatt a tömegek más-más aszimptotikus értékhez tartanak a brán két oldalán, és ez a különbség az aszimmetria mértékével együtt növekszik.

A sugárzás hatását főként a korai korszakban lehet tetten érni. A 8.4 és 8.5 ábrák $q(0)$ változtatásának hatását mutatják be rögzített ξ mellett. Míg a skálafaktor fejlődésén $q(0)$ megváltoztatása alig látszik, az $\hat{m}$ átlagtömeg aszimptotikus értékét az aszimmetria ismét csökkenti.



8.1. ábra. Az $a(\hat{t})$ skálafaktor fejlődése $q(0) = 0$ választás mellett a késői kozmológiai korszakban gyorsuló tágulást mutat. A görbék lentől felfele az 5D kozmológiai konstans aszimmetria paraméter $\xi = 0, 0,027, 0,054, 0,081, 0,111$ értéke és $\alpha = 0,02, \hat{m}(0) = 0,005$ mellett készültek, [11] nyomán.

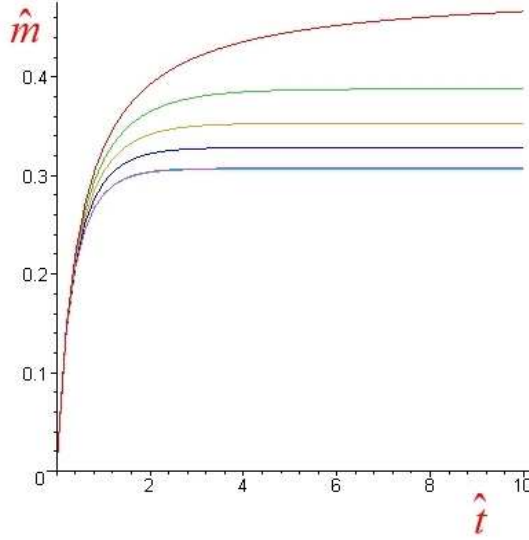
A sugárzó bránnal kapcsolatos vizsgálódások kétségkívül legfontosabb következménye, hogy mind az 5D kozmológiai állandók, mind az 5D tömegfüggvények brán két oldalán vett aszimmetriája csökkenti a sötét sugárzás késői korszakbeli értékét, így a kozmológiai fejlődés nukleoszintézisből származtatott kényszerei könnyebben teljesíthetők.

8.4. Eötvös brán

Ebben az alfejezetben a változó brán feszültség kozmológiai hatását vizsgálom [10] munkám nyomán. A brán feszültsége hasonló szerepet tölt be, mint a folyadék membránok feszültsége: összetartja a (mem)bránt. A folyadék membránok λ_{fluid} feszültsége hőmérséklet-függő: 1886 Eötvös megállapította a róla elnevezett empirikus törvényt [180]:

$$\lambda_{fluid} = K (T_c - T) , \quad (8.71)$$

itt K állandó és T_c a kritikus hőmérséklet, mely fölött a membrán megszűnik létezni. A brán nem más, mint a megfigyelhető Univerzum. Története során (a kozmikus háttér-sugárzás által megadott) hőmérséklete drasztikusan változott, a kezdeti igen forró állapotából napjaink 2,7 K-es hőmérsékletére hűlt le. Természetes a kérdés, miért kellene a brán feszültségének állandónak lenni ilyen extrém hőmérséklet-változás során? Munkahipotézisként feltesszük, hogy a brán feszültsége a folyadékmembránok feszültségéhez hasonlóan függ a hőmérséklettől és megvizsgáljuk, mennyire összeegyeztethető ez az Univerzum ismert történetével. Az egyszerűség kedvéért a VAdS5 téridőbe szimmetrikusan beágyazott Friedmann bránt tekintünk, melyen teljesül a folytonossági egyenlet. Utóbbi



8.2. ábra. Az átlagolt $\hat{m}(\hat{t})$ tömegfüggvény fejlődése $q(0) = 0$ választás mellett az aszimmetria mértékével csökkenő aszimptotikus átlagtömeget mutat. A görbék fentről lefele az 5D kozmológiai konstans aszimmetria paraméter $\xi = 0, 0,027, 0,054, 0,081, 0,111$ értéke és $\alpha = 0,02$, $\hat{m}(0) = 0,005$ mellett készültek, [11] nyomán.

feltevés egy finom-hangolást jelent a brán és az VAdS5 téridő sugárzási kölcsönhatása és a brán-feszültség változása között.

8.4.1. Változó konstansok

A $T \propto a^{-1}$ standard kozmológiai összefüggés felhasználásával az Eötvös törvény

$$\lambda = \lambda_{lt} - \frac{6l}{\tilde{\kappa}^4 a}, \quad (8.72)$$

alakú lesz, ahol $KT_c = \lambda_{lt}$ és l egy állandó. A 4D gravitációs csatolási állandó így

$$\kappa^2 = \kappa_{lt}^2 - \frac{l}{a}, \quad (8.73)$$

ahol

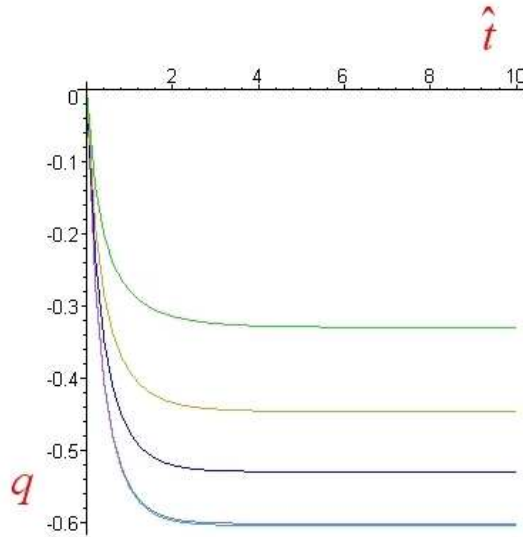
$$\kappa_{lt}^2 = \frac{\tilde{\kappa}^4 \lambda_{lt}}{6}. \quad (8.74)$$

Az lt index késői korszakot (late-time) jelöl, amikor mind λ , mind κ^2 második tagja $a \rightarrow \infty$ mellett nullához tart.

A kritikus hőmérséklet létezése miatt a változó feszültségű brán nem létezhet $a_{\min} = l/\kappa_{lt}^2$ értéknél kisebb skálafaktor esetén, mivel mind a feszültség, mind a 4D csatolási állandó negatívvá válna (megszűnne a brán és antigravitáció jelenne meg). Az $a_{\min}$ segítségével κ^2 és λ következő alakba írható:

$$\kappa^2 = \kappa_{lt}^2 \left(1 - \frac{a_{\min}}{a}\right), \quad (8.75)$$

$$\lambda = \lambda_{lt} \left(1 - \frac{a_{\min}}{a}\right). \quad (8.76)$$



8.3. ábra. A $q(\hat{t})$ tömegkülönbség-függvény fejlődése $q(0) = 0$ választás mellett az aszimmetria mértékével növekvő aszimptotikus tömegkülönbséget mutat. A görbék fentről lefele az 5D kozmológiai konstans aszimmetria paraméter $\xi = 0, 0,027, 0,054, 0,081, 0,111$ értéke és $\alpha = 0,02$, $\hat{m}(0) = 0,005$ mellett készültek, [11] nyomán.

Mindkét mennyiség nullából aszimptotikus értékekig növekszik, ezt 8.6 ábra szemlélteti. Megjegyezzük, hogy az 5D csatolási állandó nem hőmérséklet-függő:

$$\tilde{\kappa}^4 = \frac{6\kappa^2}{\lambda} = \frac{6\kappa_{lt}^2}{\lambda_{lt}}. \quad (8.77)$$

Mivel a brán-feszültség a skálafaktorral az Eötvös törvény szerint növekszik, a bránt Eötvös bránnak nevezzük. A brán feszültségre vonatkozó nukleoszintézisből származtatott kényszerek tehát a konstans λ esettől eltérően megengedik, hogy napjainkban a brán-feszültség a nukleoszintézis-kori értékénél nagyobb legyen.

A 4D kozmológiai állandó Λ_0 járuléka

$$\Lambda_0 = \Lambda_{lt} - \kappa_{lt}^2 \lambda_{lt} \frac{a_{\min}}{a} \left(1 - \frac{a_{\min}}{2a}\right) \quad (8.78)$$

módon változik, ezt a 8.7 ábra szemlélteti. Aszimptótikus értéke:

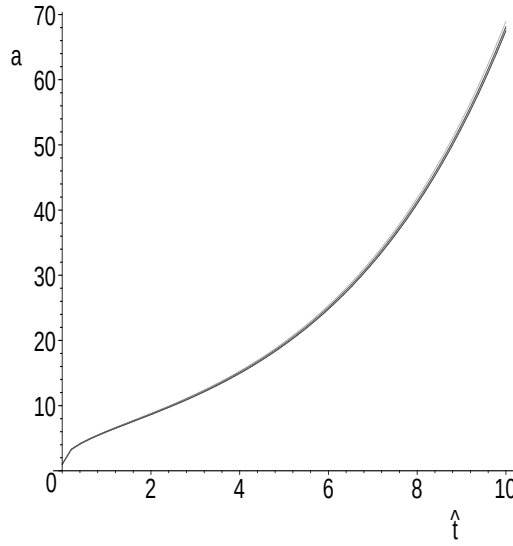
$$2\Lambda_{lt} = \kappa_{lt}^2 \lambda_{lt} + \tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda}. \quad (8.79)$$

Mint ahogy az a 8.7 ábrán látszik, a brán T_c hőmérsékleten való kialakulásakor $\Lambda_c = \Lambda_0(T_c)$ negatív:

$$\Lambda_c = \Lambda_{lt} - \frac{\kappa_{lt}^2 \lambda_{lt}}{2} = \frac{\tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda}}{2} < 0. \quad (8.80)$$

A növekvő a -val együtt járó lehűlés során a (8.78) jobboldalának második tagja folyamatosan növekszik:

$$\frac{d}{da} \left[-\frac{a_{\min}}{a} \left(1 - \frac{a_{\min}}{2a}\right) \right] = \frac{a_{\min}}{a^2} \left(1 - \frac{a_{\min}}{a}\right) > 0. \quad (8.81)$$



8.4. ábra. Az $a(\hat{t})$ skálafaktor $\xi = \frac{1}{6}$ valamint $q(0) = 0$ (legalsó), 10, 20, 30, 50 és 100 (legfelső görbe) értékei mellett. A $q(0)$ kezdeti tömeg-aszimmetria hatása elhanyagolható [11].

Így Λ_0 is növekszik a kozmológiai fejlődés során a $\Lambda_c < 0$ értéktől a pozitív Λ_{lt} értékig. A késői brán-univerzum Λ_{lt} értéke akkor kicsi, ha λ_{lt} és $\tilde{\Lambda}$ értékeit majdnem tökéletesen finom-hangoljuk.

Az Eötvös törvény szerint változó brán-feszültség tehát a következő módosításokat okozza a *korai* brán-univerzumban: (a) a brán hatások jelentősebbek, mivel a brán feszültség kisebb (az S_{ab} -ból származó ρ^2/λ forrás-tag hosszabb ideig dominál); (b) κ^2 eredetileg igen kis értéke miatt a gravitáció igen gyenge; and (c) a hatalmas negatív kozmológiai állandó gravitációs vonzást eredményez.

8.4.2. Kozmológia az Eötvös bránon

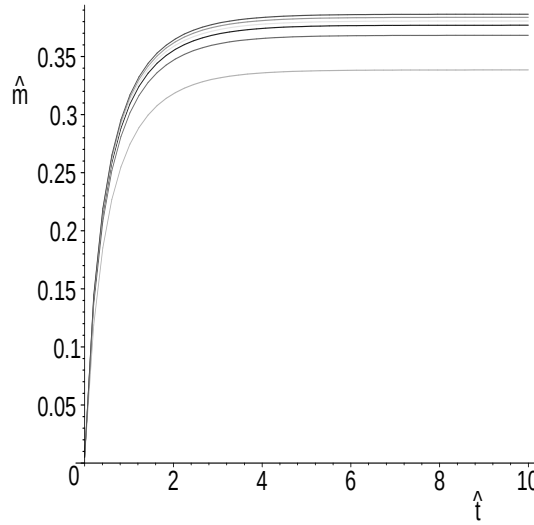
A Stefan-Boltzmann törvény értelmében a T hőmérsékletet meghatározó kozmikus háttérsugárzás energia-sűrűsége arányos T negyedik hatványával, továbbá $T \propto a^{-1}$ miatt a^{-4} -gyel. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha a folytonossági egyenlet teljesül. A (8.38) energia-mérleg egyenletből ekkor

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (8.82)$$

valamint

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{\tilde{\kappa}^2 a^3} \sum_{I=L,R} \epsilon_I (-1)^\eta \beta_I \dot{v}_I^2. \quad (8.83)$$

Táguló (összehúzódó) univerzum esetén $\dot{\lambda} = (d\lambda/da)\dot{a} > 0$ (< 0), így az egyenlet jobb oldala szintén > 0 (< 0), azaz a brán által elnyelt (brán által kisugárzott) energiának felel meg. Energia-elnyelő brán esetén ($\eta = 1$, $\epsilon = -1$) vagy ($\eta = 0$, $\epsilon = 1$), így $(-1)^\eta \epsilon = 1$; míg energiát sugárzó brán esetén ($\eta = 1$, $\epsilon = 1$) vagy ($\eta = 0$, $\epsilon = -1$), így $(-1)^\eta \epsilon = -1$.



8.5. ábra. Az $\hat{m}(\hat{t})$ átlagolt tömegfüggvény $\xi = 0$ valamint $q(0) = 0$ (legalsó), 10, 20, 30, 50 és 100 (legfelső görbe) értékei mellett. A $q(0)$ növekedése az aszimptotikus átlagtömeg csökkenéséhez vezet [11].

Felhasználjuk, hogy (8.36) értelmében $\beta(v) = \epsilon dm/dv = \epsilon \dot{m}/\dot{v}$, valamint, hogy (8.24) szerint a bránon

$$f\dot{v} = \epsilon\dot{a} + (-1)^{\eta+1} (\dot{a}^2 + f)^{1/2}, \quad (8.84)$$

A (8.76), (8.83) egyenletek így a következőt adják:

$$2a\dot{a} = \frac{\tilde{\kappa}^2}{\kappa_{lt}^2 a_{\min}} \sum_{I=L,R} \dot{m}_I \frac{\epsilon_I (-1)^{\eta_I} \dot{a} - (\dot{a}^2 + f_I)^{1/2}}{f_I}. \quad (8.85)$$

A legegyszerűbb, szimmetrikus beágyazás esetén, felhasználva

$$\epsilon (-1)^{\eta} \dot{a} - (\dot{a}^2 + f)^{1/2} = -f \left[\epsilon (-1)^{\eta} \dot{a} + (\dot{a}^2 + f)^{1/2} \right]^{-1} \quad (8.86)$$

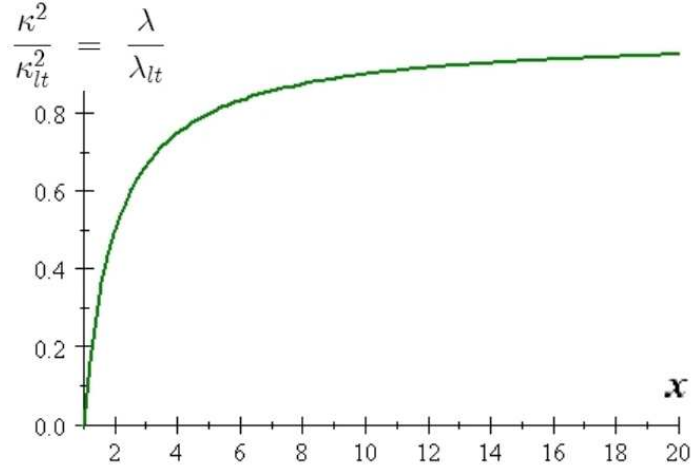
azonosságot, a (8.85) egyenletből

$$\frac{\dot{m}}{a^2} = - \left(\frac{\kappa_{lt}^2 \lambda_{lt}}{6} \right)^{1/2} \frac{a_{\min}}{a} \dot{a} \left[\epsilon (-1)^{\eta} \dot{a} + (\dot{a}^2 + f)^{1/2} \right] \quad (8.87)$$

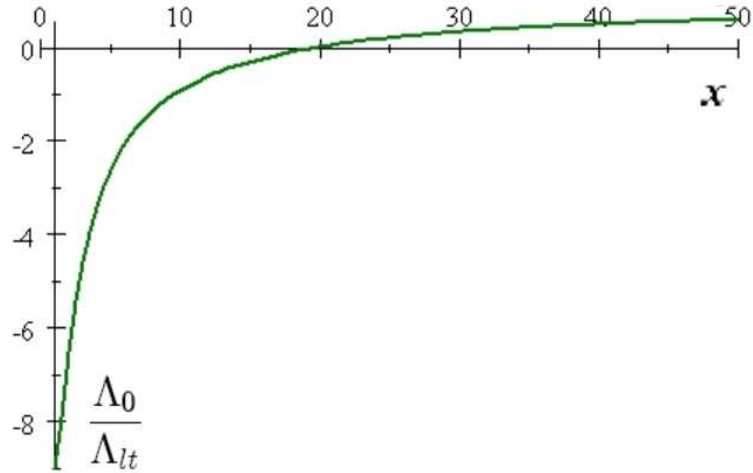
következik. Láttuk, hogy az $\epsilon (-1)^{\eta}$ előjel azt mutatja, a brán sugárzást nyel-e el, vagy éppen sugárzik. Az $f > 0$ tartományban található bránra (8.87) egyenlet az $\dot{m}\dot{a} < 0$ feltételt adja. Vagyis ha a brán elnyeli (kibocsájtja) a sugárzást a kozmikus tágulás (összehúzódás) során, az 5D tartományok tömege csökken (növekszik). A sugárzás energiasűrűségének pozitivitása $0 < \beta(v) = \epsilon dm/dv = \epsilon \dot{m}\dot{v}^{-1}$ miatt $\epsilon (-1)^{\eta+1} \text{sgn}(\dot{m}) > 0$, korábbi megállapításunkkal egyezésben, miszerint $\epsilon (-1)^{\eta} = 1$ a tágulás, $\epsilon (-1)^{\eta} = -1$ az összehúzódás során.

A választott egyszerűsítő feltevések mellett a Friedmann egyenlet is igen egyszerű:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda_0}{3} + \frac{\kappa^2 \rho}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \frac{2m}{a^4}. \quad (8.88)$$



8.6. ábra. A gravitációs állandó és brán-feszültség késői korszakbeli értékeire normált változata ($\kappa^2/\kappa_{lt}^2 = \lambda/\lambda_{lt}$) az $x = a/a_{\min}$ normált skálafaktor függvényeként. Az $a_{\min}$ skálafaktornál mindkét mennyiség nulla, majd növekszik késői korszakbeli aszimptotikus értékéig ($a \rightarrow \infty$) [10].



8.7. ábra. A késői korszakbeli értékeire normált kozmológiai konstans (Λ_0/Λ_{lt}), mint $x = a/a_{\min}$ függvénye, az $L = 1 + \tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda}/\kappa_{lt}^2 \lambda_{lt} = 2\Lambda_{lt}/\kappa_{lt}^2 \lambda_{lt} = 0.1$ paraméterértékre. (L eleget tesz a $0 < L < 1$ egyenlőtlenségeknek, mivel $\tilde{\Lambda} < 0$ és $\Lambda_{lt} > 0$). A normált kozmológiai állandó nagy negatív értékektől indulva aszimptotikusan +1 felé fejlődik, amint $x \rightarrow \infty$ [10].

Segítségével a kiküszöbölhető (8.87) egyenlet jobboldaláról. A λ , κ^2 és Λ_0 skálafaktorfüggő kifejezéseivel a Friedmann egyenlet részletes alakja:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = & \frac{\Lambda_{lt}}{3} + \frac{\kappa_{lt}^2 \rho}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda_{lt}} \right) + \frac{2m}{a^4} \\ & - \frac{\kappa_{lt}^2 \lambda_{lt}}{3} \frac{a_{\min}}{a} \left(1 + \frac{\rho}{\lambda_{lt}} - \frac{a_{\min}}{2a} \right). \end{aligned} \quad (8.89)$$

Az utolsó tag a konstans brán-feszültségű Friedmann egyenlet $a_{\min}/a$ -ban első és másodrendű korrekcióit tartalmazza. Ebben az esetben mind a Raychaudhuri, mind a kétszer kontrahált Bianchi-azonosság következik a folytonossági és Friedmann egyenletekből.

8.4.3. Numerikus megoldás

A folytonossági egyenlet megoldása $\rho = \rho_c (a_{\min}/a)^n$, ahol $n = 3$ por ($p = 0$) és $n = 4$ sugárzás ($p = \rho/3$) esetén, ρ_c pedig a sűrűség értéke $a_{\min}$ skálafaktornál és T_c hőmérsékleten. Vezessük be a $\mathcal{T}^2 = 6/\kappa_{lt}^2 \lambda_{lt}$ jelölést és az

$$\begin{aligned} L &= \frac{\Lambda_{lt} \mathcal{T}^2}{3}, \quad R = \frac{\rho_c}{\lambda_{lt}}, \\ x &= \frac{a}{a_{\min}}, \quad y = \frac{m \mathcal{T}^2}{a_{\min}^4}, \quad t = \frac{\tau}{\mathcal{T}}, \end{aligned} \quad (8.90)$$

dimenziótlan változókat. A (8.89) és (8.87) egyenletek így átírhatók az x és y változók dimenziótlan t időparaméter szerinti fejlődésegyenleteibe, melyekben a t szerinti deriválást vesszővel jelöljük. A (8.79) összefüggés és az f metrikus függvény felhasználásával így a dinamikát:

$$x'^2 = 1 - 2x + Lx^2 + \frac{R}{x^{n-2}} \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{R}{x^n} \right) + \frac{2y}{x^2}, \quad (8.91)$$

$$\frac{y'}{x} = \epsilon (-1)^{\eta+1} x'^2 - x' \left[x'^2 + (1-L)x^2 - \frac{2y}{x^2} \right]^{1/2} \quad (8.92)$$

egyenletek fejezik ki. Az x változó 1-től növekszik jelenlegi $x_0 = z_{\max} + 1 \gg z_{BBN} \approx 4.26 \times 10^9$ értékéig (itt $z_{\max}$ az $a_{\min}$ -hez tartozó vöröseltolódás, z_{BBN} pedig a nukleoszintézis kori vöröseltolódás). A modell paramétereire igaz, hogy

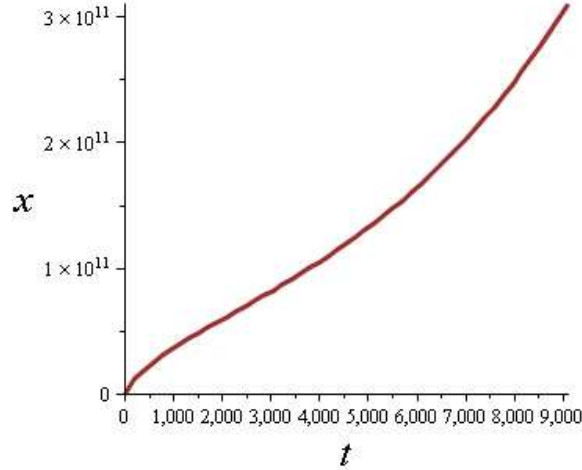
$$0 < L \ll 1 \quad (8.93)$$

(mivel Λ_{lt} , pozitív és a $\kappa_{lt}^2 \lambda_{lt}$, $-\tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda}$ mennyiségekhez képest kicsi). Tekintve, hogy napjainkban a Friedmann egyenletben a ρ -tag dominál (az $a_{\min}/a$ -t tartalmazó tagok kis korrekciók, valamint $\rho^2/2\lambda_{lt} \ll \rho$), kapjuk, hogy

$$x_0^2 \ll R \ll x_0^3. \quad (8.94)$$

Napjainkban hozzávetőleg kétszer annyi a sötét energia (ezt a Λ_{lt} tag adja), mint az anyag, így:

$$L \approx 4R/x_0^3. \quad (8.95)$$



8.8. ábra. A skálafaktor fejlődése anyag (por) által dominált univerzumban. A kezdeti lassuló tágulást gyorsuló szakasz követi. (Az ábra $R = 10^{25}$, $y_c = 10^9 R$ és $L = 4R/x_0^3$ értékek mellett készült, az inflexió pont hozzávetőleg $x_0 \approx 10^{11}$ értéknél található [10].)

Végül napjainkban a tömeg-tag Hubble-táguláshoz adott járuléka szintén elhanyagolható, így

$$y_0 \ll R x_0 . \quad (8.96)$$

A fenti tartományok figyelembevételével az egyenletek numerikus integrálja táguló univerzumot ad. Az eredetileg lassuló tágulás idővel gyorsulóvá válik, ezt a 8.8 ábra szemlélteti. A 8.9 ábra szerint a VAdS5 tartományok tömege folyamatosan csökken, ez azért van, mert a brán sugárzást nyel el. A választott paraméterek esetén a Λ_{lt} anyag fölötti dominanciájának elkezdődéséhez tartozó időnek hozzávetőleg háromszorosakor az $m(\tau)$ eléri a nullát, azaz a VAdS5 tartományok 5D Anti de Sitter téridőbe mennek át. A brán tágulása ekkor már a Λ_{lt} által dominált de Sitter fázisban folytatódik

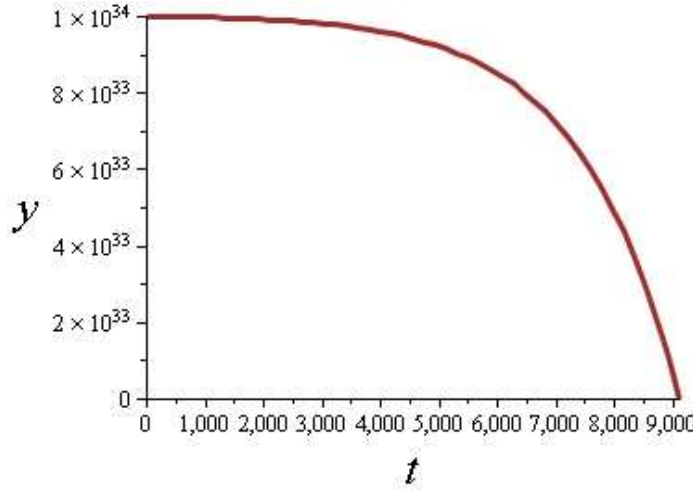
A változó feszültségű Eötvös brán (8.93)-(8.96) dinamikájának megfigyelésekkel való összevetése tehát meghatározza a modell paramétereit: $R = 10^{25}$, $x_0 = 10^{11}$, $y_0 = 10^{34}$. Ilyen paraméterértékek mellett a fundamentális konstansok változása igen korán megy végbe, ezt követően aszimptotikusan konstans értékekhez tartanak.

8.5. Einstein brán

Ebben az alfejezetben a brán-kozmológia sztatikus esetét vizsgáljuk, mely az ÁRE Einstein univerzum általánosítása.

8.5.1. Az ÁRE Einstein univerzuma

Az Einstein univerzum az ÁRE kozmológia homogén, izotróp és sztatikus megoldása, vagyis a Friedmann-téridők olyan esete, amelyben a skálafaktor állandó ($\dot{a} = \ddot{a} = 0$). A folytonossági egyenlet miatt így ρ is állandó. A Friedmann és Raychaudhuri egyenletek a



8.9. ábra. Az 5D téridő-tartományok tömegfüggvénye a maximális szimmetria (AdS5) eléréséig folyamatosan csökken [10]. A paraméterek azonosak a 8.8 ábráéval.

következő egyszerű alakot öltik:

$$\frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda_0}{3} + \frac{\kappa^2 \rho}{3}, \quad (8.97)$$

$$0 = \frac{\Lambda_0}{3} - \frac{\kappa^2}{6} (\rho + 3p), \quad (8.98)$$

melyekből

$$2k = \kappa^2 a^2 (\rho + p), \quad (8.99)$$

$$2\Lambda_0 = \kappa^2 (\rho + 3p) \quad (8.100)$$

feltételek következnek. Az erős energia feltétel ($\rho + p \geq 0$ és $\rho + 3p \geq 0$) megkövetelésével k -ra és Λ_0 -ra megkötéseket kapunk, mégpedig $k, \Lambda_0 \geq 0$. Jelenlegi univerzumunkban $\rho > 0$ és $\rho \gg p$, így pozitív kozmológiai állandó és $k = 1$ tartozna egy Einstein univerzumhoz. Mint azonban tudjuk, az univerzum jelenleg nem csupán tágul, hanem tágulása gyorsuló is, azaz semmiképp nem sztatikus. Elképzelhető viszont, hogy a jelenlegi világ egy asszimptotikusan statikus Einstein univerzumból fejlődött ki [193], így a sztatikus modell tanulmányozása az inflációval kapcsolatosan is jelentőségre tett szert.

Az Einstein univerzum stabilitásával kimerítően foglalkoztak. Eddington már 1930-ban kimutatta, hogy homogén és izotróp (térbeli) perturbációkra az Einstein univerzum instabil [194]. Anizotróp térbeli perturbációkra a sugárzás által kitöltött Einstein univerzum viszont stabilnak mutatkozott [195]. Az általános ideális folyadékot tartalmazó Einstein univerzum az ún. konformis metrikus perturbációkra szintén stabil marad, feltéve, ha a hangsebesség négyzete ($c_s^2 := dp/d\rho$, ez por esetén 0, sugárzás esetén $1/3$) nagyobb, mint $1/3$ [196]. Ez a newtonitól különböző jellegű stabilitás a kompaktságra vezethető vissza (a térszerű metszetek gömbök, $k = 1$), mely miatt létezik egy, a Jeans-hosszal összemérhető maximális hullámhossz. Gibbons stabilitás-vizsgálatát általános skalár, vektori és tenzor perturbációkra is elvégezték [197]. Kovariáns technikák alkalmazásával megmutatták,

hogy az ideális folyadékot tartalmazó Einstein univerzum semlegesen stabil az inhomogén vektori és tenzori perturbációkra, valamint az adiabatikus skalár sűrűség perturbációkra mindaddig, míg $c_s^2 > 1/5$ teljesül. Az Einstein univerzum az összes többi esetben instabil.

8.5.2. Az Einstein brán

Az 5D megoldás

Az [12] munkánkban megmutattuk, hogy a következő téridő az 5D vákuum Einstein egyenleteknek megoldása:

$$\Gamma^2 d\tilde{s}_E^2 = -F^2(y; s) dt^2 + d\chi^2 + \mathcal{H}_E^2(\chi; s) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dy^2, \quad (8.101)$$

ahol

$$F(y; s) = \begin{cases} A \cos(\sqrt{2} y) + B \sin(\sqrt{2} y) & , \quad s = 1, \\ A + \sqrt{2} B y & , \quad s = 0, \\ A \cosh(\sqrt{2} y) + B \sinh(\sqrt{2} y) & , \quad s = -1. \end{cases} \quad (8.102)$$

és

$$\mathcal{H}_E(\chi; s) = \begin{cases} \sin \chi & , \quad s = 1, \\ \chi & , \quad s = 0, \\ \sinh \chi & , \quad s = -1. \end{cases} \quad (8.103)$$

metrikus függvények. Az 5D téridő kozmológiai állandójának előjele $s = 0, \pm 1$, nagyságát pedig Γ -val jellemezzük:

$$\tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda} = 3s\Gamma^2, \quad \Gamma > 0. \quad (8.104)$$

Az A és B állandók közül az egyiket a t időkoordinátába olvaszthatjuk, így a megoldás 1-paraméteres.

A metrikus függvények deriváltjai ($y > 0$ esetén) kielégítik a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned} (\partial_y F)^2 &= \alpha \beta^2 - 2sF^2, & \partial_y^2 F &= -2sF \\ (\partial_\chi \mathcal{H}_E)^2 &= 1 - s\mathcal{H}_E^2, & \partial_\chi^2 \mathcal{H}_E &= -s\mathcal{H}_E, \end{aligned} \quad (8.105)$$

Itt $\alpha = \text{sgn}(sA^2 + B^2)$ és $\beta = \sqrt{2|sA^2 + B^2|}$. Egyedül $s = -1$ esetén lehet $\alpha = 0, -1$. Egyéb hasznos segéd-összefüggések:

$$\partial_y \log F + \alpha \beta^2 \int \frac{dy}{F^2} = -\sqrt{2} \frac{A}{B} s, \quad \partial_\chi \log \mathcal{H}_E + \int \frac{d\chi}{\mathcal{H}_E^2} = 0. \quad (8.106)$$

Z_2 -szimmetrikus megoldáshoz akkor jutunk, ha az (8.101) téridőben y helyére $|y|$ kerül.

Killing algebra

A Killing egyenlet megadja a (8.101) téridő szimmetriáit jellemző független Killing vektorokat. A $(t, \chi, \theta, \varphi, y)$ koordináta-bázisban ($y > 0$ mellett) ezek:

$$\begin{aligned}
K_1 &= (0, 0, 0, 1, 0) , \\
K_2 &= (0, 0, -\cos \varphi, \cot \theta \sin \varphi, 0) , \\
K_3 &= (0, 0, \sin \varphi, \cot \theta \cos \varphi, 0) , \\
K_4 &= (0, -\cos \theta, \partial_\chi (\log \mathcal{H}_E) \sin \theta, 0, 0) , \\
K_5 &= \left(0, \sin \theta \sin \varphi, \partial_\chi (\log \mathcal{H}_E) \cos \theta \sin \varphi, \partial_\chi (\log \mathcal{H}_E) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, 0 \right) , \\
K_6 &= \left(0, \sin \theta \cos \varphi, \partial_\chi (\log \mathcal{H}_E) \cos \theta \cos \varphi, -\partial_\chi (\log \mathcal{H}_E) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, 0 \right) , \\
K_7 &= [\alpha\beta + \delta_\alpha^0]^{-1} (1, 0, 0, 0, 0) , \\
K_8 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha^2 \beta + \delta_\alpha^0 \frac{A}{B} \right] \left(-\frac{\delta_\alpha^0}{2\sqrt{2}F^2} - \partial_y (\log F) \int L dt, 0, 0, 0, L \right) , \\
K_9 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha + \delta_\alpha^0 \frac{A}{B} \right] (-\partial_y (\log F) L, 0, 0, 0, \partial_t L) .
\end{aligned} \tag{8.107}$$

Itt L a következő függvényt jelöli

$$L(t; \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \cosh \beta t & , \quad \alpha = 1 \\ t & , \quad \alpha = 0 \\ \frac{1}{\beta} \cos \beta t & , \quad \alpha = -1 , \end{cases} \tag{8.108}$$

mely eleget tesz

$$(\partial_t L)^2 = 1 + \alpha\beta^2 L^2 , \quad \partial_t^2 L = \alpha\beta^2 L , \tag{8.109}$$

feltételeknek, valamint felhasználtuk, hogy $\alpha = 0$ esetén

$$\int \frac{dy}{F^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}F^2} . \tag{8.110}$$

A K_{1-6} Killing vektorok térszerűek, K_7 időszerű, míg $K_{8,9}$ esetén

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(K_8, K_8) &= \frac{1}{2\Gamma^2} \begin{cases} 2s(F/\beta)^2[1 + \alpha\beta^2 L^2] - \alpha , & \alpha \neq 0 \\ -E^2 < 0 , & \alpha = 0 , \end{cases} \\
\tilde{g}(K_9, K_9) &= \frac{1}{2\Gamma^2} [2sF^2 L^2 + 1] .
\end{aligned} \tag{8.111}$$

Itt bevezettük

$$E^2 = \frac{1}{2F^2} \left[4F^4 + 2(1 + 2F^2 L^2)^2 + \left(1 - \frac{|A|}{|B|} \right) F^2 L^2 \right] \tag{8.112}$$

jelölést. Tehát K_9 térszerű $s = 1, 0$ esetén és időszerű nagy $|t|$ esetén, amennyiben $(s, \alpha) = (-1, 1), (-1, 0)$. Az összes többi esetben kauzális jellege erősen függ t és y aktuális értékeitől. A K_8 Killing vektor időszerű, ha $(s, \alpha) = (0, 1), (-1, 1), (-1, 0)$, míg $(s, \alpha) = (1, 1)$ és nagy $|t|$ esetén térszerű. A K_8 kauzális jellege minden más esetben t és y függvénye.

8.1. táblázat. Az s és α paraméterek megengedett értékeire előálló Killing algebrák.

s	1	0	-1
α	1	1	0, ± 1
K_{1-7}	$so(4) \oplus \mathbf{R}$	$e(3) \oplus \mathbf{R}$	$so(1, 3) \oplus \mathbf{R}$
K_{1-9}	$so(4) \oplus so(1, 2)$	$e(3) \oplus e(1, 1)$	$so(1, 3) \oplus so(1, 2)$

A Killing algebra:

$$\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= \varepsilon_{ijk} K_k, \\
[K_{3+i}, K_{3+j}] &= s \varepsilon_{ijk} K_k, \\
[K_i, K_{3+j}] &= \varepsilon_{ijk} K_{3+k}, \\
[K_{6+i}, K_j] &= 0 = [K_{6+i}, K_{3+j}], \\
[K_7, K_8] &= K_9, \\
[K_8, K_9] &= -s\alpha K_7 + \delta_\alpha^0 K_8, \\
[K_9, K_7] &= -\alpha K_8 + \delta_\alpha^0 K_7.
\end{aligned} \tag{8.113}$$

Az s és α paraméterek megengedett értékeire előálló Killing algebrákat a 8.1 táblázat tartalmazza. A $K_{8,9}$ Killing vektoroknak y irányú, extra-dimenzionális komponensei is vannak, míg a 4D Einstein téridőket jellemző K_{1-7} az $y = \text{állandó}$ hiperfelületeken értelmezettek, így sajátos esetben az $y = 0$ bránon is, mely ezért Einstein brán.

Az effektív Einstein egyenlet

Az effektív Einstein egyenlet 5D Weyl tenzor elektromos része által képviselt forrástagja:

$$\mathcal{E}_{ab} = -\frac{3}{2}s\Gamma^2 \left(u_a u_b + \frac{1}{3\Gamma^2} h_{ab} \right), \tag{8.114}$$

itt $u^a = \Gamma F^{-1} \delta^a_0$ a sztatikusságot kifejező Killing vektor irányába mutató 4-es sebesség és $h_{ab}/\Gamma^2 = g_{ab} + u_a u_b$ a térszerű metrika a bránon. A skálafaktor a konstans

$$a_o = \frac{1}{\Gamma} \tag{8.115}$$

lesz.

Az indukált brán-metrikát az $y = 0$ feltétel adja:

$$\Gamma^2 ds^2 = -A^2 dt^2 + d\chi^2 + \mathcal{H}_E^2(\chi; s) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \tag{8.116}$$

ez eleget tesz az effektív vákuum Einstein egyenletnek, szimmetrikus beágyazás és állandó brán-feszültség mellett.

Az $y = \text{állandó}$ felületek külső görbületének egyetlen komponense nem nulla:

$$K_{00} = -\frac{1}{\Gamma} F(y) \partial_y F(y), \tag{8.117}$$

vagyis a külső görbület ugrása a bránon

$$\Delta K_{ab} = -\frac{2\sqrt{2}B}{\Gamma} \delta_a^0 \delta_b^0. \quad (8.118)$$

A (7.28) Lanczos egyenlet értelmében ezért

$$\rho^E = -\lambda < 0, \quad \tilde{\kappa}^2 (\rho^E + p^E) = -2\sqrt{2}B\Gamma. \quad (8.119)$$

Mivel $\lambda > 0$, az Einstein brán energiasűrűsége negatív, a kozmológiai állandó előjelétől függetlenül.

Összegezve az effektív Einstein egyenlet forrástagjait, azt kapjuk, hogy

$$G_{ab} = s\Gamma^2 \left(3u_a u_b - \frac{1}{\Gamma^2} h_{ab} \right). \quad (8.120)$$

ÁRE szemszögből úgy is felfoghatjuk tehát, hogy a fenti Einstein egyenlet effektív forrása egy általánosított folyadék, melynek energiasűrűsége $\kappa^2 \rho_{eff}^E = 3s\Gamma^2$ és izotróp nyomása $\kappa^2 p_{eff}^E = -s\Gamma^2$. Amennyiben $s = 1$, ez egy olyan ideális szilárd anyag (negatív és izotróp nyomások, azaz feszültségek jellemzik), mely marginálisan teljesíti az erős energia feltételt is.

8.5.3. Az 5D Birkhoff tétel sérülése

Az irodalomban létezik egy arra vonatkozó bizonyítás, hogy a SAdS5 téridő az egyetlen olyan 5D vákuum téridő, mely minden pontjában rendelkezik a kozmológiai szimmetriákkal [156], [198]. Ezt nevezik 5D Birkhoff tételnek. Eredményünk értelmében viszont az 5D Birkhoff tétel sérül!

A [156] bizonyításában Taub megoldási módszerét általánosítva, az 5D Einstein egyenleteket B, ν metrikus függvények bevezetésével oldják meg. Ezt követően áttérnek az $r = B^{1/3}$ radiális koordinátára és eljutnak a SAdS5 megoldáshoz. A szimmetria megfontolásokból felvett [156]-beli (3)-as metrikus ansatz tartalmazza az általunk talált (8.101) téridőt, amennyiben metrikus függvényeik $B^{2/3} = \Gamma^{-2} = a_o^2$ és $e^\nu = \Gamma^{-2}F(y)$, valamint az ötödik z koordinátát $dz = dy/F(y)$ módon kapcsoljuk az általunk használt y -hoz. Azonban végső, (20)-as eredményük, mely B deriváltjait tartalmazza, már nem tartalmazza (8.101) téridőt. Ez nem meglepő, hiszen esetünkben a [156] által használt B függvény állandó, így $r = B^{1/3} = a_o$ természetesen nem vezethető be új koordinátaként [12], ahogyan azt a [156] bizonyításban teszik.

Ebben az értelemben az általunk talált (8.101) téridő emlékeztet az ÁRE Bertotti-Robinson megoldására [199], mely a kovariánsan konstans elektromágneses mező által generált gravitációt fejezi ki gömbszimmetrikus esetben. Ott a 2-gömbök sugara szintén állandó, nem választható meg új koordinátaként. Az ÁRE-ben a Bertotti-Robinson megoldást kapcsolatba lehet hozni az extrémális Reissner-Nordström fekete lyuk horizontközeli tartományával [200], [190]. Felmerül a kérdés, hogy nincs-e esetleg hasonló összefüggés (8.101) és a SAdS5 téridő horizontja között, hiszen a SAdS5 téridő Killing vektorai pontosan a (8.107) által megadott K_{1-7} , amennyiben $\alpha = 0$ és $H = H(\chi; k)$.

Kiszámolható, hogy a (8.101) és a SAdS5 téridők következő skalárjai megegyeznek: $\tilde{R} = \tilde{g}^{ab}\tilde{R}_{ab}$, $\tilde{R}_{ab}\tilde{R}^{ab}$. Ez azonban az 5D vákuum Einstein egyenlet minden megoldására igaz, hiszen $\tilde{R} = 10s\Gamma^2$ és $\tilde{R}_{ab} = 2s\Gamma^2\tilde{g}_{ab}$. A görbületből képezhető egyéb skalárok közül viszont ($\epsilon = k = s = -1$ esetén)

$$\tilde{R}_{abcd}\tilde{R}^{abcd} = \begin{cases} 28\Gamma^4, & \text{általunk talált téridő} \\ 10\Gamma^4 + 288m^2/r^8, & \text{SAdS,} \end{cases} \quad (8.121)$$

és

$$\tilde{C}_{abcd}\tilde{C}^{abcd} = \begin{cases} 18\Gamma^4, & \text{általunk talált téridő} \\ 288m^2/r^8, & \text{SAdS,} \end{cases} \quad (8.122)$$

csak akkor azonos a két téridőben, ha teljesül $4m = -\Gamma^{-2}$ feltétel és a radiális koordináta az $r = a_o$ sajátos értéket veszi fel. A fenti előjel-választások esetén a SAdS5 téridő $f(r; k) = 0$ feltételből nyert

$$r_h^2 = \frac{1}{\Gamma^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\Gamma^2 m} \right) \quad (8.123)$$

horizontjai pontosan a kérdéses $4m = -\Gamma^{-2}$ feltétel teljesülése esetén esnek egybe, vagyis a SAdS5 téridő ilyenkor extrémális, $r_h = \Gamma^{-1} = a_o$ horizonttal. Természetesen ez még nem bizonyítja, hogy a (8.101) téridő a SAdS5 téridő horizont-metrikája, hiszen 5D-ban 40 független görbületi skalár képezhető, és ezeket páronként össze kellene hasonlítani. A fentiek mindenesetre elégségesnek bizonyultak ahhoz, hogy az $s = -1$ (8.101) téridő és a hiperbolikus ($\epsilon = k = -1$) SAdS5 téridő horizontjának kapcsolatát [12] munkánkban *sejtésként* megfogalmazzuk.

A sejtést később az [190] munkánkban bizonyítottuk be a SAdS5 téridő megfelelő módon értelmezett horizont metrikájának és (8.101) téridőnek a módszeres összehasonlításával, mind a Killing algebráják szintjén, mind a koordináta-transzformációk explicit felírásával. Utóbbiak, akárcsak a Bertotti-Robinson téridő és az extrémális Reissner-Nordström horizont metrikájának kapcsolata esetén, komplex transzformációk is lehetnek.

8.5.4. Homogén brán

Az alfejezetet az Einstein brán homogén párjának vizsgálatával zárom, [13] munkám nyomán.

Az 5D megoldás

A (8.103) metrikus függvényben, $s = 1$ esetben a $\sin$ helyére $\cos$ függvényt írok. Ez megengedhető, hiszen nem más, mint a χ koordináta transzlációja. Ezt követően a

$$t \rightarrow i\chi, \quad \chi \rightarrow it \quad (8.124)$$

komplex koordináta-transzformáció segítségével az 5D vákuum Einstein egyenletek egy új, homogén megoldásához jutok:

$$\Gamma^2 d\tilde{s}^2 = -dt^2 + F^2(y; \epsilon) d\chi^2 + \mathcal{H}_h^2(t; s) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dy^2, \quad (8.125)$$

itt

$$\mathcal{H}_h(t; s) = \begin{cases} \cosh t & , \quad s = 1, \\ it & , \quad s = 0, \\ i \sin t & , \quad s = -1. \end{cases} \quad (8.126)$$

az új metrikus függvény. A sztatikus esethez hasonlóan $\mathcal{H}_h$ egyszerű differenciálegyenletekkel is megadható:

$$(\partial_t \mathcal{H}_h)^2 = s \mathcal{H}_h^2 - 1, \quad \partial_\chi^2 \mathcal{H}_h = s \mathcal{H}_h. \quad (8.127)$$

Az $s = 0, -1$ esetekben a (8.125) metrika szignatúrája $(- + - - +)$, ezek fizikai szempontból nem érdekesek. Az $s = 1$ eset egy új 1-paraméteres 5D téridő megoldás:

$$\begin{aligned} \Gamma^2 d\tilde{s}^2 = & -dt^2 + \left[A \cos(\sqrt{2} y) + B \sin(\sqrt{2} y) \right]^2 d\chi^2 \\ & + \cosh^2 t (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dy^2. \end{aligned} \quad (8.128)$$

Killing algebra

A (8.125) metrika független Killing vektorai a $(t, \chi, \theta, \varphi, y)$ koordinátákban

$$\begin{aligned} K_1 &= (0, 0, 0, 1, 0), \\ K_2 &= (0, 0, -\cos \varphi, \cot \theta \sin \varphi, 0), \\ K_3 &= (0, 0, \sin \varphi, \cot \theta \cos \varphi, 0), \\ K_4 &= (-\cos \theta, 0, \partial_t (\log \mathcal{H}_h) \sin \theta, 0, 0), \\ K_5 &= \left(\sin \theta \sin \varphi, 0, \partial_t (\log \mathcal{H}_h) \cos \theta \sin \varphi, \partial_t (\log \mathcal{H}_h) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, 0 \right), \\ K_6 &= \left(\sin \theta \cos \varphi, 0, \partial_t (\log \mathcal{H}_h) \cos \theta \cos \varphi, -\partial_t (\log \mathcal{H}_h) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, 0 \right), \\ K_7 &= (\alpha \beta)^{-1} (0, 1, 0, 0, 0), \\ K_8 &= \frac{\alpha^2}{\sqrt{2} \beta} (0, -\partial_y (\log F) \sin(\beta \chi), 0, 0, \beta \cos(\beta \chi)), \\ K_9 &= -\frac{\alpha}{\sqrt{2} \beta} (0, \partial_y (\log F) \cos(\beta \chi), 0, 0, \beta \sin(\beta \chi)), \end{aligned} \quad (8.129)$$

itt $\alpha = \text{sgn}(sA^2 + B^2)$ és $\beta = \sqrt{2 |sA^2 + B^2|}$. A Killing algebra pedig $so(1, 3) \oplus so(3)$:

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= \varepsilon_{ijk} K_k, \\ [K_{3+i}, K_{3+j}] &= -\varepsilon_{ijk} K_k, \\ [K_i, K_{3+j}] &= \varepsilon_{ijk} K_{3+k}, \\ [K_{6+i}, K_{6+j}] &= \varepsilon_{ijk} K_{6+k}, \\ [K_{6+i}, K_j] &= 0 = [K_{6+i}, K_{3+j}]. \end{aligned} \quad (8.130)$$

A K_{1-7} Killing vektorok az y = állandó hiperfelületek tangens terén értelmezettek és $so(1, 3) \oplus \mathbb{R}$ algebrát alkotnak.

A K_{1-7} vektorok (az ötödik, nulla komponensük nélkül) a (8.133) metrikának is Killing vektorai. Közülük K_{1-3} és K_7 térszerű ($so(3) \oplus \mathbb{R}$ algebrát alkot) és a konstans idejű hiperfelületek homogén jellegét biztosítják. A fennmaradó 3 Killing vektor kauzális jellegét alábbiakból olvashatjuk le:

$$\begin{aligned}\Gamma^2 g(K_4, K_4) &= -1 + \sin^2 \theta \cosh^2 t , \\ \Gamma^2 g(K_5, K_5) &= -1 + (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \cosh^2 t , \\ \Gamma^2 g(K_6, K_6) &= -1 + (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \cosh^2 t .\end{aligned}\quad (8.131)$$

Amikor $t = 0$, mindhárom időszerű, míg más t értékekre a kauzális jelleg θ és φ függvénye. Növekvő $|t|$ -re egyre nagyobb az a tartomány, melyben mindhárom Killing vektor térszerű.

Az effektív Einstein egyenlet megoldása

A (8.128) téridő 5D Weyl tenzorának elektromos része

$$\mathcal{E}_{ab} = \frac{1}{2} \Gamma^2 (u_a u_b + 3e_a e_b - l_{ab}) , \quad (8.132)$$

itt $u^a = \Gamma \delta^a_0$ a $\partial/\partial t$ irányú, $e^a = \Gamma F^{-1} \delta^a_1$ pedig a homogén Killing vektor irányú 4-es vektorok és $l_{ab} = g_{ab} + u_a u_b - e_a e_b$ az u^a és e^a merőlegesekkel rendelkező gömbökön a 2-metrika.

A bránon ($y = 0$) indukált metrika:

$$\Gamma^2 d s^2 = -dt^2 + A^2 d\chi^2 + \cosh^2 t (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (8.133)$$

Az A állandó beolvasztható a χ koordinátába. A brán gömbszimmetrikus és a gömbök sugara mentén homogén, akár az ÁRE-beli Kantowski-Sachs téridő [201]. Skálafaktorai $1/\Gamma$ és $\cosh t/\Gamma$, utóbbi miatt ez egy ún. „bouncing” kozmológia. A (8.133) Riemann görbülete $R = 6\Gamma^2 > 0$.

Az y -állandó felületek külső görbületének csupán egyetlen nem nulla komponense van:

$$K_{\chi\chi} = \frac{1}{\Gamma} F(y) \partial_y F(y) . \quad (8.134)$$

A külső görbület ugrása a bránon ($y = 0$ -nál) így

$$\Delta K_{ab} = \sqrt{2} \Delta B \Gamma e_a e_b . \quad (8.135)$$

Z_2 -szimmetrikus 5D megoldást úgy nyerünk, ha a metrikában y helyére $|y|$ kerül. Ekkor ΔB helyére $2B$ írható és a (7.28) egyenletből:

$$\begin{aligned}T_{ab} &= \rho^h u_a u_b + \lambda e_a e_b - \rho^h l_{ab} , \\ \tilde{\kappa}^2 (\rho^h + \lambda) &= 2\sqrt{2} B \Gamma .\end{aligned}\quad (8.136)$$

Ha $B = 0$, akkor az energiasűrűség negatív, $\rho^h = -\lambda$ és a külső görbületnek nem lesz ugrása a bránon. Ilyenkor az energia-impulzus tenzor nem más, mint a brán feszültségből adódó járulék, ellentétes előjellel. Általános B esetén a brán (8.136) anyaga egy általánosított folyadék, melyben a nyomás (a gömbszimmetria ellenére) anizotróp, azaz radiális irányban más, mint a gömbökhöz érintő irányokban. Bár $\lambda > 0$, létezhetnek pozitív energiasűrűségű megoldások is, a sztatikus esettel ellentétben. A radiális nyomás mindenképpen pozitív, a gömbök érintő irányú nyomásának előjele pedig ellentétes az energiasűrűségével. A negatív nyomások (feszültségek) miatt a forrás részben szilárd anyag tulajdonságokat mutat.

Az effektív Einstein egyenlet kvadratikus forrástagja

$$\tilde{\kappa}^4 S_{ab} = \frac{\kappa^2 \lambda}{2} g_{ab} - \kappa^2 T_{ab}, \quad (8.137)$$

melynek segítségével belátható, hogy az effektív Einstein egyenlet forrástagjainak összege

$$G_{ab} = \Gamma^2 (u_a u_b - 3e_a e_b - l_{ab}). \quad (8.138)$$

Úgy is felfoghatjuk, hogy ÁRE értelemben a forrás egy általánosított folyadék / szilárd anyag, melynek energiasűrűsége $\kappa^2 \rho_{eff}^h = \Gamma^2$, radiális nyomása (feszültsége) $\kappa^2 p_{eff}^{rad} = -3\Gamma^2$ tangenciális nyomása (feszültsége) pedig $\kappa^2 p_{eff}^{tan} = -\Gamma^2$.

8.6. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a korábban kidolgozott általános formalizmust kozmológiai szimmetriák esetére alkalmaztam. A brán anyaga ideális folyadék, a brán gravitációnak azonban más forrásai is lehetnek, mint az 5D-ben található töltött fekete lyukak, valamint 5D sugárzás. Felírtam az 5D töltött Vaidya-Anti de Sitter téridőbe ágyazott Friedmann bránra vonatkozó általánosított Friedmann és Raychaudhuri egyenleteket, valamint a beágyazást jellemző teljes egyenletrendszert, beleértve az energia-mérleg egyenletet is.

A kidolgozott formalizmus első alkalmazásaként az extra dimenzióba (geometriai optikai közelítésben modellezett) gravitációs hullámokat (gravitonokat) sugárzó brán fejlődését vizsgáltam, állandó brán feszültség mellett. A sugárzó bránnal kapcsolatos vizsgálódások kétségkívül legfontosabb következménye, hogy mind az 5D kozmológiai állandók, mind az 5D tömegfüggvények brán két oldalán vett aszimmetriája csökkenti a sötét sugárzás késői korszakbeli értékét, így a kozmológiai fejlődés nukleoszintézisből származtatott kényszerei könnyebben teljesíthetők.

Második alkalmazásként a változó brán feszültség hatásait elemeztem, szimmetrikus beágyazás mellett. Feltettem, hogy a brán feszültség a folyadék membránok Eötvös-törvény szerinti hőmérséklet-függését mutatja; és hogy a brán feszültség időfüggő növekedését a brán által elnyelt sugárzás olymódon kompenzálja, hogy a bránon teljesül a folytonossági egyenlet. Az Eötvös brán a hőmérséklet T_c értékénél kondenzálódik, egy nem nulla $a_{\min}$ skálafaktornál. Ezután a brán feszültség és a 4D gravitációs állandó együtt növekszik a skálafaktorral, a jelenleg is észlelhető aszimptotikus értékek felé tartanak. A

brán kozmológiai állandója a korai igen nagy negatív értékekből igen hamar a napjainkban is észlelt kis pozitív értékbe fejlődik. Beláttam, hogy a modell további paramétereinek alkalmas megválasztásával kompatibilissá tehető az univerzum késő korszakbeli ismert fejlődésével: a lassuló tágulást gyorsuló szakasz követi. Az 5D téridő aszimptotikusan a maximális szimmetria, az Anti de Sitter végállapot felé tart.

Egy további szimmetria, a sztatikusság feltevése mellett új kozmológiai bránt, az Einstein bránt (valamint ennek homogén párját) találtam. Az Einstein bránt a SAdS5 téridőtől különböző téridőbe ágyaztam, ez sérti az irodalomban publikált 5D Birkhoff tételt. Megmutattam, hogy az irodalom unicitás-bizonyítása miért sérül ebben az esetben, valamint megfogalmaztam azt a később bizonyított sejtést, miszerint a talált 5D téridő kapcsolatban áll a SAdS5 téridő horizont-metrikájával. Mind a sztatikus, mind a homogén bránok anyagi forrásait negatív energiasűrűség vagy nyomások jellemzik. ÁRE szempontból nézve, a sztatikus esetben a forrás egy olyan ideális szilárd anyag (negatív és izotróp nyomások, azaz feszültségek jellemzik), mely marginálisan teljesíti az erős energia feltételt; míg homogén esetben egy általánosított szilárd anyag. Az Einstein brán és homogén párja is az Einstein egyenletek G_7 szimmetriacsoporttal rendelkező igen kevés megoldásának családját bővíti. Korábban ebben az osztályban egyedül bizonyos síkhullámokat ismertek [202].

dc_223_11

9. fejezet

Brán-asztrofizikai vizsgálatok

A Schwarzschild megoldás az ÁRE legegyszerűbb olyan térideje, mely mind fekete lyuk, mind csillag külső tartományaként értelmezhető. Egyszerűségét a vákuum feltevés, a gömbszimmetria, a sztatikus jelleg és az aszimptotikus síkság adja, melyek következményeként egyetlen paraméterrel jellemezhető, a centrumban található fekete lyuk vagy csillag m tömegével.

Schwarzschild-brán szintén létezik. Az effektív Einstein egyenlet ugyanis az ÁRE Einstein egyenletté egyszerűsödik, amennyiben vákuum van ($T_{ab} = S_{ab} = 0 = \mathcal{P}_{ab}$), a beágyazás szimmetrikus ($\bar{L}_{ab} = 0$) és az 5D Weyl görbület elektromos része nulla ($\bar{\mathcal{E}}_{ab} = 0$).

A második legegyszerűbb asztrofizikai brán megoldás az árapálytöltésű fekete lyuk [161]. Az árapálytöltést az 5D Weyl görbület nem nulla elektromos része adja.

A bránon található Schwarzschild fekete lyuk az ötödik dimenzióba fekete húrként terjeszthető ki [203]. Az árapálytöltésű brán fekete lyuk 5D kiterjesztése nem ismert, bár vannak arra vonatkozó eredmények, hogy ez létezik és a horizont reguláris 5D-ben is [204].

Ebben a fejezetben a Schwarzschild téridő bránon található ideális folyadék forrását vizsgálva megmutatom, hogyan megy végbe a gravitációs kollapszus, melynek végterméke a brán Schwarzschild fekete lyuk, [14] munkám alapján. Ezt követően kidolgozom a kozmológiai közegbe helyezett Schwarzschild fekete lyukak modelljét (Swiss-cheese brán), [15] és [16] munkáim alapján.

Végül az árapálytöltésű brán fekete lyuk termodinamikáját és a környezetében mozgó fotonok pályáit vizsgálom gyenge tér közelítésben, a kis paraméterekben másodrendben, [18] és [17] munkáink alapján.

9.1. Schwarzschild fekete lyuk a bránon

9.1.1. Illesztési feltételek

Amikor 4D-ben csillagmegoldást illesztünk külső vákuumhoz, az Israel-féle illesztési feltételek egyszerűsödnek: az illesztési felületnek mind az indukált metrikáját, mind a külső görbületét folytonosnak vesszük. Ennek oka az, hogy nem indokolt disztribúcionális energia-impulzust helyezni a csillag felületére.

A csillagot a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) téridővel modellezem, míg a külső tartomány Schwarzschild lesz. A csillagmegoldás együttmozgó (τ, χ) koordinátákban:

$$ds_{FLRW}^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi^2 + \mathcal{H}^2(\chi; k) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \quad (9.1)$$

$$\mathcal{H}(\chi; k) = \begin{cases} \sin \chi & , & k = 1 , \\ \chi & , & k = 0 , \\ \sinh \chi & , & k = -1 . \end{cases}$$

A $\mathcal{H}$ függvény hasznos tulajdonságai:

$$\left(\frac{d\mathcal{H}}{d\chi} \right)^2 = 1 - k\mathcal{H}^2 , \quad (9.2)$$

$$\frac{d^2\mathcal{H}}{d\chi^2} = -k\mathcal{H} . \quad (9.3)$$

Az effektív Einstein egyenlet általánosított Friedmann és általánosított Raychaudhuri egyenletekhez vezet:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{\kappa^2 \rho}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) , \quad (9.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa^2}{6} \left[\rho \left(1 + \frac{2\rho}{\lambda} \right) + 3p \left(1 + \frac{\rho}{\lambda} \right) \right] . \quad (9.5)$$

Itt $a(\tau)$ a csillag skálafaktora, ρ és p az ideális folyadék sűrűsége és nyomása, a Λ kozmológiai állandó jelentésével később foglalkozunk, a pont τ szerinti deriválást jelent. A $\rho/\lambda \rightarrow 0$ határesetben visszanyerjük az általános relativitáselméletből ismert egyenleteket.

A külső megoldás a Schwarzschild téridő ún. görbületi (T, R) koordinátákban

$$ds_S^2 = - \left(1 - \frac{2m}{R} \right) dT^2 + \left(1 - \frac{2m}{R} \right)^{-1} dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (9.6)$$

Itt m a csillag Schwarzschild tömege. A két megoldás θ és φ koordinátáit azonosnak vettem, ez a gömbszimmetria miatt célszerű.

Az illesztést konstans együttmozgó $\chi = \chi_0$ koordinátánál végzem. Ezért a (τ, θ, φ) koordináta-hármas az illesztési felület koordinátáinak választható. A két tartománynak a közös felületen indukált metrikája

$$ds_{\text{külső}}^2 = \left[- \left(1 - \frac{2m}{R_0} \right) \dot{T}_0^2 + \left(1 - \frac{2m}{R_0} \right)^{-1} \dot{R}_0^2 \right] d\tau^2 + R_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (9.7)$$

$$ds_{\text{belső}}^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [\mathcal{H}_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \quad (9.8)$$

ahol $R_0 = R(\tau, \chi_0)$, $T_0 = T(\tau, \chi_0)$ és $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\chi_0; k)$. Az indukált metrika folytonossága értelmében

$$R_0 = a(\tau) \mathcal{H}_0 , \quad (9.9)$$

$$\left(1 - \frac{2m}{a(\tau) \mathcal{H}_0} \right)^2 \dot{T}_0^2 = 1 - \frac{2m}{a(\tau) \mathcal{H}_0} + \dot{a}^2(\tau) \mathcal{H}_0^2 . \quad (9.10)$$

Ezek az egyenletek határozzák meg az illesztési felület időfejlődését. Az általánosított Friedmann és általánosított Raychaudhuri egyenletek miatt az időfejlődés különbözni fog az ÁRE esettől.

Az illesztési felület belső tartományból látszó külső görbülete:

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta}^{\text{belső}} &= a(\tau) \mathcal{H}_0 (1 - k\mathcal{H}_0^2)^{1/2} , \\ K_{\varphi\varphi}^{\text{belső}} &= K_{\theta\theta} \sin^2 \theta . \end{aligned} \quad (9.11)$$

(Itt felhasználtam (9.2) egyenletet.) A külső tartományból látszó megfelelő külső görbület komponensek pedig

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta}^{\text{külső}} &= \left(1 - \frac{2m}{R_0}\right) R_0 \dot{T}_0 , \\ K_{\varphi\varphi}^{\text{külső}} &= K_{\theta\theta} \sin^2 \theta . \end{aligned} \quad (9.12)$$

A folytonosságból, felhasználva (8.93) egyenletet is, $\dot{T}_0$ -ra nyerünk egyszerű kifejezést:

$$\dot{T}_0 = \left(1 - \frac{2m}{a(\tau) \mathcal{H}_0}\right)^{-1} (1 - k\mathcal{H}_0^2)^{1/2} . \quad (9.13)$$

A (8.94) és (9.13) egyenletek összehasonlításából:

$$\dot{a}^2(\tau) + k = \frac{2m}{a(\tau) \mathcal{H}_0^3} . \quad (9.14)$$

Végül a $K_{\tau\tau}^{\text{külső}} = 0$ feltételből

$$\ddot{a}(\tau) = -\frac{m}{a^2(\tau) \mathcal{H}_0^3} \quad (9.15)$$

következik, $d\mathcal{H}/d\chi|_{\chi=\chi_0}$ nem nulla mennyiséggel való egyszerűsítés után.

A (8.9) és (8.10) fejlődésegyenletek segítségével mind a központi tömeg, mind a nyomás kifejezhető az energiasűrűség segítségével:

$$m = \left[\Lambda + \kappa^2 \rho(\tau) \left(1 + \frac{\rho(\tau)}{2\lambda}\right) \right] \frac{a^3(\tau) \mathcal{H}_0^3}{6} , \quad (9.16)$$

$$p(\tau) = \frac{\Lambda}{\kappa^2 \left(1 + \frac{\rho(\tau)}{\lambda}\right)} - \frac{\rho(\tau)^2}{2[\rho(\tau) + \lambda]} . \quad (9.17)$$

Az (9.16) összefüggés a tömeg és a csillag sugarának kapcsolatát rögzíti, a (9.17) összefüggés pedig a mindenkorai nyomás értékét adja meg.

9.1.2. Gravitációs kollapszus

Porgömb gravitációs összeomlását [164] munkában vizsgálták, összehasonlítva az általános relativisztikus porgömb fekete lyukhoz vezető ún. Oppenheimer-Snyder kollapszusával [205]. A porgömb külső tartománya az árapálytöltésű gömbszimmetrikus vákuum bránmegoldás volt. A különbségek számottevőek. A kollapszus végterméke egyaránt lehet fekete lyuk, csupasz szingularitás vagy az összehúzódást követő tágulás. Ennél is fontosabb azonban az az eredmény, miszerint eltűnő árapálytöltés mellett a porgömb külseje

nem lehet sztatikus. Ez szöges ellentétben áll az ÁRE Birkhoff tételével, mely szerint bármilyen gömbszimmetrikus anyagkonfiguráció külső vákuum térideje Schwarzschild. Ezzel szemben a bránon található porgömb legegyszerűbb külső térideje a Vaidya téridő, mely geometriai optikai közelítésben tekintett sugárzást tartalmaz [165].

A következőkben megvizsgálom, hogy amennyiben porgömb helyett ideális folyadék gömb kollapszusát tekintjük, a külső tartomány lehet-e a Schwarzschild téridő?

Ideális folyadék gömbszimmetrikus kollapszusa

Az egyszerűség kedvéért a $\Lambda = 0$, $k = 0$ esetet tekintem. Ekkor $\mathcal{H}_0 = \chi_0$ és a (9.14) összefüggés

$$a\dot{a}^2 = \frac{2m}{\chi_0^3} \quad (9.18)$$

alakot ölti. A (9.18) integrálása megadja az összeomló csillag skálafaktorának időfejlődését τ együttmozgó idő függvényében:

$$a^{3/2} = a_0^{3/2} - \left(\frac{9m}{2\chi_0^3} \right)^{1/2} \tau . \quad (9.19)$$

A kollapszus modellezéséhez a (9.18) egyenlet ”–” gyökét választottam. Az a_0 integrációs állandó a skálafaktor kezdeti értéke ($\tau = 0$ -nál). Látszik, hogy a kollapszus véget ér, amikor $a = 0$ bekövetkezik, véges $\tau_1 = (2\chi_0^3 a_0^3 / 9m)^{1/2}$ idő elteltével.

A csillag energiasűrűségének M térfogati integrálja

$$M = \frac{4\pi\chi_0^3 a^3}{3} \rho . \quad (9.20)$$

Az (9.19) összefüggés szerint

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{2m}{\chi_0^3 \left[a_0^{3/2} - \left(\frac{9m}{2\chi_0^3} \right)^{1/2} \tau \right]^2} = \frac{8\pi m \rho}{3M} . \quad (9.21)$$

A csillagot alkotó ideális folyadékra vonatkozó Friedmann egyenlet pedig:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) . \quad (9.22)$$

Összehasonlítva $\dot{a}^2$ fenti két kifejezését, összefüggést kapunk a „fizikai” M tömeg és a külső tartományból látszó Schwarzschild tömeg között:

$$m = M \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) . \quad (9.23)$$

Nyilvánvalóan nem lehet mind m , mind M állandó (eltekintve a triviális $m = M = 0$ esettől, illetve a $\rho/\lambda \rightarrow 0$ ÁRE határesetről, amikor a kétféle tömeg egyenlő). A kétféle tömeg egyidejű állandóságának lehetetlenségét már [164] munkában is kimondták.

Ha M állandó, a csillag energiasűrűsége (9.20) értelmében $\rho(\tau) \sim a^{-3}$, azaz a csillag porból áll, mivel nyomása a

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (9.24)$$

folytonossági egyenlet értelmében eltűnik. Mivel ebben az esetben m időfüggő lesz, előáll [164] eredménye, miszerint a porgömb külső tartománya nem lehet sztatikus.

Amennyiben viszont megengedjük, hogy a folyadéknek nyomása legyen, az energiasűrűség a^{-3} -tól eltérően fejlődik, azaz M is változni fog. Az M megfelelő változásával a külső tartomány sztatikussá tehető.

Ahhoz, hogy az m Schwarzschild tömeget a belső téridő jellemzőivel kapcsolatba hozzassuk, (9.1) ívelemnégyzetet a gömbszimmetrikus téridők standard alakjára írjuk át:

$$ds_{FLRW}^2 = -e^{2\psi(R)} F(R) dT^2 + F(R)^{-1} dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (9.25)$$

A koordináták kapcsolata $T = T(\tau, \chi)$ és $R = R(\tau, \chi) = a(\tau) \chi$. Ebből $dT = \dot{T} d\tau + T' d\chi$ és $dR = \dot{a} \chi d\tau + a d\chi$ következik, ahol a vessző a χ szerinti deriválást jelöli. A metrika $\chi - \tau$ blokkjából kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\dot{a}^2 \chi^2 + F = e^{2\psi} F^2 \dot{T}^2 , \quad (9.26)$$

$$a \dot{a} \chi = e^{2\psi} F^2 T' \dot{T} , \quad (9.27)$$

$$a^2 (1 - F) = e^{2\psi} F^2 T'^2 . \quad (9.28)$$

Összeszorozva az első és harmadik egyenleteket, majd kiküszöbölve T deriváltjait a második segítségével, kapjuk, hogy $F = 1 - \dot{a}^2 \chi^2$. Az $R_0 = a \chi_0$ sugáron belül található m tömeget az F metrikus függvény segítségével értelmezzük:

$$F(R_0) = 1 - \frac{2m}{R_0} . \quad (9.29)$$

Így χ_0 -nál a tömeget

$$\frac{2m}{a^3 \chi_0^3} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (9.30)$$

összefüggés adja. Végül, (8.9) egyenletből

$$m = \frac{4\pi a^3 \chi_0^3 \rho}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) \quad (9.31)$$

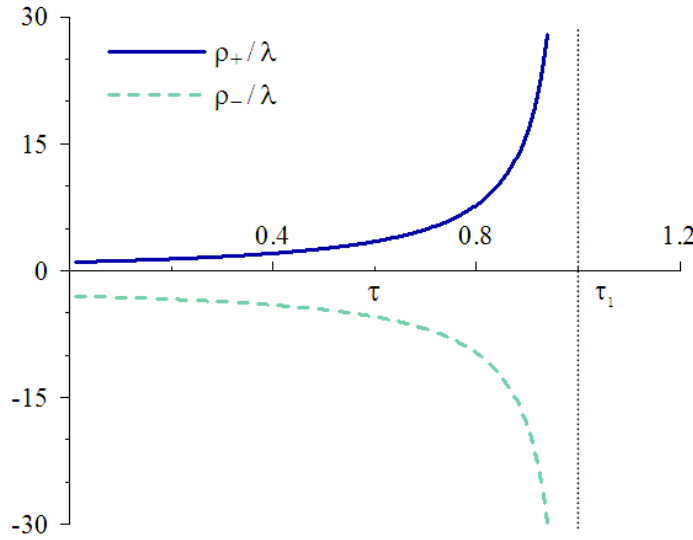
következik. Ez különbözik a tömeget, térfogatot és sűrűséget összekapcsoló szokásos (9.20) összefüggéstől, amit csak ÁRE határesetben kapunk vissza. Az (9.20) összefüggés segítségével előáll az m és M tömegeket összekapcsoló (9.23) összefüggés.

Könnyű belátni, hogy m a Bondi típusú koordinátákban megjelenő Bardeen féle kvázilokális tömeg [95]. Ehhez a (9.25) ívelemnégyzetet átírom akár avanszált, akár retardált (v, R, θ, φ) koordinátákba:

$$ds_{FLRW}^2 = -e^{2\psi} F dv^2 + 2ce^\psi dR dv + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (9.32)$$

A v null koordinátát $dv = dT + ce^{-\psi} F^{-1} dR$ határozza meg és $c = \pm 1$ (avanszált koordináta esetén $+$, retardált esetén $-$). A (7.9) összefüggés által értelmezett m pontosan a Bardeen kvázilokális tömeg.

Így a csillag tömege az m Bardeen kvázilokális tömeg lesz, nem pedig az M „fizikai” tömege. A Bardeen tömeg az anyagi járulékon túl a gravitációs energia járulékát is tartalmazza. Mivel brán-elméletben a gravitációs dinamika módosul az ÁRE-hez képest (jelen



9.1. ábra. Az összeomló csillag energiasűrűségére kapott $\rho_{\pm}$ ágak, $m = 2\pi\lambda\chi_0^3/3$ tömeg esetén. A kollapszus kezdete $a_0 = 1$, a τ időt $(9m/2\chi_0^3)^{1/2}$ egységekben ábrázolom. A ρ_+ ágon végtelen sűrűségű szingularitás áll elő $\tau = \tau_1 = 1$ időpontban [14].

esetben csupán a ρ^2 forrástagokkal), a kétféle tömeg különbözni fog egymástól (míg az ÁRE-ben egybeesnek).

Mivel a külső téridő vákuum és az 5D Weyl járulékokat nullának vettük, az effektív Einstein egyenlet nem más, mint az ÁRE vákuum Einstein egyenlet. A gömbszimmetria esetén érvényes Birkhoff tétel értelmében az összeomló csillagot a külső Schwarzschild megoldás írja le. Ennek m Schwarzschild tömege ugyanaz, mint a Bardeen kvázilokális tömege, ezt állandónak vesszük.

Ezt követően meghatározzuk a sűrűség $\rho(\tau)$ időfüggését. Ehhez behelyettesítjük a (9.19) által megadott $a(\tau)$ függést (9.20) egyenletbe. A kapott kvadratikus egyenlet

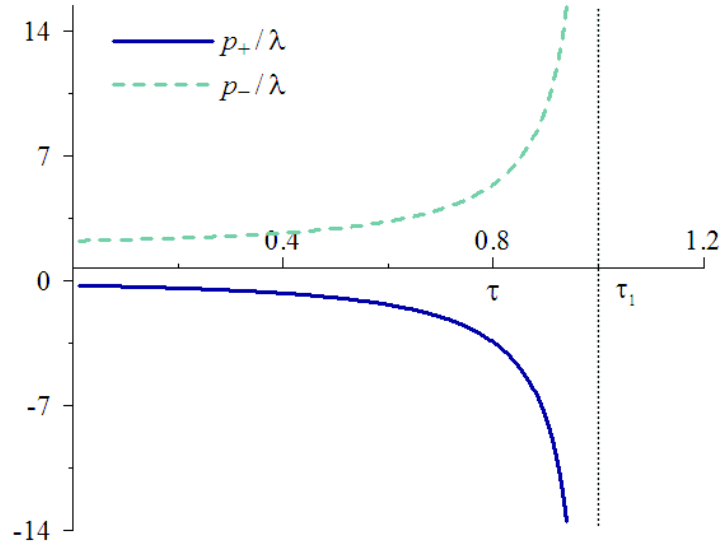
$$\frac{\rho^2}{\lambda^2} + 2\frac{\rho}{\lambda} - \frac{3m}{2\pi\lambda\chi_0^3 \left[a_0^{3/2} - \left(\frac{9m}{2\chi_0^3} \right)^{1/2} \tau \right]^2} = 0, \quad (9.33)$$

megoldásai pedig

$$\frac{\rho_{\pm}}{\lambda} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{3m}{2\pi\lambda\chi_0^3 \left[a_0^{3/2} - \left(\frac{9m}{2\chi_0^3} \right)^{1/2} \tau \right]^2}}. \quad (9.34)$$

A fizikailag elfogadható megoldás ρ_+ , mert ez bármilyen $\tau < \tau_1$ esetén pozitív. A ρ_+ energiasűrűség időben növekvő, τ_1 időpontban pedig, amikor a kollapszus befejeződik, végtelenné válik. A kollapszus során az $(1 + \rho/\lambda)^{-1}$ függést mutató M „fizikai” tömeg folyamatosan nulláig csökken. A (9.15) illesztési feltételből

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{m}{\chi_0^3 a^3} \quad (9.35)$$



9.2. ábra. Az összeomló csillag nyomásának $p_{\pm}$ két ága. A fizikailag értelmes ágon a p_{+} nyomás mindvégig negatív és abszolút értéke növekszik (azaz a $-p_{+}$ feszültség növekszik). A kollapszus végén (τ_1 időpontban) a feszültség értéke ∞ [14].

következik, a Raychaudhuri egyenlet pedig ad egy másik kifejezést $\ddot{a}$ -ra:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} \left[\rho \left(1 + \frac{2\rho}{\lambda} \right) + 3p \left(1 + \frac{\rho}{\lambda} \right) \right]. \quad (9.36)$$

A két összefüggés összevetéséből kapjuk a sűrűség és nyomás sugárfüggését jellemző egyenletet:

$$\rho \left(1 + \frac{2\rho}{\lambda} \right) + 3p \left(1 + \frac{\rho}{\lambda} \right) = \frac{3m}{4\pi\chi_0^3 a^3}. \quad (9.37)$$

A (9.34) kifejezések behelyettesítésével előáll a nyomás:

$$\frac{p_{\pm}}{\lambda} = 1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{3m}{2\pi\lambda\chi_0^3 \left[a_0^{3/2} - \left(\frac{9m}{2\chi_0^3} \right)^{1/2} \tau \right]^2}} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{3m}{2\pi\lambda\chi_0^3 \left[a_0^{3/2} - \left(\frac{9m}{2\chi_0^3} \right)^{1/2} \tau \right]^2}}. \quad (9.38)$$

A sztatikus külső téridő-tartomány feltevés tehát nem nulla nyomáshoz vezetett a brán-csillagban, azaz az ideális folyadék nem lehet por. A brán-csillag energiasűrűségének és nyomásának időfüggését a 9.1 és 9.2 ábrák szemléltetik.

Az ideális folyadék értelmezése.

A (9.34) és (9.38) összefüggések felhasználásával az energiasűrűséget és nyomást egymással összekapcsoló egyszerű egyenlethez jutunk:

$$\frac{p_{\pm}}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_{\pm}}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho_{\pm}}{\lambda} \right)^{-1}. \quad (9.39)$$

Ez az összefüggés azt fejezi ki, miként változik a nyomás az energiasűrűség függvényében a kollapszus során. Hasonló a newtoni pszeudo-csillagmodellekben használt politróp

feltevéshez, mely szerint a nyomás az energiasűrűségnek egyszerű $p = K\rho^{1-1/n}$ hatványfüggvénye. Összhangban van a folytonossági egyenlettel és a hidrosztatikai egyensúly követelményével, de nem veszi figyelembe a hőtranszfert vagy termikus egyensúly követelményét [206]. A korlátozás ellenére a politróp modellek igen hasznosnak bizonyultak a csillagok számos tulajdonságának megértésében.

A (9.39) összefüggés a bránon végbemenő kollapszust jellemző egyenletek megoldásából állt elő (ezek szintén tartalmazzák mind a folytonossági egyenletet, mind a hidrosztatikai egyensúly általánosított egyenletét) és, mint látni fogjuk, szintén politróp pszeudocsillagmodellekkel hozható kapcsolatba.

A kollapszus kezdetét jellemző kis-energiás tartományban ($|\rho_{\pm}| \ll \lambda$) az összeomló ideális folyadék a következő politróp egyenlettel közelíthető:

$$p_{\pm} \approx -\frac{\rho_{\pm}^2}{2\lambda}. \quad (9.40)$$

A politróp index $n = 1$, a politróp állandó pedig $K = -1/2\lambda$, a brán feszültség függvénye. A brán feszültség minimálisan megengedhető értékére vonatkozó legerősebb kényszert a Newton féle gravitációs törvénytől való eltérést vizsgáló kísérletekből [135] származtatják, felhasználva a 4D Planck állandó értékét. A két bránt tartalmazó elméletben [207] ez $\lambda > 138,59 \text{ TeV}^4$ értékekhez vezet [179]. Sokkal gyengébb, $\lambda \gtrsim 1 \text{ MeV}^4$ kényszert ad az a követelmény, hogy az effektív Einstein egyenlet energia-impulzusban négyzetes forrástagja még a Nukleoszintézis előtt elhanyagolhatóvá váljon [178]. Brán neutron csillagokra vonatkozó asztrofizikai megfontolások pedig egy köztes, $\lambda > 5 \times 10^8 \text{ MeV}^4$ korláthoz vezetnek [169]. A megadott értékek $c = 1 = \hbar$ mértékegység-rendszerben értendők; a $c = 1 = G$ egységekből $\lambda_{\text{Newton}} = 4,2 \times 10^{-119} \text{ eV}^{-2}$, $\lambda_{\text{Nukleoszintézis}} = 3 \times 10^{-145} \text{ eV}^{-2}$ és $\lambda_{\text{asztro}} = 1,5 \times 10^{-136} \text{ eV}^{-2}$ lesz. Mértékegység-rendszerből függően így a korlát óriási vagy éppen kis szám. Ami azonban fontos, hogy a csillagok jellegzetes sűrűségéhez viszonyítva (a Nap esetén $\rho_{\odot} = 1408 \text{ kg/m}^3$, ez $c = 1 = G$ esetén $\rho_{\odot} = 1,8 \times 10^{-150} \text{ eV}^{-2}$), a $\rho/\lambda \ll 1$ feltétel teljesül bármely korlát és bármely mértékegységrendszer esetén. Az összeomló folyadék ilyen sűrűség mellett a portól gyakorlatilag megkülönböztethetetlennek tekinthető.

A kollapszus végső stádiumában ezzel szemben $|\rho_{\pm}| \gg \lambda$, a nyomás pedig

$$p_{\pm} \approx -\frac{\rho_{\pm}}{2}. \quad (9.41)$$

Ez egy újabb politróp, melyet $K = -1/2$ együttható és $n \rightarrow \infty$ politróp index jellemez. Látszik, hogy a fizikai ágon a $\rho_+ + 3p_+ \approx -\rho_+/2 < 0$ sötét energia feltétel is teljesül. Tehát a kollapszus során a kezdetben szinte teljesen nyomásmentes folyadék sötét energiává válik.

Az ÁRE határesetben ($\rho/\lambda \rightarrow 0$) a folyadékgömb gömbszimmetrikus por-disztribúcióba megy át és a kollapszus végéig por is marad. Ez a (nyilvánvalóan erősen idealizált jellegű) Oppenheimer-Snyder kollapszus.

A bránon történő kollapszus gyökeresen különbözik. A folyamat során feszültség alakul ki a folyadékban, az összehúzódás végső szakaszában ($\tau \rightarrow \tau_1$) pedig a feszültség minden határon túl növekszik ($-p \rightarrow \infty$). A kialakuló hatalmas izotróp feszültség szerepe, akár a szilárd anyagoknál, az eredeti konfiguráció visszaállítása, vagyis a brán ellenállásaként fogható fel a rajta egyre jobban tömörülő anyageloszlás összehúzó hatásával szemben.

Bármilyen nagyra is nő viszont a folyadékban (a λ brán-feszültséget lényegesen meghaladó) $-p$ feszültség, nem képes a szingularitás kialakulását megakadályozni. Hogyan lehet az, hogy a taszító hatású sötét energiává vált folyadék ellenére, továbbá az $M \rightarrow 0$ viselkedés ellenére is folytatódik a kollapszus? A válasz a négyzetes forrástagokban keresendő. A kollapszus végén a (8.10) Raychaudhuri egyenlet lineáris forrástagjainak összege $2\pi\rho_{\pm}/3$, míg a kvadratikusan forrástag $-2\pi\rho_{\pm}^2/3\lambda$. Utóbbi a domináns, így a kollapszus a szingularitás kialakulásáig folytatódik.

Fekete lyuk ennél jóval korábban alakul ki, τ_H időpontban, amikor az összeomló folyadékgömb $R(\tau) = a(\tau)\chi_0$ sugara az $r_H = 2m$ horizontot eléri. A (9.19) egyenletből ez

$$\tau_H = \frac{4m}{3} \left[\left(\frac{a_0\chi_0}{2m} \right)^{3/2} - 1 \right]. \quad (9.42)$$

A (9.34) és (9.38) egyenletek szerint a horizont kialakulásakor az energiasűrűség és nyomás

$$\frac{(\rho_{\pm})_H}{\lambda} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{16\pi\lambda m^2}}, \quad (9.43)$$

$$\frac{(p_{\pm})_H}{\lambda} = 1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{3}{16\pi\lambda m^2}} \mp \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{3}{16\pi\lambda m^2}}}. \quad (9.44)$$

Ebből:

$$\frac{(\rho_{\pm})_H + 3(p_{\pm})_H}{\lambda} = 2 \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{3}{16\pi\lambda m^2}} \mp \frac{3}{2\sqrt{1 + \frac{3}{16\pi\lambda m^2}}} \quad (9.45)$$

következik. A fizikai ágon a fenti kifejezés a $(\lambda m^2)_1 \rightarrow \infty$ és $(\lambda m^2)_2 = 3/128\pi$ gyökök között pozitív, $\lambda m^2 < 3/128\pi$ esetén pedig negatív.

Asztrofizikai vagy galaktikus fekete lyukak esetén a sötét energia feltétel csupán a horizont alatti r_{se} sugárnál kisebb sugarakra teljesülhet. Ezt a következőkben látjuk be. A (9.37) összefüggés értelmében $\rho + 3p = 0$ teljesülésének feltétele

$$\frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{3m}{4\pi r_{se}^3}. \quad (9.46)$$

A (9.19) és (9.34) összefüggések felhasználásával:

$$r_{se} = \frac{A^{1/3}}{\mu^{2/3}} r_H, \quad (9.47)$$

ahol μ a fekete lyuk naptömegben ($M_{\odot} = 1,1154 \times 10^{66}$ eV, $c = 1 = G$ egységekben) kifejezett értéke és

$$A = \frac{3}{128\pi\lambda M_{\odot}^2} \quad (9.48)$$

dimenziótlan állandó.

A brán feszültség $c = 1 = G$ egységekben megadott $\lambda_{asztro} = 1,5 \times 10^{-136}$ eV⁻² asztrofizikai korlátot jelentő értékével számolva $A = 40$ (mivel $\lambda M_{\odot}^2 = 1,8662 \times 10^{-4}$), így

$$r_{se} = 3,42\mu^{-2/3}r_H = \mu^{1/3} \times 7,6293 \times 10^{66} \text{ eV}. \quad (9.49)$$

Az első egyenlőség utáni kifejezés szerint a fekete lyuk tömegének növelésével egyre inkább a horizont alá kell menni ahhoz, hogy a sötét energia feltétel teljesüljön. Ezt néhány számpéldával világítjuk meg: $\mu = 10$; 100 asztrofizikai fekete lyukak és $\mu = 10^4$; 10^6 ; 10^8 galaktikus fekete lyukak esetén az r_{se}/r_H arány értékére rendre 0,737; 0,159 és $7,37 \times 10^{-3}$; $3,42 \times 10^{-4}$; $1,59 \times 10^{-5}$ adódik.

A (9.49) második egyenlősége utáni kifejezés azt mutatja, hogy a sötét energia kialakulásának sugara μ köbgyökével növekszik. A korábbi számpéldák esetén a 10^{67} eV egységekben kifejezett r_{se} értékei 1,64; 3,54 és 16,44; 76,29; 354,12.

A (9.46)-(9.48) egyenletekből az is látható, hogy a sötét energiává alakulás az igen magas $\rho = 2\lambda$ sűrűségnél következik be. Idézzük fel, hogy $\lambda_{Newton} = 4,2 \times 10^{-119}$ eV $^{-2}$, $\lambda_{Nukleoszintézis} = 3 \times 10^{-145}$ eV $^{-2}$ és $\lambda_{asztro} = 1,5 \times 10^{-136}$ eV $^{-2}$. Hasonlítsuk ezt össze a legsűrűbb ismert csillagszerű objektumok sűrűségével. A neutroncsillagok sűrűsége $\rho_{ns} = 8 \times 10^{16}$ és 2×10^{18} kg/m 3 között változik, így a $c = 1 = G$ egységekben $\rho_{neutroncsillag}^{\min} = 1 \times 10^{-136}$ eV $^{-2}$ és $\rho_{neutroncsillag}^{\max} = 2,6 \times 10^{-135}$ eV $^{-2}$. Látjuk, hogy az asztrofizikai korlát pontosan a neutroncsillagok sűrűségi tartományába esik (ez az atommag sűrűségének nagyságrendje is).

Feltehető a kérdés, milyen tömeg esetén következhet be a sötét energiává alakulás már a horizonton? A (9.45) egyenlet szerint ez $m = (3/128\pi\lambda)^{1/2} = A^{1/2}M_\odot = 6,32 M_\odot$. Ugyanazt kapjuk (9.49) összefüggésből is $r_{se}/r_H = 1$ feltevessel. Figyelemreméltó, hogy a fenti tömeg a fekete lyuk képződéshez elengedhetetlen (neutroncsillagok tömegét felülről korlátozó) $m_{neutroncsillag}^{\max} = 1,5 \div 3 M_\odot$ Tolman-Oppenheimer-Volkoff korlát [208]-[210] által képviselt tömeg fölött található.

Amennyiben $\lambda m^2 \gg 1$ fennáll (azaz $\mu \gg 73$), a $(\lambda m^2)^{-1}$ kis paraméterben másodrendig, a fizikai ágon a sűrűség és nyomás a horizont átlépésekor

$$\rho_H = \frac{3}{32\pi m^2} \left(1 - \frac{3}{64\pi \lambda m^2} \right), \quad (9.50)$$

$$p_H = -\frac{9}{2048\pi^2 \lambda m^4}, \quad (9.51)$$

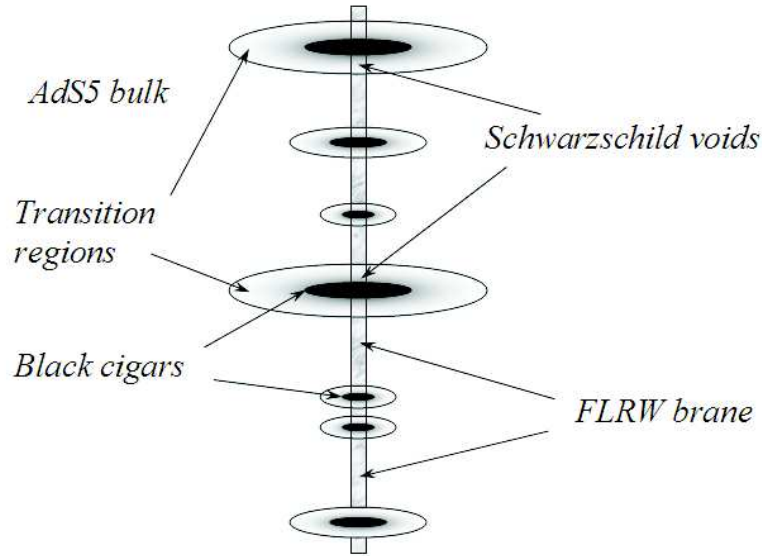
így

$$\rho_H + 3p_H = \frac{3}{32\pi m^2} \left(1 - \frac{3}{16\pi \lambda m^2} \right). \quad (9.52)$$

Ez alig különbözik az ÁRE esettől, mivel a zárójel második, brán eredetű tagja csupán apró negatív korrekció. Vagyis ebben a tömegtartományban a csillag anyagának porral való modellezése még a horizont átlépésekor is igen jó közelítés. Galaktikus fekete lyukak bránon való kialakulása során tehát a horizont fölött $\rho + 3p > 0$ mindvégig teljesül, mitöbb, ez a horizont alatt folytatódó összehúzódás jelentős részére is igaz.

9.1.3. Swiss-cheese modell és fekete húrok

Swiss-cheese modelleknek nevezik azokat a kozmológiai téridőket, melyekben a lokális inhomogenitásokat a téridőből kivágott gömbök helyére illesztett Schwarzschild fekete lyukak és ezek külső vákuum tartományaival modellezik. A gömbök sugara nem állandó,



9.3. ábra. A Swiss-cheese brán világ 1+1 dimenziós, sematikus ábrázolása. A FLRW bránt AdS5 téridőbe illesztjük. A brán Schwarzschild fekete lyukak az ötödik dimenzióba fekete húrként terjednek ki (ezeket a Gregory-Laflamme instabilitás miatt ún. fekete szivarként ábrázolom). Átmeneti zóna köti össze a fekete szivar tartományokat az AdS5 tartományokkal [16].

együtt tágul az univerzum többi részével. Egy ilyen modell kozmológiai következményei jelentősek lehetnek, így például az ÁRE Swiss-cheese modellje, az ún. Einstein-Straus modell [211] luminozítás-vörösetolódás összefüggése különbözik a standard kozmológiai modellben levezetett változatától [212].

Felmerül a kérdés, működik-e ugyanez a konstrukció a bránon is? A vizsgált konfigurációt a 9.3 ábra mutatja be. A brán FLRW, mely több beillesztett Schwarzschild vákuum tartományt is tartalmaz. A Weyl görbület elektromos részét nullának vesszük, a beágyazást szimmetrikusnak¹. A fekete lyukak fekete húrként terjeszthetők ki az ötödik dimenzióba². A Weyl görbület elektromos részét nem tartalmazó FLRW tartományok AdS5 tartományokba ágyazhatók. A teljes 5D tartomány egzakt téridejét nem ismerjük, de feltesszük, hogy létezik a fekete húr tartományok és az AdS5 tartományok közötti átmenet. Feltevésünket az motiválja, hogy az átmeneti tartományok nagyságát és alakját egyaránt szabadon megválaszthatjuk, ezzel az illesztési feltételek teljesítésében meglehetősen nagy szabadsággal bírunk. Ezt a problémát itt nem tárgyaljuk tovább, hanem a bránon szükséges illesztés feltételeit vizsgáljuk meg. Modellünkben $k = 0$, azonban megtartjuk a kozmológiai állandót a kozmológiai tartományokban.

Mivel a brán kozmológiai részeit FLRW tartományokkal modellezzük, az általánosított Friedmann és Raychaudhuri egyenletek ugyanúgy érvényesek és az illesztési feltételek is

¹A bonyolultabb, aszimmetrikus beágyazás értekezésben nem tárgyalt esetét a [213] munka tartalmazza.

²A Gregory-Laflamme instabilitás [214] miatt inkább ún. fekete szivarként.

ugyanazok, mint amiket a kollapszus esetén tárgyaltunk (most a FLRW téridőtartományok vannak kívül, a Schwarzschild belül):

$$a\dot{a}^2 = \frac{2m}{\chi_0^3}, \quad (9.53)$$

$$a^2\ddot{a} = -\frac{m}{\chi_0^3}. \quad (9.54)$$

A (9.18) egyenlet megoldásával ellentétben most a „+” gyököt és $a_0 = 0$ kezdeti értéket választjuk ahhoz, hogy Ősrobbanásból keletkező táguló univerzumot modellezzünk. A (9.53) egyenlet könnyen integrálható és megadja az a skálafaktor időfejlődését a τ kozmológiai idő függvényében:

$$a^3 = \frac{9m\tau^2}{2\chi_0^3}. \quad (9.55)$$

A bránon vett Swiss-cheese univerzumunk tehát *örökösen tágul*:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3\tau}, \quad (9.56)$$

valamint *örökösen lassul*:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2}{9\tau^2}. \quad (9.57)$$

A tágulás megáll $\tau \rightarrow \infty$ idő múlva, mint ahogy az a $k = 0$ választás nyomán elvárható. A (9.53) illesztési feltételből és a (9.4) általánosított Friedmann egyenletből levezethető a χ_0 együttmozgó sugarú Schwarzschild tartomány tömege az a skálafaktor és a kozmológiai folyadék ρ sűrűségének függvényeként:

$$m = \frac{a^3\chi_0^3}{6} \left[\Lambda + \kappa^2\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) \right]. \quad (9.58)$$

Ez pontosan a $k = 0$ esetre felírt (9.16) összefüggés.

A (9.54) illesztési feltétel és a (9.5) általánosított Raychaudhuri egyenlet megadja a folyadék állapotegyenletét, mely (9.58) felhasználásával következő alakot ölti

$$a^3(\rho + p)(\rho + \lambda) = \frac{6m\lambda}{\kappa^2\chi_0^3}. \quad (9.59)$$

Az (9.55) és (9.58) összefüggésekből levezethető

$$\kappa^2\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) = -\Lambda + \frac{4}{3\tau^2}, \quad (9.60)$$

az egyenlet gyökei pedig

$$\frac{\rho_{1,2}}{\lambda} = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\Lambda}{\kappa^2\lambda} + \frac{8}{3\kappa^2\lambda\tau^2}}. \quad (9.61)$$

Pozitív energiasűrűséghez a + megoldást választjuk, ezenkívül

$$3\Lambda\tau^2 < 4 \quad (9.62)$$

feltételnek is teljesülnie kell. Ez igaz $\Lambda \leq 0$ esetben. Pozitív Λ esetén az energiasűrűség $\tau < \tau_1 \equiv 2/\sqrt{3\Lambda}$ tartományban pozitív, később negatív lesz. Elég kis kozmológiai állandó esetén így ρ pozitív jellege hosszú ideig biztosítható. Ezenkívül ρ valós jellegéhez a

$$3(2\Lambda - \kappa^2\lambda)\tau^2 \leq 8 \quad (9.63)$$

feltétel teljesülése is elengedhetetlen, mely minden $\Lambda \leq \kappa^2\lambda/2$ esetén igaz, azonban $\Lambda > \kappa^2\lambda/2$ esetén sérül az összes $\tau > \tau_2 \equiv 2\sqrt{2/3(2\Lambda - \kappa^2\lambda)}$ időpontban. A ρ -ra vonatkozó feltételeket a 9.1 táblázatban foglalom össze.

9.1. táblázat. Azon tartományok, ahol ρ pozitív, negatív vagy rosszul értelmezett, különböző Λ értékekre. A konstansok $\tau_1 \equiv 2/\sqrt{3\Lambda}$ és $\tau_2 \equiv 2\sqrt{2/3(2\Lambda - \kappa^2\lambda)}$ [16].

ρ	$\tau < \tau_1$	$\tau = \tau_1$	$\tau_1 < \tau \leq \tau_2$	$\tau > \tau_2$
$\Lambda \leq 0$	+	+	+	+
$0 < \Lambda \leq \frac{\kappa^2\lambda}{2}$	+	0	–	–
$\Lambda > \frac{\kappa^2\lambda}{2}$	+	0	–	no real solution

A (9.55) és (9.61) összefüggéseket (9.59)-be helyettesítve előáll a kozmológiai nyomás időfüggése:

$$\frac{p}{\lambda} = 1 - \frac{4 + 3(\kappa^2\lambda - 2\Lambda)\tau^2}{(3\lambda)^{1/2}\kappa\tau\sqrt{8 + 3(\kappa^2\lambda - 2\Lambda)\tau^2}} \quad (9.64)$$

Tanulságos megvizsgálni, hogy az effektív Einstein egyenlet teljes effektív forrása miként viselkedik. A már bevezetett ρ , p , a , a folyadék u^a négyes sebessége, valamint a $g_{ab} = -u_a u_b + a^2 h_{ab}$ metrika függvényében a lineáris forrástag

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + p a^2 h_{ab} \quad (9.65)$$

a nemlineáris forrástag pedig

$$\tilde{\kappa}^4 S_{ab} = \kappa^2 \frac{\rho}{\lambda} \left[\frac{\rho}{2} u_a u_b + \left(\frac{\rho}{2} + p \right) a^2 h_{ab} \right] \quad (9.66)$$

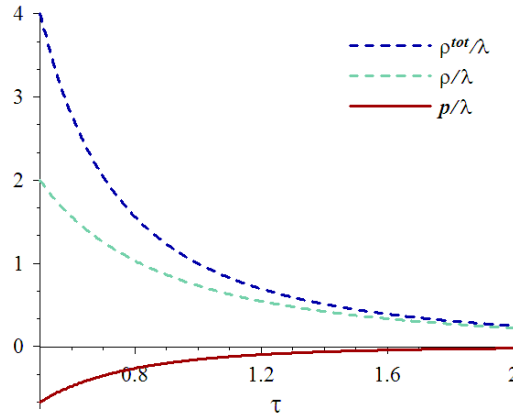
A (9.61) és (9.64) egyenletekből így a forrástagok összege

$$-\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} + \tilde{\kappa}^4 S_{ab} = \frac{4}{3\tau^2} u_a u_b \quad (9.67)$$

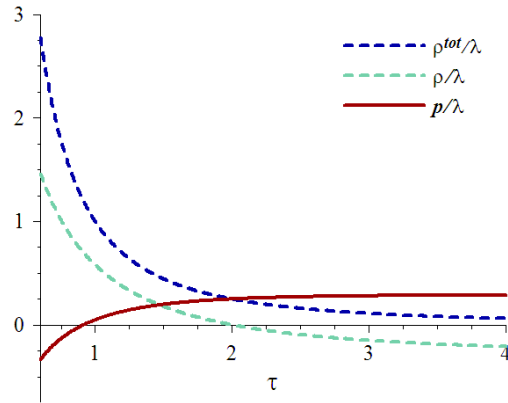
Így a FLRW tartományok effektív forrása nem más, mint por, a következő energiasűrűséggel.

$$\rho^{tot} = \frac{4}{3\kappa^2\tau^2} \quad (9.68)$$

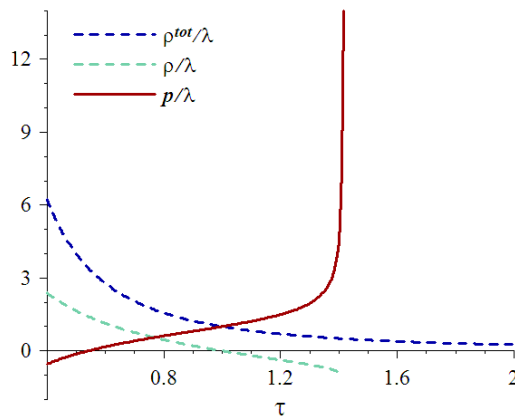
Megjegyezzük, hogy az ÁRE Einstein-Straus modellben a folyadék szintén por. Az ÁRE és a brán Swiss-cheese modellekben a skálafaktor ugyanazt a (9.55) időfüggést mutatja. Az Einstein-Straus modellben a por időfejlődése szintén azonos a brán Swiss-cheese



9.4. ábra. A ρ^{tot}/λ (felső görbe), ρ/λ (középső görbe) és p/λ (alsó görbe) fejlődése a $(4/3\kappa^2\lambda)^{1/2}$ egységekben megadott kozmológiai idő függvényében, $\Lambda = 0$ esetén [16].



9.5. ábra. Ugyanaz, mint a 9.4 ábrán, a $\Lambda = \kappa^2\lambda/4$ esetben. A ρ negatívvá válik τ_1 -nél, a nyomás pedig kezdeti negatív értékekből ennél korábban pozitívvá válik. Létezik egy olyan tartomány, ahol mind a ρ , mind a p pozitív [16].



9.6. ábra. Ugyanaz, mint a 9.4 ábrán, a $\Lambda = \kappa^2\lambda$ esetben. A ρ és p fejlődése egy darabig hasonló a 9.4 ábrán bemutatottal, azonban $\tau = \tau_2$ -nél nyomás-szingularitás jelenik meg [16].

modell effektív teljes energiasűrűségének időfejlődésével. Az egyezések az azonos illesztési feltételekből következnek. A brán modellben azonban a forrás egy nyomással is rendelkező ideális folyadék. Viselkedése háromféle lehet, a FLRW tartományok kozmológiai állandójának értéke függvényében, mint ahogy ezt a 9.1 táblázat sorai és a 9.4, 9.5 és 9.6 ábrák bemutatják.

A $\Lambda > 0$ esetben tapasztalt negatív energiasűrűséggel kapcsolatosan megjegyezzük a következőket. Az ÁRE-ben egy ideális folyadék energiasűrűsége és nyomása mindig átértelmezhető egy kozmológiai állandó segítségével olymódon, hogy az energiasűrűség teljesüljenek. A (ρ, p) ideális folyadék és Λ kozmológiai állandó ekvivalens egy másik, $(\bar{\rho} = \rho + \Lambda/\kappa^2, \bar{p} = p - \Lambda/\kappa^2)$ ideális folyadékkal és nulla kozmológiai állandóval. Így a negatív energiasűrűség elegendően nagy pozitív Λ segítségével pozitívvá tehető.

Az effektív Einstein egyenlet S_{ab} nemlineáris forrástagja megváltoztatja ezt a transzformációt, melynek a bránon érvényes alakja:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\rho}}{\lambda} &= -1 + \sqrt{1 + \frac{2\Lambda}{\kappa^2\lambda} + \frac{2\rho}{\lambda} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right)}, \\ \frac{\bar{p}}{\lambda} &= 1 - \frac{1 + \frac{2\Lambda}{\kappa^2\lambda} + \frac{\rho}{\lambda} - \frac{\rho}{\lambda} \left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2\Lambda}{\kappa^2\lambda} + \frac{2\rho}{\lambda} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right)}}.\end{aligned}\quad (9.69)$$

A (9.69) transzformáció alacsony energiákon ($\rho \ll \lambda$) az ÁRE esettől alig különbözik, míg nagy energiákon, pl. a korai univerzumban ($\rho \gg \lambda$) az egységtranszformációhoz közelít ($\bar{\rho}, \bar{p}$) $\approx (\rho, p)$, a Λ értékétől függetlenül.

A pozitív Λ esetén megjelenő negatív energiasűrűség egzotikus anyagra utal, ezért a fenti transzformáció értelmében mind a folyadékot, mind a kozmológiai állandót célszerű átértelmezni. Az így előálló $(\bar{\rho}, \bar{p})$ ugyanúgy a brán geometria forrásának tekinthető, de a $\bar{\rho}$ energiasűrűség mindvégig pozitív, a $\bar{p}$ nyomás pedig negatív lesz.

Λ -t eredetileg a FLRW tartományok kozmológiai állandójaként vezettük be, $\Lambda = \Lambda_{FLRW}$. Amennyiben a kivágott gömbi tartományokban is megengedünk egy Λ_{void} kozmológiai állandót (így ezek Schwarzschild-de Sitter, illetve Schwarzschild anti de Sitter tartományok lesznek), az illesztési feltételek módosulnak, az egyenletek viszont azonosak lesznek, azzal a különbséggel, hogy a bennük megjelenő $\Lambda = \Lambda_{FLRW} - \Lambda_{void}$ lesz. Amennyiben a teljes bránon ugyanazt a kozmológiai állandót vezetjük be, $\Lambda = 0$ lesz és csupán a 9.4 ábrán bemutatott fejlődések következnek be.

A $\Lambda > \kappa^2\lambda/2$ esetben a fejlődés hasonló a $0 < \Lambda \leq \kappa^2\lambda/2$ esethez, azonban $\tau \rightarrow \tau_2$ időpontban a (9.61) egyenletben a négyzetgyök nullához tart, azaz $\rho \rightarrow -\lambda$ és $p \rightarrow \infty$, *nyomás szingularitás* lép fel. Ez az ún. *hirtelen jövő szingularitás*hoz részben hasonló [215], azonban egy fontos aspektusban különbözik tőle. A $\tau = \tau_2$ időpontban előálló végtelen nyomás ellenére a Raychaudhuri egyenlet által megadott gyorsulás véges, mint ahogyan az a (9.57) egyenletből is látszik. A skálafaktor összes többi deriváltja is reguláris marad, a nyomás szingularitás bekövetkeztekor. Ez egy új típusú, ezidáig csak a brán-elméletekben jelentkező szingularitás. A brán-elmélet más típusú új szingularitásokat is termel, a [216] munkában *csendes, nyugalmas* (quiescent) kozmológiai szingularitással találkozunk, melyben az energiasűrűség és a Hubble paraméter véges marad, míg a

skálafaktor összes magasabb deriváltja divergál.

Elemzésünk megmutatta, hogy a bránon Swiss-cheese kozmológia nem állítható elő olyan egyszerű anyagi forrásokból, mint az ÁRE esetben. Még a legegyszerűbb $\Lambda = 0$ esetben is (melyet úgy is értelmezhetünk, hogy a FLRW és a kivágott gömbök tartományában ugyanaz a kozmológiai állandó), a folyadék teljesíti a $\rho + 3p < 0$ sötét energia feltételt bármely $\tau \leq (3\kappa^2\lambda)^{-1/2}$ időpontban. Az ideális folyadék sötét energia jellege ellenére a tágulás lassuló. Ez ugyanúgy a négyzetes forrástagok nagy energiákon megnyilvánuló dominanciájának tudható be, mint a kollapszus esetén a szingularitás kialakulása.

9.2. Árapály-töltésű brán fekete lyuk

Az effektív Einstein egyenletek gömbszimmetrikus vákuum megoldása az *árapálytöltésű fekete lyuk* [161]:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (9.70)$$

Az f metrikus függvény itt

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q}{r^2}. \quad (9.71)$$

A fekete lyukat két paraméter jellemzi, az m tömeg és a q árapálytöltés, mely az 5D Weyl görbület elektromos részéből származik.

Formálisan a (9.70) metrika nem más, mint az ÁRE Einstein-Maxwell egyenletrendszerének a gömbszimmetrikus Reissner-Nordström megoldása, amennyiben q árapálytöltést a Q elektromos töltés négyzetével helyettesítjük.³ Pozitív $q = Q^2$ esetén tehát az (9.70) ívelem egy elektromosan töltött test gravitációs terét írja le. Brán-elméletben azonban q bármilyen előjelű lehet. Pozitív q ugyanúgy gyengíti a fekete lyuk gravitációját, mint a Reissner-Nordström fekete lyuk elektromos töltése. Negatív q viszont erősíti a gravitációt, hozzájárulva a gravitáció bránon való lokalizációjához.

A $q > 0$ esetben az ÁRE Reissner-Nordström megoldásával teljes az analógia. A $0 < q < m^2$ esetben a (9.70) metrika olyan fekete lyukat ír le, melynek két horizontja van, ezek helyzete $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - q}$ (mindkettő a Schwarzschild sugáron belül helyezkedik el). A $q = m^2$ esetben a két horizont egybeesik $r_e = m$ helyen (ez az extrémális Reissner-Nordström fekete lyuk megfelelője). Bármely $q < 0$ esetén csupán egyetlen horizont van, $r_+ = m + \sqrt{m^2 + |q|}$ helyen.

Bár azon ötdimenziós megoldása az Einstein egyenleteknek, melybe az árapálytöltésű brán beágyazható, továbbra sem ismert, perturbációs számítással belátták, hogy legalábbis abban az esetben, amikor az árapálytöltés jelentősebb a tömegnél, a horizont bezáródik az ötödik dimenzióban, azaz az árapálytöltésű fekete lyuk egy 5D reguláris fekete lyuk 4D metszete lesz [204].

³Megjegyezzük, a q árapálytöltés különbözik a 8.2 alfejezetben azonos módon jelölt elektromos töltéstől, melyet itt Q jelöl.

9.2.1. A fény elhajlása másodrendben

A következőkben a fotonok mozgását vizsgálom az árapálytöltésű fekete lyuk környezetében, [17] munkánk nyomán. Munkánk megjelenése előtt a fény elhajlásával kapcsolatosan az irodalomban ellentmondó eredmények láttak napvilágot: a Lagrange tárgyalás alapján [217], valamint az eikonál-egyenlet alapján [162] levezetett eredmények eltértek egymástól. A [17] munka megerősítette [217] eredményeit, és Hamilton-Jacobi módszerre alapozva is megadta a helyes eredményt. Ezenkívül a Naprendszerbeli megfigyeléseket is felhasználva korlátot állapított meg a brán feszültségre.

Levezetés Lagrange formalizmusban

Fotonpályák A fény az (9.70) ívelem-négyzet által megadott téridő null geodetikusait követi. A fotonok mozgásegyenlete mind a geodetikus egyenletből, mind a $2\mathcal{L} = (ds^2/d\sigma^2)$ Lagrange sűrűségből levezethető (itt σ a null geodetikus görbe paramétere; [218] 3. fejezete). A gömbi szimmetria és az egyenlítői síkra vett tükrözési szimmetria miatt az általánosság csorbítása nélkül választható $\theta = \pi/2$. Tehát

$$0 = 2\mathcal{L} = -f(r) \dot{t}^2 + f^{-1}(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (9.72)$$

(A pont σ szerinti deriváltat jelöl). A t és φ ciklikus változók az E és L mozgásállandókhoz vezetnek:

$$E \equiv -p_t = f\dot{t}, \quad L \equiv p_\varphi = r^2\dot{\varphi}. \quad (9.73)$$

Visszahelyettesítve ezeket (9.72) egyenletbe, bevezetve az $u = 1/r$ radiális változót és áttérve φ szerinti deriválásra (amit vesszővel jelölök), kapjuk, hogy

$$(u')^2 = \frac{E^2}{L^2} - u^2 f(u). \quad (9.74)$$

Az $u' = 0$ eset kivételével (mely köralakú fotonpályát jelent), a (9.74) egyenlet deriváltjából

$$u'' = -uf - \frac{u^2}{2} \frac{df}{du} \quad (9.75)$$

következik. Amennyiben $f = 1$, egyáltalán nincs gravitáció (a (9.70) metrika sík), és a fenti egyenlet $u'' + u = 0$ alakra egyszerűsödik, melynek megoldása $u = u_0 = b^{-1} \cos \varphi$. A b impakt (ütközési) paraméter a foton és a csillag közötti legkisebb távolságot adja meg egy olyan egyenesvonalú pályán, ami teljességgel elhanyagolja a csillag gravitációs vonzását. A φ polár szöget a csillagot az egyenessel a legkisebb távolságon összekötő szakasztól a csillag és a foton mindenkorli helyzetét összekötő szakaszig vesszük. Mivel a legkisebb távolságnál $u' = 0$ és az aszimptotikus érték $u = b^{-1}$, a (9.74) összefüggés értelmében, az $m = 0 = q$ választás mellett az impakt paraméter $b = L/E$ módon fejezhető ki a mozgásállandók függvényében.

Perturbatív megoldás A (9.75) egyenlet explicit alakja

$$u'' + u = 3mu^2 - 2qu^3. \quad (9.76)$$

Gyenge lencsézés és fényelhajlás tanulmányozásához az

$$\varepsilon = mb^{-1}, \quad \eta = qb^{-2} \quad (9.77)$$

kis paraméterekben perturbatív megoldást keresünk, következő alakban

$$u = b^{-1} \cos \varphi + \varepsilon u_1 + \eta v_1 + \varepsilon^2 u_2 + \eta^2 v_2 + \varepsilon \eta w_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3, \eta^3, \varepsilon \eta^2, \varepsilon^2 \eta), \quad (9.78)$$

azaz a perturbációszámítás második rendjében. Az ismeretlen u_1 , u_2 , v_1 , v_2 és w_2 függvények alsó indexei a perturbációszámítás rendjét jelölik, melyben ezek a járulékok megjelennek. Behelyettesítve (9.78) összefüggést a gyenge lencsézés (9.76) egyenletébe, az ismeretlen függvényeket meghatározó differenciálegyenletekhez jutunk. Másodrendig a kis paraméterekben ezek:

$$\varepsilon : \quad u_1'' + u_1 = 3b^{-1} \cos^2 \varphi, \quad (9.79)$$

$$\eta : \quad v_1'' + v_1 = -2b^{-1} \cos^3 \varphi, \quad (9.80)$$

$$\varepsilon^2 : \quad u_2'' + u_2 = 3u_1 [u_1 (m - 2qb^{-1} \cos \varphi) + 2 \cos \varphi], \quad (9.81)$$

$$\eta^2 : \quad v_2'' + v_2 = 3v_1 [v_1 (m - 2qb^{-1} \cos \varphi) - 2 \cos^2 \varphi], \quad (9.82)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \eta : \quad w_2'' + w_2 = & 6[u_1 v_1 (m - 2qb^{-1} \cos \varphi) \\ & + v_1 \cos \varphi - u_1 \cos^2 \varphi]. \end{aligned} \quad (9.83)$$

Megjegyezzük, hogy a megoldásoknak nem lehet $f(-\varphi) = -f(\varphi)$ jellegű járuléka, mivel a φ nulla helyét $r_{\min}$ -nál vettük fel, melyhez viszonyított múlt és jövő pályaszakaszok szimmetrikusak (ez a (9.70) lencséző metrika sztatikus jellegének következménye). Az (9.79) és (9.80) elsőrendű egyenletek megoldása

$$u_1 = b^{-1} \left[C_\varepsilon \cos \varphi + \frac{1}{2} (3 - \cos 2\varphi) \right], \quad (9.84)$$

$$v_1 = b^{-1} \left[C_\eta \cos \varphi + \frac{1}{16} (\cos 3\varphi - 12\varphi \sin \varphi) \right], \quad (9.85)$$

itt C_ε, η integrációs állandók. Nullának vett más integrációs állandók segítségével elhagytuk a φ -ben való szimmetriát nem teljesítő $\sin \varphi$ járulékokat. Azért, hogy az u_1 és v_1 összes tagja szemmel láthatóan is azonos rendű legyen, a konstansokból b^{-1} szorzókat emeltünk ki. Ezzel mu_1 és mv_1 rendje ε , míg $qb^{-1}u_1$ és $qb^{-1}v_1$ rendje η lesz. Következésképpen a másodrendű (9.81)-(9.83) egyenletekből ezek a tagok elhagyhatók, az egyenletek

megoldása pedig

$$u_2 = b^{-1} \left[C_{\varepsilon^2} \cos \varphi + C_{\varepsilon} (3 - \cos 2\varphi) + \frac{3}{16} (\cos 3\varphi + 20\varphi \sin \varphi) \right], \quad (9.86)$$

$$\begin{aligned} v_2 = b^{-1} & \left[C_{\eta^2} \cos \varphi + \frac{3}{16} C_{\eta} (\cos 3\varphi - 12\varphi \sin \varphi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{256} (-21 \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + 60\varphi \sin \varphi \right. \\ & \left. - 36\varphi \sin 3\varphi - 72\varphi^2 \cos \varphi) \right], \end{aligned} \quad (9.87)$$

$$\begin{aligned} w_2 = b^{-1} & \left[C_{\varepsilon\eta} \cos \varphi + C_{\eta} (3 - \cos 2\varphi) + \frac{3}{16} C_{\varepsilon} (\cos 3\varphi - 12\varphi \sin \varphi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} (-60 + 31 \cos 2\varphi - \cos 4\varphi + 12\varphi \sin 2\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (9.88)$$

Itt C_{ε^2} , η^2 , $\varepsilon\eta$ újabb integrációs állandók (a $\sin \varphi$ -vel arányos tagokat ismét elhagytuk). A megmaradt integrációs állandók meghatározhatók, ha a (9.84)-(9.88) kifejezésekkel kiegészített (9.78) megoldást visszahelyettesítjük a (9.74) egyenletbe. Ezzel a módszerrel kapjuk, hogy $C_{\varepsilon} = C_{\varepsilon\eta} = 0$, $C_{\eta} = -9/16$, $C_{\varepsilon^2} = 37/16$, $C_{\eta^2} = 271/256$. A (9.74) egyenlet másodrendben érvényes általános megoldása tehát:

$$\begin{aligned} bu = & \cos \varphi + \frac{\varepsilon}{2} (3 - \cos 2\varphi) - \frac{\eta}{16} (9 \cos \varphi - \cos 3\varphi + 12\varphi \sin \varphi) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{16} (37 \cos \varphi + 3 \cos 3\varphi + 60\varphi \sin \varphi) \\ & + \frac{\eta^2}{256} (271 \cos \varphi - 48 \cos 3\varphi + \cos 5\varphi \\ & + 384\varphi \sin \varphi - 36\varphi \sin 3\varphi - 72\varphi^2 \cos \varphi) \\ & + \frac{\varepsilon\eta}{16} (-87 + 40 \cos 2\varphi - \cos 4\varphi + 12\varphi \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (9.89)$$

A lencséző objektumtól távol $u = 0$ és $\varphi = \pm\pi/2 \pm \delta\varphi/2$, ahol a $+$ ($-$) előjelek a távoli jövőre (múltra) vonatkozó előjelek és $\delta\varphi$ a fényelhajlás szöge. Másodrendben:

$$\delta\varphi = \varepsilon\alpha_1 + \eta\beta_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \eta^2\beta_2 + \varepsilon\eta\gamma_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3, \eta^3, \varepsilon\eta^2, \varepsilon^2\eta). \quad (9.90)$$

Az (9.89) megoldás sorfejtése megadja a fenti kifejezés együtthatóit, így a fényelhajlás szögére adódó kifejezés:

$$\delta\varphi = 4\varepsilon - \frac{3\pi}{4}\eta + \frac{15\pi}{4}\varepsilon^2 + \frac{105\pi}{64}\eta^2 - 16\varepsilon\eta. \quad (9.91)$$

Az első három tagot már a Reissner-Nordström fekete lyuk által okozott lencsézést vizsgáló [219] munkában is megadták. Ott azonban feltették, hogy η rendje ε^2 , ez a brán-elméletben indokolatlan lenne. A legelső tag a tankönyvekben bemutatott ÁRE fényelhajlási szög, eredményünk ennél lényegesen pontosabb.

Az elhajlás szögét a b Minkowski impakt paraméter függvényében adtuk meg. Hasznos lehet, ha az $r_{\min}$ legkisebb távolság függvényeként is megadjuk. Utóbbit megkapjuk, ha $u = 1/r_{\min}$ és $\varphi = 0$ értékeket helyettesítjük (9.89) egyenletbe:

$$r_{\min} = b \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{2}\eta - \frac{3}{2}\varepsilon^2 - \frac{5}{8}\eta^2 + 2\varepsilon\eta \right). \quad (9.92)$$

Az egyenlet invertálása másodrendben (a kis paraméterek most $m/r_{\min}$ és $q/r_{\min}^2$) következőt adja:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{r_{\min}} \left(1 - \frac{m}{r_{\min}} + \frac{q}{2r_{\min}^2} - \frac{m^2}{2r_{\min}^2} - \frac{q^2}{8r_{\min}^4} + \frac{mq}{2r_{\min}^3} \right). \quad (9.93)$$

Mivel az elhajlás szöge csupán első és másodrendű járulékokból áll (newtoni rendben nincs elhajlás), a fenti összefüggésre csak elsőrendű pontossáig lesz szükségünk. A $\delta\varphi$ a legkisebb távolság függvényeként tehát:

$$\delta\varphi = \frac{4m}{r_{\min}} - \frac{3\pi q}{4r_{\min}^2} + \frac{(15\pi - 16)m^2}{4r_{\min}^2} + \frac{57\pi q^2}{64r_{\min}^4} + \frac{(3\pi - 28)mq}{2r_{\min}^3}. \quad (9.94)$$

Az első három tag ismét azonos a [219] munkában meghatározottakkal, $q = Q^2$ helyettesítés mellett.

Levezetés Hamiltonian-Jacobi módszerrel

A [162] munkában a fényelhajlás kérdését az eikonál formalizmusra alapozva vizsgálták, mely [220] prezentációját követi. Az eredményt a fent bemutatottól különbözőnek találták, ezért indokolt a Hamilton-Jacobi módszerrel is újra megvizsgálni a kérdést. A [162] munkában alkalmazott koordinátatranszformációtól eltérően azonban itt is perturbatív eljárást követünk, a korábban bevezetett két kis paraméterre alapozva. Eljárásunk visszaadja a (9.94) eredményt.⁴

Fényelhajlás az eikonál-egyenletből Induljunk ki az ÁRE eikonál egyenletből (Hamilton-Jacobi egyenlet):

$$g^{ab} \frac{\partial \Psi}{\partial x^a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^b} = 0. \quad (9.95)$$

A Ψ függvény az $A_a = \text{Re}[\mathcal{A}_a \exp(i\Psi)]$ komplex elektromágneses négyes-potenciál gyorsan változó valós fázisa, valamint bevezetjük $k_a = \partial\Psi/\partial x^a$ hullámvektort is. A komplex amplitúdó a geometriai optikai (eikonál; nagyfrekvenciás) közelítésben csak igen lassan változik. A közelítés szerint a hullámhossz egyaránt kicsi a karakterisztikus görbületi sugár és az optikai tulajdonságok karakterisztikus változási skálájához mérten. A komplex amplitúdó normált változata a polarizáció vektor. A fénysugarak k^a integrálgörbéi merőlegesek a hullámfrontokra, azaz az állandó fázisú felületekre. Az eikonál egyenlet azt fejezi ki, hogy a hullámvektor fényszerű. A vákuum Maxwell egyenletekből az is következik, hogy a fény null geodetikusokat követ, $k^a \nabla_a k^b = 0$, valamint a polarizáció vektor egyrészt merőleges a fénysugarakra, másrészt önmagával párhuzamosan terjed a fénysugarak mentén. Ennél részletesebb ismertetés [218] 1.8 fejezetében található.

Mint a Lagrange formalizmus esetén, most is élünk a $\theta = \pi/2$ választással. A szimmetriák miatt az eikonál függvény (a Hamilton-Jacobi hatás) alábbi módon választható:

$$\Psi = E(-t + b\varphi) + \psi_r(r). \quad (9.96)$$

⁴A [162] munkában a sorfejtést nem mindenütt végezték el megfelelő rendig, így például a transzformáció Jacobi determinánsában.

Itt felhasználtuk a korábban levezetett $L = bE$ összefüggést is.

A (9.95) eikonál egyenlet megadja az ismeretlen radiális függvényt:

$$\psi_r = E \int \mathcal{C}(r) dr, \quad (9.97)$$

$$\mathcal{C}(r) = \pm \sqrt{\frac{r^4}{(r^2 - 2b\epsilon r + b^2\eta)^2} - \frac{b^2}{r^2 - 2b\epsilon r + b^2\eta}}. \quad (9.98)$$

Fenti kifejezésben felhasználtuk a kis ϵ és η paraméterek (9.77) definícióját. A gyökjel előtti előjel negatív, amikor r csökken (a foton közeledik a lencséző objektumhoz); pozitív ha r növekszik (a foton már elhagyta a lencséző objektumot). Választásunk biztosítja, hogy $d\psi_r(r) = E\mathcal{C}(r)dr > 0$ a pálya teljes hosszán.

A (9.96) egyenlet L szerinti deriválásával előáll

$$\frac{d\Psi}{dL} = \varphi + \frac{d\psi_r}{dL} \quad (9.99)$$

módon, azonban a Jacobi tétel értelmében a Hamilton-Jacobi hatás deriváltja kanonikus állandó szerint (esetünkben L), újabb kanonikus állandóhoz vezet. Más szóval Ψ a kanonikus transzformációk olyan generáló függvénye, mely a Hamilton egyenleteknek triviálisan eleget tevő kanonikus párba visz; jelen esetben ezek L és $d\Psi/dL$, melyek eleget tesznek $(d/d\sigma)L = 0 = (d/d\sigma)(d\Psi/dL)$ feltételeknek (itt σ ismét a foton pályájának paramétere).

Bevezetjük a későbbiekben kényelmesnek bizonyuló ϕ változót az $r = b/\cos\phi$ módon. A kis paraméterekben nulladrendben $\varphi = \phi$. Ha $r > 0$, akkor $\arccos(b/r) = |\phi|$, azaz $\phi = \text{sgn}\phi \arccos(b/r)$ lesz. A ϕ változó minden $r \geq b$ -re létezik. Kiértékelve (9.99) egyenletet a $\varphi(\phi)$ pálya két $r \geq b$ pontjában és a különbségüket képezve kapjuk, hogy

$$\varphi(\phi_2) - \varphi(\phi_1) = - \left. \frac{d\psi_r}{dL} \right|_{\phi_2} + \left. \frac{d\psi_r}{dL} \right|_{\phi_1}. \quad (9.100)$$

A végtelenből induló, a lencséző objektumot megközelítő, majd ismét a végtelenbe távolodó foton φ polár szögének megváltozását a következő határérték adja meg:

$$\Delta\varphi = - \lim_{\Phi \rightarrow \pi/2} \left(\left. \frac{\partial\psi_r}{\partial L} \right|_{\Phi} - \left. \frac{\partial\psi_r}{\partial L} \right|_{-\Phi} \right). \quad (9.101)$$

(Itt $\Phi \geq 0$.)

Perturbatív megoldás Most a (9.98) egyenlet által megadott ψ_r radiális függvényt fejtjük sorba másodrendig a két kis paraméterben:

$$\psi_r = L \int \mathcal{C}(\phi) \frac{\sin\phi}{\cos^2\phi} d\phi, \quad (9.102)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\phi) = & \sin\phi + \left(\epsilon - \frac{1}{2}\eta \cos\phi \right) \frac{(2 - \cos^2\phi) \cos\phi}{\sin\phi} \\ & + \frac{1}{2} \left(\epsilon - \frac{1}{2}\eta \cos\phi \right)^2 \frac{\cos^2\phi}{\sin^3\phi} \\ & \times \left[4(3 - \cos^2\phi) \sin^2\phi - (2 - \cos^2\phi)^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.103)$$

Itt $\mathcal{C}(\phi) \equiv \mathcal{C}(r = b/\cos\phi)$ előjele $\text{sgn}\phi$, a (9.98) egyenletben a gyök előjelére tett konvenciókkal egyezésben. A radiális függvény sorfejtett alakja

$$\psi_r(\phi) = L(I_0 + \varepsilon I_\varepsilon + \eta I_\eta + \varepsilon^2 I_{\varepsilon^2} + \eta^2 I_{\eta^2} + \varepsilon\eta I_{\varepsilon\eta}) , \quad (9.104)$$

ahol

$$\begin{aligned} I_0(\phi) &= \tan\phi - \phi , \\ I_\varepsilon(\phi) &= \ln\left(\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\right) - \sin\phi \\ &= 2\text{sgn}\phi \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\cos\phi}\right) - \sin\phi , \\ I_\eta(\phi) &= \frac{1}{4}\sin\phi\cos\phi - \frac{3\phi}{4} , \\ I_{\varepsilon^2}(\phi) &= \frac{15}{4}\phi + (3\cos^2\phi - 1)\frac{\cot\phi}{4} , \\ I_{\eta^2}(\phi) &= \frac{35}{64}\phi + (6\cos^4\phi - 33\cos^2\phi + 35)\frac{\cot\phi}{64} , \\ I_{\varepsilon\eta}(\phi) &= \frac{8\cos^2\phi - \cos^4\phi - 8}{2\sin\phi} . \end{aligned} \quad (9.105)$$

Az explicit L szorzón kívül $\psi_r(\phi)$ az $\varepsilon = mb^{-1}$, $\eta = qb^{-2}$ és $\phi = \text{sgn}\phi \arccos(b/r)$ kifejezéseken keresztül is függ L -től, mivel $b = L/E$. Az $L\varepsilon$ és $L^2\eta$ szorzatok azonban függetlenek L -től. Következésképpen a $d\psi_r(\phi)/dL$ deriváltat alábbi módon érdemes számolni:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL}\psi_r(\phi) &= \frac{d}{dL}(LI_0) + (L\varepsilon)\frac{d}{dL}I_\varepsilon + (L^2\eta)\frac{d}{dL}(L^{-1}I_\eta) \\ &\quad + (L\varepsilon)^2\frac{d}{dL}(L^{-1}I_{\varepsilon^2}) + (L^2\eta)^2\frac{d}{dL}(L^{-3}I_{\eta^2}) \\ &\quad + (L\varepsilon)(L^2\eta)\frac{d}{dL}(L^{-2}I_{\varepsilon\eta}) . \end{aligned} \quad (9.106)$$

A

$$\frac{d\phi}{dL} = -L^{-1}\cot\phi \quad (9.107)$$

összefüggés felhasználása segítségével a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL}(LI_0) &= -\phi , \\ L\frac{d}{dL}I_\varepsilon &= \frac{-2}{\sin\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi} , \\ L^2\frac{d}{dL}(L^{-1}I_\eta) &= \frac{3\phi}{4} - \frac{\cos^2\phi - 3}{4\sin\phi}\cos\phi , \\ L^2\frac{d}{dL}(L^{-1}I_{\varepsilon^2}) &= -\frac{15\phi}{4} - \frac{9\cos^4\phi - 26\cos^2\phi + 15}{4\sin^3\phi}\cos\phi , \\ L^4\frac{d}{dL}(L^{-3}I_{\eta^2}) &= -\frac{105\phi}{64} \\ &\quad - \frac{6\cos^6\phi + 21\cos^4\phi - 105\cos^2\phi + 70}{64\sin^3\phi}\cos\phi , \\ L^3\frac{d}{dL}(L^{-2}I_{\varepsilon\eta}) &= \frac{8}{\sin\phi} + \frac{\cos^4\phi + 6\cos^2\phi - 24}{2\sin\phi}\cos^2\phi . \end{aligned} \quad (9.108)$$

A (9.101) összefüggésben megadott határértékképzés után $\Delta\varphi$ nulladrendű, illetve ε , η , ε^2 , η^2 , $\varepsilon\eta$ rendű járulékaik rendre $(\pi, 4, -3\pi/4, 15\pi/4, 105\pi/64, -16)$ lesznek.

Nulladrendben azt a természetes eredményt kaptuk, hogy $(\Delta\varphi)_0 = \pi$, azaz lencséző objektum hiányában a fény pályája egyenes. A fény elhajlását tehát $\delta\varphi = \Delta\varphi - \pi$ kifejezés adja meg, ez pedig a Lagrange formalizmusban előállt (9.91) értékeket pontosan visszaadja, amint az elvárható.

Kényszerek a Naprendszerbeli megfigyelésekből

A (9.91) és [162] (27)-es egyenletének összehasonlításában szembeszökő, hogy eredményünk η -rendű járulékot is tartalmaz, míg [162] eredménye nem. Az η járulék adja tehát az árapálytöltést is tartalmazó vezető rendű járulékot. Ennek fényében a [162] munkában kapott korlátok módosulnak. A hosszú alapvonalú rádió interferometrikus mérések [221]–[222] szerint $\delta\varphi = \delta_\varepsilon\varphi(1 + \xi)$, ahol $\xi < \xi_{\max} = \pm 0,0017$. Azzal a feltevéssel élve, hogy az elsőrendű (Schwarzschild) értéktől való eltérés az árapálytöltés számlájára írható, azt kapjuk, hogy: $\delta_\varepsilon\varphi\xi_{\max} = (\delta_\eta\varphi)_{\max}$, azaz $16\varepsilon\xi_{\max} = 3\pi(-\eta)_{\max}$ vagy $16mb\xi_{\max} = 3\pi(-q)_{\max}$. Mivel a Nap tömege $m = M_\odot = 1476,685m$ és a lehető legkisebb impakt paraméter $r_{\min} = R_\odot = 695990$ km, a következő korlát adódik:

$$|q|_{\max} = \frac{16|\xi_{\max}|}{3\pi}M_\odot R_\odot = 2966\text{km}^2. \quad (9.109)$$

Állandó sűrűségű csillaggal való illesztés feltételeiből azt kapjuk, hogy a Nap árapálytöltése negatív [169]:

$$q_\odot = -\frac{3M_\odot R_\odot \rho_\odot}{\lambda}. \quad (9.110)$$

A $-q_\odot \leq |q|_{\max}$ feltételből pedig

$$\lambda \geq \frac{3M_\odot R_\odot \rho_\odot}{|q|_{\max}} = \frac{9\pi\rho_\odot}{16|\xi_{\max}|} = 1464,066 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 6,310 \cdot 10^{-3} \text{MeV}^4 \quad (9.111)$$

brán-feszültségre kiróható kényszer következik. A Naprendszerben végzett mérésekből így 5 nagyságrenddel magasabb korlátot vezettünk le, mint [162] munkában. Ez annak a következménye, hogy [162] eredményéből az η tagok teljesen, a $\varepsilon\eta$ tagok pedig félig hiányoznak. Megjegyezzük azonban, hogy a korlát még így is több nagyságrenddel alacsonyabb a más típusú megfontolásokból kapottaknál. ($\lambda \geq 138,59 \text{ TeV}^4$ a gravitációs állandó méréseiből [157], [179], $\lambda \geq 1 \text{ MeV}^4$ a nukleoszintézisből [178] és $\lambda \geq 5 \times 10^8 \text{ MeV}^4$ a neutroncsillagok tárgyalásából [169]).

Végezetül megjegyezzük, hogy a pozitív árapálytöltés csökkenti az elhajlás szögét (ez a tulajdonság az analóg ÁRE Reissner-Nordström fekete lyuk esetén is ismert [223]). Amennyiben $16mr_{\min} = 3\pi q$ teljesül, az elsőrendű hatások kioltják egymást és az itt számolt másodrendű korrekciók jutnak vezető szerephez a gyenge lencsézésben. Mitöbb, $16mr_{\min} < 3\pi q$ esetén az elhajlási szög negatívvá válik, azaz szóró-lencsézés következik be. A távoli objektumok ilyen esetben nem lesznek fényesebbek, hanem éppen ellenkezőleg, a lencsézés halványítja őket.

Ezzel szemben a negatív árapálytöltés fokozza a lencsézés ÁRE-ből ismert jellegzetességeit, így magyarázhatja a sötét anyag bizonyos részét is. A Naprendszerbeli megfigyelések nyomán levezetett igen kis (9.109) érték azonban nem valószínűsíti, hogy ez jelentős rész lenne.

9.2.2. Termodinamikai megfontolások

Ebben az alfejezetben az árapálytöltésű fekete lyuk egyes termodinamikai tulajdonságait vizsgálom, valamint a gravitációs hullámok sugárzási hatékonyságára fennálló, Hawking típusú korlát segítségével az árapálytöltés lehetséges értékeit fogom korlátozni, [18] munkánk alapján.

Entrópia és tömeg

A $q > 0$ esetben létező külső horizont, illetve a $q < 0$ esetben létező egyetlen horizont egységesen

$$r_+ = m + \Theta \quad (9.112)$$

módon írható, ahol $\Theta = \sqrt{m^2 - q}$, mely valós bármely $q \leq m^2$ esetén. A fekete lyuk entrópiája, geometrizált egységekben és $k_B = 1/\pi$ választás mellett

$$S = \frac{A}{4\pi} = r_+^2 = (m + \Theta)^2. \quad (9.113)$$

Az entrópia növekszik a tömeggel (9.7 ábra), azonban csökken a q növekedtével (q előjelétől függetlenül), egészen addig, míg $S = m^2$ bekövetkezik és a fekete lyuk eléri az $A = 4\pi m^2$ minimális horizont felszínét, a $q = m^2$ extrémális limitben (9.8) ábra. A q további növekedésével a horizont felszín azért nem csökken tovább, mert $q > m^2$ esetén a (9.70) ívelemnégyzet csupasz szingularitást ír le.

Az árapálytöltésű fekete lyuk tömege kifejezhető az entrópiával és árapálytöltéssel is:

$$m = \frac{\sqrt{S}}{2} \left(1 + \frac{q}{S} \right). \quad (9.114)$$

A termodinamika első főtétele alapján

$$dm = TdS + \psi dq, \quad (9.115)$$

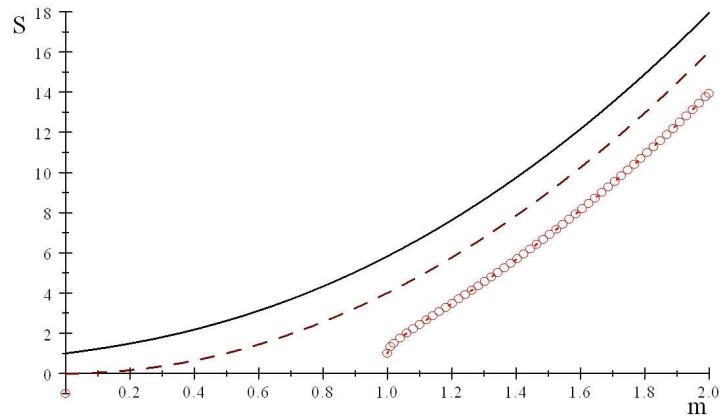
ahol

$$\psi = \frac{\partial m}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{S}} \quad (9.116)$$

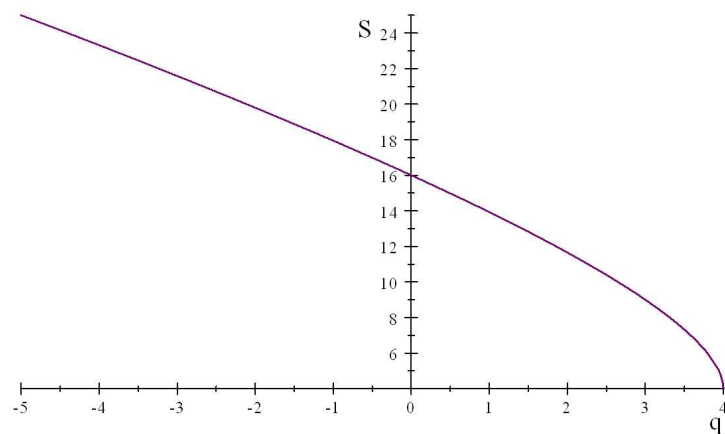
az árapálytöltéshez tartozó potenciál.

Az entrópia függése a fekete lyuk paramétereitől azt mutatja, hogy a termodinamika második törvényének teljesüléséhez valamely klasszikus kvázi-stacionárius folyamat során a tömegnek vagy állandónak kell maradnia, vagy lassan növekednie⁵. Ez történik például az akkréciós folyamatok során. Hasonló érveléssel, az 5D geometria kvázi-stacionárius fejlődése csakis olyan lehet, hogy az árapálytöltés megmaradjon, vagy csökkenjen.

⁵Elhanyagoljuk a Hawking sugárzást, mely amúgy is csak mikroszkópikus fekete lyukak esetén jelentős.



9.7. ábra. Az entrópia növekszik a tömeggel. Az ábra $q = -1$ negatív árapálytöltésű fekete lyuk (folytonos vonal), $q = 0$ Schwarzschild fekete lyuk (szaggatott vonal) és $q = 1$ pozitív árapálytöltésű fekete lyuk (pontosított vonal) entrópia-tömeg függését szemlélteti. Utóbbi esetben az entrópia nem értelmezett az extrémális limitnél kisebb $m < \sqrt{q}$ tömegekre [18].



9.8. ábra. Az entrópia árapálytöltéstől való függése. Az entrópia csökken, ha q növekszik. Az ábra $m = 2$ -re készült [18].

Hawking hőmérséklet és hőkapacitás

A fekete lyuk Hawking hőmérséklete definíció szerint

$$T(m, q) = \partial_S m = \frac{1}{\partial_m S} = \frac{\Theta}{2(m + \Theta)^2} . \quad (9.117)$$

Az utolsó egyenlőségénél a termodinamika első főtételét használtuk fel. Ugyanezt a $T(m, q)$ kifejezést kapjuk akkor is, ha a gömbszimmetrikus Killing horizont felületi gravitációjából [224] származtatjuk.

A $T(m, q)$ bármely $q < 0$ esetén q -val növekszik egészen a $q = 0$ értéknél beálló $T = 1/(8m)$ értékig, azután csökkenni kezd a $q > 0$ növekedésével egészen a $T = 0$ értékig, mely az extrémális limitet ($q = m^2$) jellemzi. Tehát az entrópia minimuma $T = 0$ -nál van, valamint adott tömeg esetén a legnagyobb hőmérsékletű fekete lyuk $q = 0$ esetén áll elő, azaz a Schwarzschild fekete lyuk hőmérséklete a legnagyobb.

A fekete lyuk hőkapacitása konstans q esetén

$$C_q = \frac{\partial m}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1} = T \left(\frac{\partial^2 m}{\partial S^2} \right)^{-1} = \frac{-2S(S - q)}{S - 3q} . \quad (9.118)$$

Megfigyelhető, hogy ez a kifejezés divergál $S = 3q$, azaz $q = 3m^2/4$ esetén. A viselkedés reguláris a teljes $q < 0$ tartományban (ahol $-\infty < C_q < 0$). Az (m, q) koordinátákban kifejezett hőkapacitás

$$C_q = 2\Theta \frac{(m + \Theta)^2}{m - 2\Theta} . \quad (9.119)$$

A 9.9 mutatja a hőkapacitás Θ -függését.

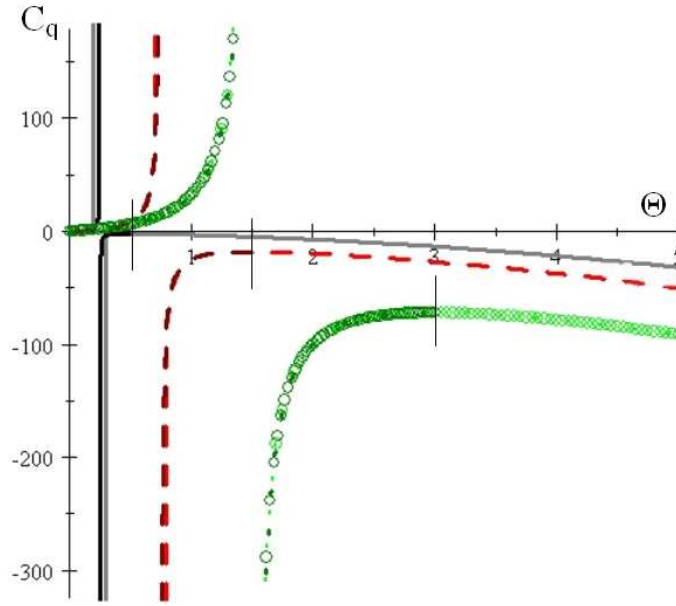
Állandó árapálytöltés mellett a hőkapacitás első deriváltja

$$\frac{dC_q}{d\Theta} = \frac{2(m^2 - \Theta^2)(m + 4\Theta)}{(m - 2\Theta)^2} \quad (9.120)$$

a $\Theta = m/2$, azaz $q = 3m^2/4$ értékeknél szintén szinguláris. A Schwarzschild konfiguráció ($\Theta = m$) esetén a hőkapacitásnak lokális maximuma van (ez negatív érték), mint ahogyan az a (9.120) összefüggésből és a 9.9 ábrából is leolvasható.

A negatív hőkapacitás termodinamikai interpretációja a következő. A fekete lyuk nem lehet stabil egyensúlyban egy $T = T_{BH}(m, q)$ hőmérsékleten található végtelen hőtartállyal. Valóban, egy kis termikus fluktuáció hőt vihet a fekete lyukba, ez viszont azáltal hidegebbé válik, így ez tovább növeli a hőtranszfer hatásfokát. Ezt a tipikus viselkedést mutatja a Schwarzschild fekete lyuk is, mely instabil a Hawking sugárzással szemben; stabilá csupán egy véges térfogatú hőtartállyal való termikus kontaktus tehetné. Mivel az Univerzum végtelen hőtartálynak felel meg, melynek a kozmikus háttérsugárzás adja meg a hőmérsékletét, a fenti megfontolások a primordiális vagy extrémálisokhoz igen közeli (azaz igen alacsony hőmérsékletű) fekete lyukak stabilitásában játszanak jelentős szerepet. A $q > 3m^2/4$ árapálytöltésű közel extrémális fekete lyukak hőkapacitása viszont pozitív, így stabil egyensúlyban lehetnek egy végtelen hőtartállyal $T = T_{BH}$ hőmérsékleten.

Végül megjegyezzük, hogy a paramétertér nulla mértékű részén (a $q = 3m^2/4$ Davies pontban) divergáló hőkapacitás nem jelent fázisátalakulást a kérdéses pontban. Ezt a [18]



9.9. ábra. A C_q hőkapacitás, mint a Θ függvénye $m = 0.5$ (folytonos görbe), $m = 1.5$ (szaggatott görbe) és $m = 3$ (pontozott görbe). A hőkapacitás az összes esetben eltűnik extrémális limitben (amikor $\Theta = 0$), valamint divergál $\Theta = m/2$ (azaz $q = 3m^2/4$, azaz $S = 3q$) esetén. A $\Theta = m$ Schwarzschild limit eléréséig (ezt függőleges szakasz jelöli a görbéken) az ábra egyaránt vonatkozik az árapálytöltésű brán fekete lyukra és az ÁRE $Q = \sqrt{q}$ elektromos töltésű Reissner-Norström fekete lyukra. A görbék $\Theta > m$ (azaz $q < 0$) tartományai kizárólag az árapálytöltésű fekete lyukat jellemzik [18].

munkánkban mind Poincaré stabilitás analízissel, mind az ún. Ruppeiner termodinamikai metrika regularitásával bizonyítottuk. Ez a tulajdonság az ÁRE Reissner-Nordström és Kerr fekete lyukainak stabilitásához hasonló, melyet a hőkapacitás végtelen értékek mellett bekövetkező előjelváltásakor (a Davies pontban) bebizonyítottak [225].

Az árapálytöltésű fekete lyukak gravitációs sugárzásának Hawking korlátja

Hawking levezetett az összeolvadó fekete lyuk kettős tömegének gravitációs sugárzássá való átalakulására, pontosabban a gravitációs sugárzás

$$\eta = 1 - \frac{m_f}{m_1 + m_2} \quad (9.121)$$

hatékonyságára egy fontos korlátot [226]. Itt $m_{1,2}$ a két fekete lyuk tömege, m_f pedig a végső tömeg. Azonos tömegű nem forgó fekete lyukak hatékonyságának felső korlátja eszerint $1 - 2^{-1/2} = 29.3\%$. A forgó fekete lyukak esetén ez a felső korlát 50%. Az érvelés a termodinamika második főtétele alapszik, mely szerint $S_f \geq S_1 + S_2$.

Az árapálytöltésű fekete lyuk (9.113) entrópiájából indulva ki, hasonló megfontolással azt kapjuk, hogy $(m_f + \Theta_f)^2 \geq (m_1 + \Theta_1)^2 + (m_2 + \Theta_2)^2$, azaz

$$m_f \geq \frac{m_1^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{q_1}{m_1^2}}\right)^2 + m_2^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{q_2}{m_2^2}}\right)^2 + q_f}{2 \left[m_1^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{q_1}{m_1^2}}\right)^2 + m_2^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{q_2}{m_2^2}}\right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (9.122)$$

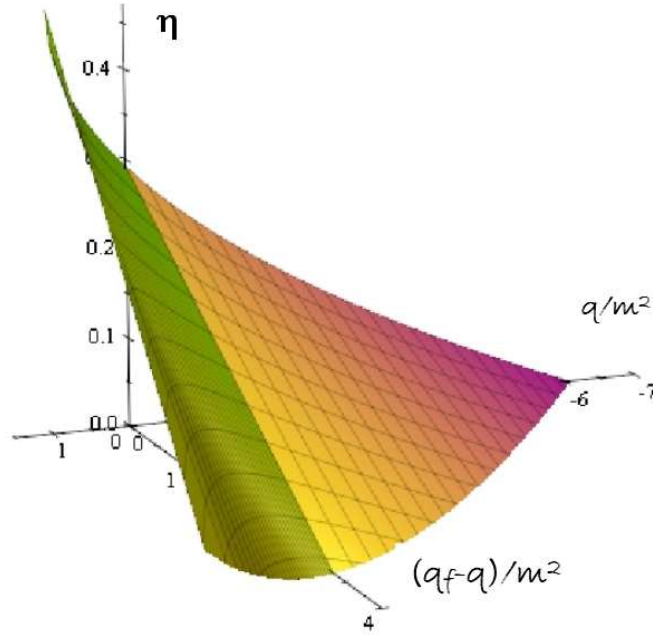
Azonos $m_2 = m_1 \equiv m$ tömegű és $q_1 = q_2 \equiv q < q_f$ árapálytöltésű (az árapálytöltés extenzív paraméter) fekete lyuk kettős esetén a határfok

$$\eta \leq 1 - \frac{2 + 2\sqrt{1 - \frac{q}{m^2}} - \frac{q}{2m^2} + \frac{q_f - q}{2m^2}}{2^{3/2} \left[2 + 2\sqrt{1 - \frac{q}{m^2}} - \frac{q}{m^2} \right]^{1/2}}. \quad (9.123)$$

A határfok-korlátot a 9.10 ábra szemlélteti, a $q/m^2 \in (-\infty, 1]$ és $(q_f - q)/m^2 > 0$ paraméterek függvényében. Az árapálytöltésre vonatkozóan ebből két fizikai korlátozás adódik a paraméterekre (a q/m^2 arány pl. alulról korlátozott, a korlát értéke $\in [-6, 0]$). A korlátozások annak köszönhetők, hogy a határfok nem lehet negatív szám, azaz nem hagyhatja el a rendszert több energia gravitációs hullám formájában, mint ami kezdetben rendelkezésre állt nyugalmi energiák összegeként. Tudomásunk szerint ez jelenti az irodalomban fellelhető első elméleti megfontolásokból levezetett korlátozást az árapálytöltés értéktartományára.

9.3. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a korábban kidolgozott általános formalizmus asztrofizikai alkalmazásait vizsgáltam. Elsőként instabil csillagmegoldásokat vizsgáltam, az ÁRE Oppenheimer-Snyder kollapszusához hasonló konfigurációt. Megmutattam, hogy az illesztési feltételek



9.10. ábra. A tömeg energiába konvertálásának hatékonyságára kapott felső korlát egyenlő tömegű és árapálytöltésű fekete lyukak összeolvadásakor. Az ábra szerint mind a q/m^2 , mind a végső árapálytöltés értéke korlátos lesz [18].

a bránon kizárják a nulla nyomású (por jellegű) folyadékot a Schwarzschild téridő lehetséges forrásai közül és megadtam annak az ideális folyadéknak a sűrűségét és nyomását, mely a Schwarzschild külsővel illeszthető a bránon. A kollapszus kezdetén a nyomás elhanyagolhatóan kis negatív érték, a kollapszus végére azonban jelentőssé válik és a folyadék teljesíti a sötét energia feltételt. Bebizonyítottam, hogy ez az összes releváns esetben a horizont alatt következik be. Az összehúzódás ennek ellenére nem fejeződik be a szingularitás eléréséig, mivel a négyzetes forrástag továbbra is vonzó jellegű forrást jelent és nagy energiákon dominál.

Kozmológiai inhomogenitásokat az ÁRE-hez hasonlóan Swiss-cheese modell keretén belül lehet vizsgálni (a FLRW téridő a belőle kivágott, Schwarzschild gömbökkel helyettesített tartományokat tartalmaz). Megmutattam, hogy az ÁRE Swiss-cheese (Einstein-Straus) modellel szemben, ahol a kozmológiai tartományokat por tölti ki, a bránon nyomással is rendelkező folyadék játszhatja ugyanezt a szerepet. A FLRW brán tartományok AdS5 téridőben vannak, a Schwarzschild tartományokat fekete húrként (szivarként) terjesztjük ki az ötödik dimenzióba. A brán egy örökösen lassulva táguló kozmológiát modellez. A kozmikus folyadéknak nagy energiákon nagy negatív nyomása van, teljesíti a sötét energia feltételt, azonban a forrástagok összessége effektív porként viselkedik, így a tágulás nagy energiákon is lassuló jellegű. Aszimptotikusan a nyomás nullára csökken, a késő kozmológiai korszakban a folyadék porként viselkedik. A FLRW és üres tartományok kozmológiai állandóinak jelentős eltérése esetén új típusú, kizárólag a brán világokban megjelenő kozmológiai szingularitást találtam, az ún. nyomás szingularitást.

A mindkét esetben megjelenő negatív nyomások (feszültségek) formailag az energia-

impulzus tenzorban nemlineáris forrástagok jelenlétének tulajdoníthatók, míg fizikailag a brán visszahatásaként foghatók fel az öt erő erős összehúzóási illetve tágulási hatásokkal szemben. Fenomenológikusan ezt mindaddig nem lehet modellezni, míg a vékony brán közelítést használjuk, mely szerint a brán egy matematikai hiperfelület, egyetlen paraméterrel, a brán-feszültséggel. Eredményeim felvetik a vastag brán modellek [227] bevezetésének szükségességét.

A Weyl görbület elektromos részének jelenlétében az ún. árapálytöltésű fekete lyuk a legegyszerűbb (gömbszimmetrikus, sztatikus) brán fekete lyuk megoldás. Fontossága ellenére még aránylag keveset lehet tudni erről a fekete lyukról. Megvizsgáltam a fotonok mozgását a tömeg és árapálytöltéssel összefüggő két kis paraméterben másodrendig, valamint termodinamikai megfontolásokból korlátot állapítottam meg az árapálytöltés értékére.

10. fejezet

Brán-elméletben elért eredmények

Az alább felsorolt, brán-elméletben elért eredmények egyben a témával kapcsolatos tézispontok is:

1. Megadtam a brán-elméletben érvényes gravitációs dinamikát általános alakban, a $3+1$ dimenziós hiperfelületen (a bránon) élő megfigyelő szemszögéből, brán-kovariáns tenzori, vektori és skalár egyenletek formájában. Ezt a $4+1$ dimenziós gravitáció Einstein egyenleteinek bránra történő vetítésével értem el, figyelembe véve, hogy a $3+1$ dimenziós bránon fejlődő standard modell anyagi mezők a Lanczos egyenlet értelmében ugrást okoznak a brán külső görbületében. Levezettem a gravitációs dinamika tenzori szabadsági fokainak bránon történő fejlődését meghatározó effektív Einstein egyenletet az irodalomban korábban létező alakjánál jóval általánosabb formában, megengedve
 - (a) a brán beágyazásának tetszőleges, aszimmetrikus jellegét [8], és
 - (b) a brán feszültségének változását [9].

Megmutattam, hogy a gravitációs dinamika a Codazzi és a kétszer kontrahált Gauss egyenletekkel válik teljessé.

2. Brán-kozmológiai kutatásaim során
 - (a) Levezettem az 5-dimenziós elektromosan töltött Vaidya-Anti de Sitter (VAdS5) téridőbe ágyazott Friedmann brán gravitációs dinamikáját általánosított Friedmann és általánosított Raychaudhuri, valamint kiegészítő egyenletek formájában, az irodalomban ismert legáltalánosabb esetben [9]. A formalizmus lehetővé teszi a brán két oldalán különböző töltés- és tömegfüggvényeknek, kozmológiai állandóknak és sugárzásnak a figyelembe vételét; belső vagy külső VAdS5 téridőtartományoknak a brán két oldalához való illesztését; valamint változó brán-feszültség hatásainak tanulmányozását.
 - (b) A gravitonokat kisugárzó bránra alkalmazva a formalizmust, legfontosabb következményként azt kaptam, hogy mind az 5-dimenziós kozmológiai állandóknak, mind az 5-dimenziós tömegfüggvényeknek a brán két oldalán vett aszimmetriája csökkenti

a sötét sugárzás késői korszakbeli értékét, így a kozmológiai fejlődés nukleoszintézisből származtatott kényszerei könnyebben teljesíthetők, mint a szimmetrikus esetben [11].

(c) Bebizonyítottam, hogy a véges $a_{\min}$ skálafaktornál keletkező, majd az Eötvös-törvény szerint fejlődő brán-feszültség kompatibilis az univerzum késő korszakbeli ismert fejlődésével: a lassuló tágulást gyorsuló szakasz követi [10].

(d) A sztatikus Friedmann brán (Einstein brán)-ról megmutattam, hogy az őt magába foglaló 5-dimenziós téridő az irodalomban létező korábbi bizonyítással ellentétben nem a Schwarzschild-Anti de Sitter (SAdS5), hanem egy másik, a SAdS5 téridő horizontjával rokonságot mutató 5-dimenziós téridő [12]. Levezettem az Einstein brán homogén párját [13]. A két új megoldás az Einstein egyenletek G_7 szimmetriacsoporttal rendelkező igen kevés megoldásának családját bővíti, melyben korábban egyedül bizonyos síkhullámok megoldásokat ismertek.

3. Brán-asztrofizikai kutatásaim során

(a) Bebizonyítottam, hogy ideális folyadékból álló, gömbszimmetrikus csillagot akkor lehetséges külső Schwarzschild-téridővel illeszteni, ha a folyadéknak nyomása is van [15]. A negatív nyomás nagysága (a folyadék feszültsége) a gravitációs kollapszus során korlátlanul növekszik, és végül sötét energiává változtatja a brán csillagot [14], azonban ez mind a 6 naptömegnél nehezebb asztrofizikai, mind a szupernehéz fekete lyukak esetén jóval a horizont alatt következik be. A negatív nyomás ellenére a szingularitás azért alakul ki, mert nagy sűrűségeken az energia-impulzusban négyzetes forrástagok dominánssá válnak, és ezek vonzó hatást képviselnek.

(b) Megvizsgáltam az ötödik dimenzióba fekete húrként kiterjeszthető brán Schwarzschild fekete lyuk kozmológiai bránba való illeszthetőségét és kidolgoztam a Swiss-cheese brán modellt [16]. Ezzel kapcsolatosan új típusú kozmológiai szingularitást találtam (nyomás-szingularitás), melyben a skálafaktor és összes időderiváltja reguláris. Nagy energiákon a Swiss-cheese modell forrása sötét energiaként viselkedik, de a négyzetes forrástagok dominanciája miatt az effektív forrás ilyenkor is por.

(c) Tárgyaltam az árapálytöltésű brán fekete lyuk környezetében mozgó fotonok pályáit gyenge tér közelítésben, a kis paraméterekben másodrendben [17]. Kijavítottam az irodalomban korábban fellelhető hibás eredményeket.

(d) Vizsgáltam az árapálytöltésű fekete lyuk termodinamikai jellegzetességeit. A gravitációs hullámok sugárzási hatékonyságára vonatkozó termodinamikai korlát segítségével korlátoztam az árapálytöltés értéktartományát [18].

Irodalomjegyzék

- [1] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **81**, 084025 (2010). Az (57) egyenletben ν hatványa helyesen $3 - 2i$.
- [2] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **82**, 104031 (2010).
- [3] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **61**, 024035 (1999).
- [4] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **62**, 024007 (2000).
- [5] L. Á. Gergely, Z. Keresztes, *Phys. Rev. D* **67**, 024020 (2003).
- [6] L. Á. Gergely, P. L. Biermann, *Astrophys. J.* **697**, 1621 (2009).
- [7] L. Á. Gergely, P. L. Biermann, L. I. Caramete, *Class. Quantum Grav.* **27**, 194009 (2010).
- [8] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **68**, 124011 (2003). [Hibajegyzék: A (37)-es egyenletben az ab összegző-indexeket cd -re, a (67)-es egyenlet baloldalán a cd indexeket ab -re kell cserélni. A (62)-es egyenletben $\dot{v}$ -ot $\dot{t}$ -ra kell cserélni. A (82), (83), (85) és (86) egyenletekben $\overline{q^2}$ helyett $\tilde{q}^2$ írendő. A (68) és (99) egyenletek utolsó tagjába q helyére $\tilde{\kappa}q$ írendő. A (102). egyenlet utolsó tagjának nevezőjéből a 2-es osztó elhagyandó. A (103). egyenlet előtti mondat helyesen "The Raychaudhuri equation acquires two new terms on the right hand side."] Konverzió az értekezésben használt jelölésekre: $[l, \tilde{T}_{ab}, \tilde{\Pi}_{ab}, \tilde{\kappa}q] \rightarrow [y, -\tilde{\Lambda}\tilde{g}_{ab} + \tilde{T}_{ab} + \tau_{ab}\delta(y), -\tilde{\Lambda}\tilde{g}_{ab} + \tilde{T}_{ab}, q]$. Míg ebben a cikkben $\tilde{T}_{ab}$ a teljes 5D energia-impulzus tenzor volt, az értekezésben csupán az 5D mezők energia-impulzus tenzorát jelöli, az 5D kozmológiai állandó és a disztribúcionális brán-járulék nélkül.
- [9] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **78**, 084006 (2008). [Hibajegyzék: A (30)-as egyenletben a felső korlát $1/3$, mivel az egyenlet feletti szövegben szereplő egyenlőtlenség helyesen $|\Delta\Lambda| < 2|\overline{\Lambda}|$. A (35). egyenlet utolsó tagjának nevezőjében helyesen a^8 szerepel.] Konverzió az értekezésben használt jelölésekre: $[\kappa_5, \Lambda, t, \psi] \rightarrow [\tilde{\kappa}, \tilde{\kappa}^2\tilde{\Lambda}, \tau, 3\beta\dot{v}^2/\tilde{\kappa}^2a^3]$.
- [10] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **79**, 086007 (2009).
- [11] L. Á. Gergely, E. Leeper, R. Maartens, *Phys. Rev. D* **70**, 104025 (2004).

- [12] L. Á. Gergely, R. Maartens, *Class. Quantum Grav.* **19**, 213 (2002). Konverzió az értekezésben használt jelölésekre: $[\epsilon, K, \mu, H, a_{AB} \text{ és } \mu_{\nu} \text{ indexek}] \rightarrow [s, k, 2m, \mathcal{H}_E, \text{egységesen } a_b \text{ indexek}]$.
- [13] L. Á. Gergely, *Class. Quantum Grav.* **21**, 935 (2004). Konverzió az értekezésben használt jelölésekre: $[\epsilon, \mathcal{H}, a_{AB} \text{ és } \mu_{\nu} \text{ indexek}] \rightarrow [s, \mathcal{H}_h, \text{egységesen } a_b \text{ indexek}]$.
- [14] L. Á. Gergely, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP **07** (02), 027 (2007).
- [15] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **71**, 084017 (2005). Erratum: **72**, 069902-1 (2005).
- [16] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **74**, 024002 (2006).
- [17] L. Á. Gergely, Z. Keresztes, M. Dwornik, *Class. Quantum Grav.* **26**, 145002 (2009).
- [18] L. Á. Gergely, N. Pidokrajt, S. Winitzki, *Eur. Phys. J. C* **71**, 1569 (2011).
- [19] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **59**, 104014 (1999).
- [20] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **58**, 084030 (1998).
- [21] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **65**, 127503 (2002).
- [22] L. Á. Gergely, *Class. Quantum Grav.* **19**, 2515 (2002).
- [23] M. Bradley, G. Fodor, L. Á. Gergely, M. Marklund, Z. Perjés, *Class. Quantum Grav.* **16**, 1667 (1999).
- [24] L. Á. Gergely, *J. Math. Phys.* **40**, 4177 (1999).
- [25] C. S. J. Pun, L. Á. Gergely, M. K. Mak, Z. Kovács, G. M. Szabó, T. Harko, *Phys. Rev. D* **77**, 063528 (2008).
- [26] Z. Keresztes, L. Á. Gergely, V. Gorini, U. Moschella, A. Z. Kamenshchik, *Phys. Rev. D* **79**, 083504 (2009).
- [27] Z. Keresztes, L. Á. Gergely, A. Z. Kamenshchik, V. Gorini, D. Polarski, *Phys. Rev. D* **82**, 123534 (2010).
- [28] L. Á. Gergely, *Annals of Physics* **298**, 394 (2002).
- [29] L. Á. Gergely, *Class. Quantum Grav.* **17**, 1949 (2000).
- [30] L. Á. Gergely, M. McKain, *Class. Quantum Grav.* **17**, 1963 (2000).
- [31] Z. Horváth, Z. Kovács, L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **74**, 084034 (2006).
- [32] L. Á. Gergely, Z. Kovács, *Phys. Rev. D* **72**, 064015 (2005).
- [33] Z. Kovács, L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **77**, 024003 (2008).

- [34] L. Á. Gergely, R. Maartens, *Phys. Rev. D* **71**, 024032 (2005).
- [35] R. S. Somerville, T. S. Kolatt, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **305**, 1 (1999); E. Berti, M. Volonteri, *Astrophys. J.* **684**, 822 (2008); Z. Lippai, Zs Frei, Z Haiman, *Astrophys. J.* **701**, 360 (2009).
- [36] S. A. Farrell, N. A. Webb, D. Barret, O. Godet, J. M. Rodrigues, *Nature* **460**, 73 (2009).
- [37] H. Baumgardt, J. Makino, P. Hut, *Astrophys. J.* **620**, 238 (2005).
- [38] M. Mezcua, A. P. Lobanov, *Compact radio emission in Ultra Luminous X-ray sources*, E-print: arXiv:1011.0946, Proceedings of the conference "Ultra-Luminous X-ray sources and Middle Weight Black Holes", *Astronomische Nachrichten* (megjelenés alatt) (2011).
- [39] D. Merritt, T. Alexander, S. Mikkola, C. M. Will, *Phys. Rev. D* **81**, 062002 (2010).
- [40] B. M. Peterson, *New Astron. Rev.* **52**, 240 (2008); A. C. Fabian et al., *Nature* **459**, 540 (2009); W. Kollatschny, *Astron. Astrophys.* **412**, L61 (2003).
- [41] B. Aschenbach, N. Grosso, D. Porquet, P. Predehl, *Astron. Astrophys.* **417**, 71 (2004); A. E. Broderick, A. Loeb, *Monthly Not. Royal Astron. Soc.* **363**, 353 (2005); S. S. Doeleman et al., *Nature* **455**, 78 (2008); A. E. Broderick, A. Loeb, *The Astrophysical Journal*, **697**, 1164 (2009); A. E. Broderick, A. Loeb, R. Narayan, *The Astrophysical Journal*, **701**, 1357 (2009).
- [42] D. Garofalo, *Astrophys. J.* **699**, 400 (2009);
- [43] T. P. Krichbaum et al., *J. Phys.: Conf. Ser.* **54**, 328 (2006); T. P. Krichbaum et al., *ASP Conf. Ser.* **386**, 186 (2008); J. C. McKinney, R. D. Blandford, *Monthly Not. Royal Astron. Soc.* **394**, L126 (2009).
- [44] J. P. Leahy, T. W. B. Muxlow, P. W. Stephens, *Monthly Not. Royal Astron. Soc.* **239**, 401 (1989); C. L. Carilli, R. A. Perley, J. W. Dreher, J. P. Leahy, *Astrophys. J.* **383**, 554 (1991); A. Celotti, A. C. Fabian, *Monthly Not. Royal Astron. Soc.* **264**, 228 (1993); W. J. Duschl, H. Lesch, *Astron. Astrophys.* **286**, 431 (1994).
- [45] P. L. Biermann, R. G. Strom, H. Falcke, *Astron. Astrophys.* **302**, 429 (1995); Gopal-Krishna, P. L. Biermann, P. J. Wiita, *Astrophys. J.* **603**, L9 (2004).
- [46] H. Falcke, P. L. Biermann, *Astron. Astrophys.* **293**, 665 (1995); H. Falcke, M. A. Malkan, P. L. Biermann, *Astron. Astrophys.* **298**, 375 (1995).
- [47] The LIGO Collaboration, *Phys. Rev. D* **80**, 047101 (2009); Anand S. Sengupta for the LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration, *J. Phys.: Conf. Ser.* **228**, 012002 (2010).

- [48] K. G. Arun, S. Babak, E. Berti, N. Cornish, C. Cutler, J. Gair, S. A. Hughes, B. R. Iyer, R. N. Lang, I. Mandel, E. K. Porter, B. S. Sathyaprakash, S. Sinha, A. M. Sintes, M. Trias, C. Van Den Broeck, M. Volonteri, *Class. Quantum Grav.* **26**, 094027 (2009); R. N. Lang, S. A. Hughes, *Class. Quantum Grav.* **26**, 094035 (2009).
- [49] A. Sesana, J. Gair, I. Mandel, A. Vecchio, *Astrophys. J. Lett.* **698**, L129 (2009); J. R. Gair, I. Mandel, M. C. Miller, M. Volonteri, *Gen. Rel. Gravit.* **43**, 485 (2011).
- [50] C. M. Will, A. G. Wiseman, *Phys. Rev. D* **54**, 4813 (1996).
- [51] T. Damour, B. R. Iyer, B. S. Sathyaprakash, *Phys. Rev. D* **57**, 885 (1998).
- [52] M. Boyle, A. Buonanno, L. E. Kidder, A. H. Mroué, Y. Pan, H. P. Pfeiffer, M. A. Scheel, *Phys. Rev. D* **78**, 104020 (2008); A. H. Mroué, L. E. Kidder, S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. D* **78**, 044004 (2008).
- [53] E. K. Porter, *Phys. Rev. D* **76**, 104002 (2007).
- [54] Y. Pan, A. Buonanno, L. T. Buchman, T. Chu, L. E. Kidder, H. P. Pfeiffer, M. A. Scheel, *Phys. Rev. D* **81**, 084041 (2010).
- [55] R. Sturani, S. Fischetti, L. Cadonati, G. M. Guidi, J. Healy, D. Shoemaker, A. Viceré, *Complete phenomenological gravitational waveforms from spinning coalescing binaries*, arXiv:1005.0551 (2010).
- [56] E. Berti, V. Cardoso, A. O. Starinets, *Class. Quantum Grav.* **26**, 163001 (2009).
- [57] B. M. Barker, R. F. O'Connell, *Phys. Rev. D* **12**, 329 (1975).
- [58] B. M. Barker, R. F. O'Connell, *Gen. Relativ. Gravit.* **2**, 1428 (1979).
- [59] L. S. Finn, D. F. Chernoff, *Phys. Rev. D* **47**, 2198 (1993).
- [60] A. Buonanno, Y. Chen, M. Vallisneri, *Phys. Rev. D* **67**, 104025 (2003); Erratum-ibid. *D* **74**, 029904 (2006).
- [61] K. G. Arun, A. Buonanno, G. Faye, E. Ochsner, *Phys. Rev. D* **79**, 104023 (2009).
- [62] L. E. Kidder, C. M. Will, A. G. Wiseman, *Phys. Rev. D* **47**, R4183 (1993).
- [63] T. A. Apostolatos, C. Cutler, G. J. Sussman, K. S. Thorne, *Phys. Rev. D* **49**, 6274 (1994).
- [64] L. Á. Gergely, Z. Perjés, M. Vasúth, *Phys. Rev. D* **57**, 3423 (1998).
- [65] L. Á. Gergely, Z. I. Perjés, M. Vasúth, *Phys. Rev. D* **58**, 124001 (1998).

- [66] F. D. Ryan, *Phys. Rev. D* **53**, 3064 (1996); R. Rieth, G. Schäfer, *Class. Quantum Grav.* **14**, 2357 (1997); L. Á. Gergely, Z. Perjés, M. Vasúth, *Phys. Rev. D* **57**, 876 (1998); R. F. O’Connell, *Phys. Rev. Letters* **93**, 081103 (2004); C. M. Will, *Phys. Rev. D* **71**, 084027 (2005); J. Zeng, C. M. Will, *Gen. Rel. Grav.* **39** 1661-1673 (2007); J. Majár, M. Vasúth, *Phys. Rev. D* **77**, 104005 (2008); N. J. Cornish, J. Shapiro Key, *Phys. Rev. D* **82** 044028 (2010).
- [67] L. E. Kidder, *Phys. Rev. D* **52**, 821 (1995).
- [68] T. A. Apostolatos, *Phys. Rev. D* **52**, 605 (1995); T. A. Apostolatos, *Phys. Rev. D* **54**, 2438 (1996); H. Wang, C. M. Will, *Phys. Rev. D* **75**, 064017 (2007); K. G. Arun, A. Buonanno, G. Faye, E. Ochsner, *Phys. Rev. D* **79**, 104023 (2009); J. Majár, *Phys. Rev. D* **80**, 104028 (2009); A. Klein, Ph. Jetzer, *Phys. Rev. D* **81** 124001 (2010).
- [69] B. Mikóczi, M. Vasúth, L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **71**, 124043 (2005).
- [70] E. Poisson, *Phys. Rev. D* **57**, 5287 (1998).
- [71] E. E. Flanagan, T. Hinderer, *Phys. Rev. D* **75**, 124007 (2007); É. Racine, *Phys. Rev. D* **78**, 044021 (2008).
- [72] T. D. Newton, E. P. Wigner, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400 (1949); M. H. L. Pryce, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **195**, 62 (1949).
- [73] Z. Keresztes, B. Mikóczi, L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **72**, 104022 (2005). Az I. táblázat harmadik sorában a $G^2 m^2 \bar{L}^2 / c^2 \mu^2$ és a II. táblázat első sorában a $G \mu \bar{L} / 2c^2 r$ együtthatók helyesen $G m \bar{L}^2 / c^2 \mu^2$ és $G \mu / 2c^2 r$; a (18)-as egyenletben a $(dt/d\chi)_{PN}$ taghoz $\mu / \bar{L}$ szorzó tartozik és a $(dt/d\chi)_{SO}$ előjele felcserélendő.
- [74] G. Faye, L. Blanchet, A. Buonanno, *Phys. Rev. D* **74**, 104033 (2006); L. Blanchet, A. Buonanno, G. Faye, *Phys. Rev. D* **74**, 104034 (2006); Erratum-ibid. **75**, 049903 (2007).
- [75] Th. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer, *Phys. Rev. D* **77**, 064032 (2008); J. Steinhoff, G. Schäfer, S. Hergt, *Phys. Rev. D* **77**, 104018 (2008); Th. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer, *Phys. Rev. D* **78**, 024009 (2008); E. Barausse, É. Racine, A. Buonanno, *Phys. Rev. D* **80**, 104025 (2009); J. Steinhoff, H. Wang, *Phys. Rev. D* **81**, 024022 (2010); X. Wu, Y. Xie, *Phys. Rev. D* **81**, 084045 (2010).
- [76] J. D. Schnittman, A. Buonanno, *Astrophys. J.* **662**, L63 (2007); É. Racine, A. Buonanno, L. Kidder, *Phys. Rev. D* **80**, 044010 (2009); Z. Keresztes, B. Mikóczi, L. Á. Gergely, M. Vasúth, *J. Phys.: Conf. Series* **228**, 012053 (2010).
- [77] J. A. Gonzalez, M. D. Hannam, U. Sperhake, B. Bruggmann, S. Husa, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 231101 (2007); F. Herrmann, I. Hinder, D. Shoemaker, P. Laguna, R. A. Matzner, *Phys. Rev. D* **76**, 084032 (2007); M. Campanelli, C. O. Lousto, Y. Zlochower, D. Merritt, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 231102 (2007); M. Campanelli, C. O.

- Lousto, Y. Zlochower, D. Merritt, *Astrophys. J.* **659**, L5, (2007); S. Dain, C. O. Lousto, Y. Zlochower, *Phys. Rev. D* **78**, 024039 (2008); C. O. Lousto, Y. Zlochower, *Phys. Rev. D* **79**, 064018 (2009).
- [78] F. Herrmann, I. Hinder, D. Shoemaker, P. Laguna, R. A. Matzner, *Astrophys. J.* **661**, 430 (2007); J. D. Schnittman, A. Buonanno, J. R. van Meter, J. G. Baker, W. D. Boggs, J. Centrella, B. J. Kelly, S. T. McWilliams, *Phys. Rev. D* **77**, 044031 (2008).
- [79] L. Rezzolla, E. Barausse, E. Nils Dorband, D. Pollney, C. Reisswig, J. Seiler, S. Husa, *Phys. Rev. D* **78** 044002 (2008); M. C. Washik, J. Healy, F. Herrmann, I. Hinder, D. M. Shoemaker, P. Laguna, R. A. Matzner, *Phys. Rev. Lett.* **101** 061102 (2008); A. Buonanno, L. E. Kidder, L. Lehner, *Phys. Rev. D* **77** 026004 (2008); W. Tichy, P. Marronetti, *Phys. Rev. D* **78**, 081501(R) (2008); E. Barausse, L. Rezzolla, *Astrophys. J. Lett.* **704** L40-L44 (2009); U. Sperhake, V. Cardoso, F. Pretorius, E. Berti, T. Hinderer, N. Yunes, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 131102 (2009); J. Healy, P. Laguna, R. A. Matzner, D. M. Shoemaker, *Phys. Rev. D* **81**, 081501 (2010); E. Barausse, *The importance of precession in modelling the direction of the final spin from a black-hole merger*, E-print: arXiv:0911.1274 (2009); M. Kesden, U. Sperhake, E. Berti, *Phys. Rev. D* **81**, 084054 (2010); C. O. Lousto, H. Nakano, Y. Zlochower and M. Campanelli, *Phys. Rev. D* **81**, 084023 (2010); C. O. Lousto, M. Campanelli, Y. Zlochower, H. Nakano, *Class. Quantum Grav.* **27**, 114006 (2010)
- [80] K. Glampedakis, D. Kennefick, *Phys. Rev. D* **66**, 044002 (2002); J. Levin, G. Perez-Giz, *Phys. Rev. D* **79**, 124013 (2009); G. Perez-Giz, J. Levin, *Phys. Rev. D* **79**, 124014 (2009).
- [81] J. Levin, R. Grossman, *Phys. Rev. D* **79**, 043016 (2009); R. Grossman, J. Levin, *Phys. Rev. D* **79**, 043017 (2009).
- [82] J. Healy, J. Levin, D. Shoemaker, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 131101 (2009).
- [83] J. P. Leahy, A. G. Williams, *Mon. Not. Royal. Astron. Soc.* **210**, 929 (1984).
- [84] Ch. Zier, P. L. Biermann, *Astron. Astroph.* **377**, 23 (2001); D. Merritt, R. Ekers, *Science* **297**, 1310 (2002); F. K. Liu, *Mon. Not. Royal. Astron. Soc.* **347**, 1357 (2004).
- [85] Gopal-Krishna, P. L. Biermann, L. Á. Gergely, P. J. Wiita, *On the origin of X-shaped radio galaxies*, (megjelenés alatt), E-print:arXiv: 1008.0789 [astro-ph.CO] (2010).
- [86] Gopal-Krishna, P. L. Biermann, P. J. Wiita, *Astrophys. J. Letters* **594**, L103 (2003).
- [87] J. P. Leahy, R. A. Perley, *Astron. J* **102**, 537 (1991); A. R. S. Black, S. A. Baum, J. P. Leahy, R. A. Perley, J. M. Riley, P. A. G. Scheuer, *Mon. Not. Royal. Astron. Soc.* **256**, 186 (1992).

- [88] W. G. Laarakkers, E. Poisson, *Astrophys. J.* **512**, 282 (1999).
- [89] K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 299 (1980).
- [90] B. Mikóczi, *Kompakt kettős rendszerek poszt-newtoni fejlődése*, Ph. D. értekezés, Szegedi Tudományegyetem (2010).
- [91] L. Á. Gergely, Z. I. Perjés, M. Vasúth, *Astrophys. J. Suppl. Series* **126**, 79 (2000).
- [92] L. Á. Gergely, Z. I. Perjés, M. Vasúth, *Astrophys. J. Suppl. Series* **167**, 286 (2006).
- [93] P. C. Peters, S. Mathews, *Phys. Rev.* **131**, 435 (1963).
- [94] LALSuite (LIGO Scientific Collaboration Algorithm Library Suite) repository's SpinQuadTaylor program, see: http://www.lsc-group.phys.uwm.edu/cgit/lalsuite/tree/lalinspiral/src/LALSQTPNWaveform.c?h=spin_quad_taylor
- [95] J. M. Bardeen, *Nature* **226**, 64 (1970).
- [96] D. N. Page, K. S. Thorne, *Astrophys. J.* **191**, 499 (1974).
- [97] M. Abramowicz, M. Jaroszynski, M. Sikora, *Astron. Astrophys.*, **63**, 221 (1978).
- [98] R. D. Blandford, R. L. Znajek, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **179**, 433 (1977); M. Camenzind, *Astron. & Astroph.* **156**, 137 (1986); M. Camenzind, *Astron. & Astroph.* **162**, 32 (1986); M. Camenzind, *Astron. & Astroph.* **184**, 341 (1987); M. Takahashi, S. Nitta, Y. Tamematsu, A. Tomimatsu, *Astrophys. J.* **363**, 206 (1990); S. Y. Nitta, M. Takahashi, A. Tomimatsu, *Phys. Rev. D* **44**, 2295 (1991); K. Hirotani, M. Takahashi, S. Nitta, A. Tomimatsu, *Astrophys. J.* **386**, 455 (1992); H. Falcke, P. L. Biermann, *Astron. & Astroph.* **293**, 665 (1995); L. X. Li, *Astrophys. J.* **533**, L115 (2000); D. X. Wang, K. Xiao, W. H. Lei, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **335**, 655 (2002); D. A. Uzdensky, *Astrophys. J.* **620**, 889 (2005); Z. Kovács, P. L. Biermann, L. Á. Gergely, *Maximal spin and energy conversion efficiency in a symbiotic system of black hole, disk and jet*, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* (megjelenés alatt), E-print: arXiv:1007.4279 [astro-ph.CO] (2010).
- [99] H. Rottmann, PhD thesis: "Jet-Reorientation in X-shaped Radio Galaxies", Bonn Univ., 2001: (http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online/math_nat_fak/2001/rottmann_helge/index.htm)
- [100] M. Campanelli, C. O. Lousto, Y. Zlochower, B. Krishnan, D. Merritt, *Phys. Rev. D* **75**, 064030 (2007); M. Campanelli, C. O. Lousto, Y. Zlochower, D. Merritt, *Astrophys. J.* **659**, L5 (2007).
- [101] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press (1987).
- [102] Ch. Zier, P. L. Biermann, *Astron. & Astroph.* **377**, 23 (2001).

- [103] L. Ferrarese, P. Côté, in "Black Holes from Stars to Galaxies – Across the Range of Masses", *Proceedings IAU Symposium* **238**, 261 (2006).
- [104] L. I. Caramete, P. L. Biermann, *Astron. Astroph.* **521**, A55 (2010).
- [105] W. H. Press, P. Schechter, *Astrophys. J.* **187**, 425 (1974).
- [106] A. S. Wilson, E. J. M. Colbert, *Astrophys. J.* **438**, 62 (1995).
- [107] T. R. Lauer et al., *Astrophys. J.* **662**, 808L (2007).
- [108] L. Ferrarese et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **164**, 334 (2006).
- [109] J. Magorrian et al., *Astronomical J.* **115**, 2285 (1998).
- [110] A. J. Benson, D. Džanović, C. S. Frenk, R. Sharples, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **379**, 841 (2007).
- [111] G. Gilmore et al., *Nucl. Phys. B* **173**, 15 (2007).
- [112] A. Klypin, H.-S. Zhao, R. S. Somerville, *Astrophys. J.* **573**, 597 (2002).
- [113] C. O. Lousto, Y. Zlochower, *Phys. Rev. D* **79**, 064018 (2009).
- [114] J. A. Gonzalez, U. Sperhake, B. Bruggmann, *Phys. Rev. D* **79**, 124006 (2009); C. O. Lousto, H. Nakano, Y. Zlochower, M. Campanelli, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 211101 (2010); C. O. Lousto, H. Nakano, Y. Zlochower, M. Campanelli, *Phys. Rev. D* **82**, 104057 (2010); C. O. Lousto, Y. Zlochower, *Extreme-Mass-Ratio-Black-Hole-Binary Evolutions with Numerical Relativity*, arXiv:1009.0292 (2010).
- [115] P. C. Peters, *Phys. Rev.* **136**, B1224 (1964).
- [116] Gopal-Krishna, P. J. Wiita, S. Joshi, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **380**, 703 (2007).
- [117] J. P. Leahy, P. Parma, *Multiple outbursts in radio galaxies*, Extragalactic Radio Sources: From Beams to Jets, J. Roland, H. Sol, G. Pelletier (szerkesztők), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 307 (1992).
- [118] B. L. Fanaroff, J. M. Riley, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **167**, 31P (1974).
- [119] R. H. Becker, R. L. White, D. J. Helfand, *Astrophys. J.* **450**, 559 (1995).
- [120] C. C. Cheung, *Astron. J.* **133**, 2097 (2007).
- [121] C. C. Cheung et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **181**, 548 (2009).
- [122] L. Saripalli, R. Subrahmanyam, *Astrophys. J.* **695**, 156 (2009).
- [123] H. Landt, C. C. Cheung, S. E. Healey, *The optical spectra of X-shaped radio galaxies*, E-print:arXiv:1006.2179 (2010).

- [124] A. Capetti et al., *Astron. Astrophys.* **394**, 39 (2002).
- [125] E. Hodges-Kluck, C. S. Reynolds, C. C. Cheung, M. C. Miller, *Astrophys. J.* **710**, 1205 (2010).
- [126] R. A. Battye, I. W. A. Browne, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **399**, 1888 (2009).
- [127] M. Mezcuca, A. P. Lobanov, V. H. Chavushyan, J. León-Tavares, *Black hole masses and starbursts in X-shaped radio sources*, E-print: arXiv:1008.0977, *Astron. Astrophys.* (megjelenés alatt) (2011).
- [128] D. V. Lal, A. P. Rao, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **374**, 1085 (2007).
- [129] D. M. Worrall, M. Birkinshaw, R. A. Cameron, *Astrophys. J.* **449**, 93 (1995).
- [130] R. P. Kraft, M. J. Hardcastle, D. M. Worrall, S. S. Murray, *Astrophys. J.* **622**, 149 (2005).
- [131] Gopal-Krishna, L. Saripalli, *Astron. Astrophys.* **141**, 61 (1984).
- [132] Gopal-Krishna, P. J. Wiita, *New Astron.* **15**, 96 (2010).
- [133] E. R. Williams, J. E. Faller, H. A. Hill, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 721 (1971).
- [134] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, harmadik kiadás, John Wiley and Sons (1999). Lásd I.2 fejezetet és az ott megadott hivatkozásokat.
- [135] J. C. Long et al., *Nature* **421**, 922 (2003).
- [136] C. D. Hoyle, D. J. Kapner, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, U. Schmidt, H. E. Swanson, *Phys. Rev. D* **70**, 042004 (2004).
- [137] K. R. Dienes, E. Dudas, T. Gherghetta, *Phys. Lett. B* **436**, 55 (1998); K. R. Dienes, E. Dudas, T. Gherghetta, *Nucl. Phys. B* **537**, 47 (1999).
- [138] R. Gregory, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2564 (2000); R. Gregory, *J. High Energy Phys.* **0306**, 041 (2003); Y. Sendouda, S. Kinoshita, S. Mukohyama, *Class. Quantum Grav.* **23**, 7199 (2006); T. Kobayashi, T. Shiromizu, C. de Rham, *Phys. Rev. D* **77**, 124012 (2008); C. de Rham, *J. High Energy Phys.* **0801**, 060 (2008).
- [139] J. M. Cline, J. Descheneau, M. Giovannini, J. Vinet, *J. High Energy Phys.* **0306**, 048 (2003).
- [140] P. Bostock, R. Gregory, I. Navarro, J. Santiago, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 221601 (2004).
- [141] C. Lanczos, *Phys. Zeits.*, **23**, 539 (1922); *Ann. der Phys.* **74**, 518 (1924).
- [142] N. Sen, *Ann. Phys.* **73**, 365 (1924).

- [143] G. Darmois, in *Mémorial des Sciences Mathématiques*, Fascicule 25, Chap. V. (Gauthier-Villars, Paris, 1927).
- [144] W. Israel, *Nuovo Cimento B* **44**, 1 (1966); erratum: B **49**, 463 (1967).
- [145] K. Kuchař, *Canonical Quantum Gravity*, in "General Relativity and Gravitation" Int.Conf. GR13, Cordoba (Argentina) 1992, eds. R. J.Gleiser, C. N.Kozameh and O. M. Moreschi (IOP, Bristol, 1993), E-print: arXiv:gr-qc/9304012v1 (1993).
- [146] C. Barrabès, W. Israel, *Phys. Rev. D* **43**, 1129 (1991).
- [147] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
- [148] T. Shiromizu, K. I. Maeda, M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **62**, 024012 (2000).
- [149] R. Maartens, *Phys. Rev. D* **62**, 084023 (2000).
- [150] N. Deruelle, T. Doležal, *Phys. Rev. D* **62**, 103502 (2000).
- [151] R. A. Battye, B. Carter, A. Mennim, J. P. Uzan, *Phys. Rev. D* **64**, 124007 (2001); G. Huey, J. Lidsey, *Phys. Rev. D* **66**, 043514 (2002); A. Padilla, *Class.Quant.Grav.* **22**, 681 (2005).
- [152] W. B. Perkins, *Physics Lett. B* **504**, 28 (2001).
- [153] P. Kraus, *J. High Energy Phys.* **99**(12), 011 (1999); D. Ida, *J. High Energy Phys.* **00**(09), 014 (2000); A. C. Davis, I. Vernon, S. C. Davis, W. B. Perkins, *Phys. Letters B* **504**, 254 (2001).
- [154] B. Carter, J.-P. Uzan, *Nucl. Phys. B* **606**, 45 (2001).
- [155] H. Stoica, H. Tye, I. Wasserman, *Phys. Lett. B* **482**, 205 (2000).
- [156] P. Bowcock, C. Charmousis, R. Gregory, *Class. Quantum Grav.* **17**, 4745 (2000).
- [157] R. Maartens, K. Koyama, *Living Rev. Rel.* **13**, 5 (2010).
- [158] T. Harko, K. S. Cheng, *Phys. Rev. D* **76**, 044013 (2007).
- [159] M. K. Mak, T. Harko, *Phys. Rev. D* **70**, 024010 (2004); T. Harko, K. S. Cheng, *Astrophys. J.* **636**, 8 (2006); C. G. Boehmer, T. Harko, *Class. Quantum Grav.* **24**, 3191 (2007).
- [160] L. Á. Gergely, T. Harko, M. Dwornik, G. Kupi, Z. Keresztes, közlésre elfogadva *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* (2011), E-print:arXiv:1105.0169 [gr-qc].
- [161] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, V. Rezanian, *Phys. Lett B* **487**, 1 (2000).
- [162] C. G. Boehmer, T. Harko, F. S. N. Lobo, *Class. Quant. Grav.* **25**, 045015 (2008).
- [163] A. N. Aliev, A. E. Gumrukcuoglu, *Phys. Rev. D* **71**, 104027 (2005).

- [164] M. Bruni, C. Germani, R. Maartens, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 231302 (2001).
- [165] N. Dadhich, S.G. Ghosh, *Physics Letters B* **518**, 1 (2001).
- [166] M. Govender, N. Dadhich, *Physics Letters B* **538**, 233 (2002).
- [167] R. Casadio, C. Germani, *Prog. Theor. Phys.* **114**, 23 (2005).
- [168] S. Pal, *Phys. Rev. D* **74**, 124019 (2006).
- [169] C. Germani, R. Maartens, *Phys. Rev. D* **64**, 124010 (2001).
- [170] N. Deruelle, *Stars on branes: the view from the brane*, gr-qc/0111065 (2001).
- [171] J. Ovalle, *Mod. Phys. Lett. A* **23**, 3247 (2008).
- [172] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger, D. Langlois, *Phys. Lett. B* **477**, 285 (2000).
- [173] A. Chamblin, A. Karch, A. Nayeri, *Phys. Lett. B* **509**, 163 (2001).
- [174] S. Pal, *Phys. Rev. D* **74**, 024005 (2006); S. Pal, *Phys. Rev. D* **78**, 043517 (2008).
- [175] C. de Rham, *Phys. Rev. D* **71**, 024015 (2005); K. Koyama, A. Mennim, V.A. Rubakov, D. Wands, T. Hiramatsu, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP **07** (04), 001 (2007); C. de Rham, S. Watson, *Class. Quant. Grav.* **24**, 4219 (2007).
- [176] J. D. Bratt, A. C. Gault, R. J. Scherrer, T. P. Walker, *Phys. Lett B* **546**, 19 (2002).
- [177] Z. Keresztes, L. Á. Gergely, B. Nagy, G. M. Szabó, *PMC Physics A* **1** : 4 (2007); G. M. Szabó, L. Á. Gergely, Z. Keresztes, *PMC Physics A* **1** : 8 (2007); L. Á. Gergely, Z. Keresztes, G. M. Szabó, *AIP Conference Proceedings* **957**, 391 (2007).
- [178] R. Maartens, D. Wands, B. A. Bassett, I. P. C. Heard, *Phys. Rev. D* **62**, 041301(R) (2000).
- [179] L. Á. Gergely, Z. Keresztes, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP **06** (01), 022 (2006).
- [180] R. Eötvös, *Wied. Ann.* **27**, 448 (1886).
- [181] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus* (Springer-Verlag, 1954).
- [182] D. Langlois, L. Sorbo, M. Rodríguez-Martínez, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 171301 (2002).
- [183] D. Jennings, I.R. Vernon, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP **05** (07), 011 (2005).
- [184] D. Langlois, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **163**, 258 (2006).
- [185] D. Jennings, I. R. Vernon, A.-C. Davis, C. van de Bruck, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP **05** (04), 013 (2005).
- [186] Z. Keresztes, I. Képíró, and L. Á. Gergely, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP **06** (05), 020 (2006).

- [187] T. Harko, W. F. Choi, K. C. Wong, K.S. Cheng, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP **08** (06), 002 (2008).
- [188] J. D. Barrow, J. Magueijo, H. B. Sandvik, *Phys. Lett. B* **541**, 201 (2002).
- [189] J. D. Bekenstein, E. Sagi, *Phys. Rev. D* **77**, 103512 (2008).
- [190] Z. Keresztes, L.Á. Gergely, *Class. Quantum Grav.* **25**, 165016 (2008).
- [191] A. Hebecker, J. March-Russell, *Nucl. Phys. B* **608**, 375 (2001); E. Kiritsis, N. Tetradis, T. N. Tomaras, *J. High Energy Phys.* **02** (03), 019 (2002).
- [192] E. Leeper, R. Maartens, C. Sopuerta, *Class. Quantum Grav.* **21**, 1125 (2004).
- [193] G. Ellis, R. Maartens, *Class. Quantum Grav.* **21**, 223 (2004).
- [194] A. S. Eddington, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **90**, 668 (1930).
- [195] E. R. Harrison, *Rev. Mod. Phys.* **39**, 862 (1967).
- [196] G. W. Gibbons, *Nucl. Phys. B* **292**, 784 (1987); *ibid.*, **310**, 636 (1988).
- [197] J. D. Barrow, G. Ellis, R. Maartens, Ch. Tsagas, *Class. Quantum Grav.* **20**, L155 (2003).
- [198] R. Gregory, Braneworld black holes. *Lecture Notes in Physics* **769**: Physics of Black Holes, Proceedings of the 4PthP Aegean Summer School on Black Holes, Mytilene, Island of Lesbos, Greece 2007. Ed. E Papantonopoulos, p. 259 – 298, Springer (2009).
- [199] B. Bertotti, *Phys. Rev.* **116**, 1331 (1959); I. Robinson *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Mat. Fis. Astr.* **7**, 351 (1959).
- [200] D. R. Brill, *Phys. Rev. D* **46**, 1560 (1992).
- [201] R. Kantowski, R. K. Sachs, *J. Math. Phys.* **7**, 443 (1966).
- [202] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenslaers and E. Hertl, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations, Second Edition*, Cambridge Univ. Press (2003).
- [203] A. Chamblin, S.W. Hawking, and H.S. Reall, *Phys. Rev. D* **61**, 065007 (2000).
- [204] R. Casadio, O. Micu, *Phys. Rev. D* **81**, 104024 (2010); R. Casadio, S. Fabi, B. Harms, O. Micu, *J. High Energy Phys.* JHEP **10** (02), 079 (2010).
- [205] J. R. Oppenheimer, H. Snyder, *Phys. Rev.* **56**, 455 (1939).
- [206] C. J. Hansen, S. D. Kawaler, V. Trimble, *Stellar interiors. Physical Principles, Structure, and Evolution*, második kiadás, 2004 Springer, 7. fejezet (2004).
- [207] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999).

- [208] R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **55**, 364 (1939).
- [209] J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939).
- [210] I. Bombaci, *Astron. Astrophys.* **305**, 871 (1996).
- [211] A. Einstein, E. G. Straus, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 120 (1945), errata, *ibid.* **18**, 148 (1946).
- [212] R. Kantowski, *Astrophys. J.* **155**, 89 (1969).
- [213] L. Á. Gergely, I. Képiró, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP **07** (07), 007 (2007).
- [214] R. Gregory, R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837 (1993).
- [215] M. Dabrowski, *Phys. Lett. B* **625**, 184 (2005).
- [216] Y. Shtanov, V. Sahni, *Class. Quant. Grav.* **19**, L101 (2002).
- [217] L.Á. Gergely, B. Darázs, *Publ. Astron. Dept. Eötvös Univ. PADEU* **17**, 213 (2006).
- [218] N. Straumann, *General Relativity* (Springer), 3. fejezet (2004).
- [219] J. Briët, D. Hobill, *Determining the dimensionality of space-time by gravitational lensing*, e-print: arXiv:0801.3859 (2008).
- [220] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann) (1979).
- [221] D. S. Robertson, W. E. Carter, W. H. Dillinger, *Nature* **349**, 768 (1991).
- [222] D. E. Lebach, B. E. Corey, I. I. Shapiro, M. I. Ratner, J. C. Webber, A. E. E. Rogers, J. L. Davis, T. A. Herring, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1439 (1995).
- [223] M. Sereno, *Phys. Rev. D* **67**, 064007 (2003).
- [224] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* **406**, 49 (2005).
- [225] G. Arcioni, E. Lozano-Tellechea, *Phys. Rev. D* **72**, 104021 (2005).
- [226] S. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344 (1971).
- [227] K. A. Bronnikov, B. E. Meierovich, *Grav. Cosmol.* **9**, 313 (2003); C. Bogdanos, A. Dimitriadis, K. Tamvakis, *Phys. Rev. D* **74**, 045003 (2006); I. Navarro, J. Santiago, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP **06** (03), 015 (2006); S. Ghassemi, S. Khakshournia, R. Mansouri, *Generalized Friedmann Equations for a Finite Thick Brane*, 2006 *J. High Energy Phys.* JHEP **06** (08), 019 (2006).