

Válasz

Dr. Patkós András akadémikus
opponensi kérdéseire

Köszönöm Dr. Patkós András akadémikusnak az értekezésem gondos átolvasását, a véleményét, valamint a megjegyzéseket és kérdéseket, melyeket az alábbiakban válaszolok meg:

I. VÁLASZ AZ 1. KÉRDÉSRE:

A. 1. alkérdés

Az 1c) tézispont az ellenirányított azonos nagyságú spinek konfigurációját elemezve, arra alapozza következtetéseit, hogy ez a konfiguráció „bármely oknál fogva előáll”. Szól-e fizikai érv mellett, hogy ez a konfiguráció jellegzetes végállomása lenne a forgó masszív objektumok egymás felé spirálozása során a spinek relatív orientációjának?

Ilyen fizikai évről nem tudok. A bespirálozás során különböző disszipatív effektusok léphetnek fel, ezek közül a gravitációs sugárzás és egy esetlegesen ott található akkréciós koronggal való kölcsönhatás a legjelentősebb. Előbbi spinekre gyakorolt hatása sok paraméter függvénye. Az értekezésben is részletesen tárgyalt $3 \div 30$ tömegarány esetén például a domináns spin átfordul a teljes impulzusmomentum-irányhoz közeledve, azonban a spin és a pálya szöge állandó marad, tehát ebben az esetben nem ez a konfiguráció a végállapot. Az akkréciós koronggal való kölcsönhatás a spineket a korongra merőleges irányba forgatja, olymódon, hogy a pörgés iránya megegyezik az akkréciós korong keringési irányával, tehát ez sem az adott konfigurációhoz vezet.

A vizsgált konfigurációt előidéző fizikai mechanizmus hiányában fogalmaztam úgy, hogy „bármely oknál fogva előáll”. Viszont a numerikus relativitáselmélet művelői sokat foglalkoznak ezzel az általuk „superkick”-nek nevezett konfigurációval, ezért volt értelme az általam bizonyított stabilitást vizsgálni.

B. 2. alkérdés

E konfigurációk jelentőségét abban látja, hogy ekkor a két fekete lyuk a „maximális kilökődést biztosító konfigurációban érkezik a bezuhanás szakaszába”. A „kilökődés” fogalmáról a 2.8 fejezet 33. oldal alján közölt konklúziója sem árul el többet. Kérem ismertesse az általa megadott referenciák numerikus vizsgálatai alapján, hogyan jellemzik a kilökődés jelenségét és e jellemzők hogyan függnék a spinek relatív irányától.

A kilöködés megnevezés arra vonatkozik, hogy a gravitációs hullámok által aszimmetrikusan elvitt impulzus hatására a két fekete lyuk összeolvadásából előálló új fekete lyuk impulzusa elegendően nagy ahhoz, hogy elhagyja a gazda-galaxist, úgy is mondhatnánk, hogy a szökési sebességnél nagyobb sebességet eredményez. A kilöködést elvi szinten már az értekezés 7. oldalán ismerttettem, megadva a jelenség tanulmányozásához rendelkezésre álló további irodalmat: „Vizsgálták a gravitációs hullámok által a rendszerből aszimmetrikusan elvitt impulzus miatt bekövetkező kilöködés lehetőségét, mind analitikusan [67], [76], mind numerikusan, különböző spin konfigurációk esetén [77]-[78].”

[67] L. E. Kidder, Phys. Rev. D 52, 821 (1995).

[76] J. D. Schnittman, A. Buonanno, Astrophys J. 662, L63 (2007);

É. Racine, A. Buonanno, L. Kidder, Phys. Rev. D 80, 044010 (2009);

Z. Keresztes, B. Mikóczi, L. Á. Gergely, M. Vasúth, J. Phys.: Conf. Series 228, 012053 (2010).

[77] J. A. Gonzalez, M. D. Hannam, U. Sperhake, B. Brügmann, S. Husa, Phys. Rev. Lett. 98, 231101 (2007);

F. Herrmann, I. Hinder, D. Shoemaker, P. Laguna, R. A. Matzner, Phys. Rev. D 76, 084032 (2007);

M. Campanelli, C. O. Lousto, Y. Zlochower, D. Merritt, Phys. Rev. Lett. 98, 231102 (2007);

M. Campanelli, C. O. Lousto, Y. Zlochower, D. Merritt, Astrophys. J. 659, L5, (2007);

S. Dain, C. O. Lousto, Y. Zlochower, Phys. Rev. D 78, 024039 (2008);

C. O. Lousto, Y. Zlochower, Phys. Rev. D 79, 064018 (2009).

[78] F. Herrmann, I. Hinder, D. Shoemaker, P. Laguna, R. A. Matzner, Astrophys. J. 661, 430 (2007);

J. D. Schnittman, A. Buonanno, J. R. van Meter, J. G. Baker, W. D. Boggs, J. Centrella, B. J. Kelly, S. T. McWilliams, Phys. Rev. D 77, 044031 (2008).

A [76] hivatkozáscsoportban felsorolt munkánk bevezetőjében foglaltuk össze a vonatkozó analitikus és numerikus vizsgálatok eredményeit. A vezető rendű impulzusvesztéseget már a gravitációs sugárzással foglalkozó korai munkák is vizsgálták. Nem forgó fekete lyukak esetén a numerikus vizsgálatok a kettős rendszer tömegközéppontjának aszimmetrikus impulzusvesztéséből származó maximális sebességét 175 km/s -nak találták:

[v1] J. A. González, U. Sperhake, B. Brügmann, M. Hannam, S. Husa, Phys. Rev. Lett.

98, 091101 (2007)

A bespirálozás és bezuhanás szakaszokat követő lecsengés során azonban az impulzusvesztés aszimmetriája éppen fordított („anti-kick”), ez csökkenti a végső sebességet:

[v2] A. Le Tiec, L. Blanchet, C. M. Will, *Class. Quant. Grav.* 27, 012001 (2010)

A numerikus eredmények szerint a spinek figyelembevétele gyökeresen módosítja az így szerzett impulzus nagyságát. Az impulzusvesztést először az egyenlő tömegű esetben vizsgálták, majd később aszimmetrikus tömeg esetén is. Ezek a numerikus vizsgálatok igen erőforrásigényesek, a rendszer fejlődését mindössze 2-5 körforduláson keresztül képesek követni, tehát lényegében csak a bezuhanás szakaszának és a bespirálozás legvégének figyelemmel kísérésére alkalmasak. Ez az oka annak, hogy a dinamika bonyolultságát csökkentendő, először nem-precesszáló eseteket vizsgálták, azaz, amikor a spinek a pályára merőlegesek, és azonos vagy egymással ellentétes irányúak. Ebben az esetben az ún. hang-up effektus ismert, azaz a keringés a bezuhanás utolsó szakaszán lelassul a spinek hatására, amit például a [77]-es hivatkozáscsoportból a következő cikk tanulmányoz

C. O. Lousto, Y. Zlochower, *Phys. Rev. D* 79, 064018 (2009).

Később vizsgáltak precesszáló eseteket is, melyek a spinszögek tetszőleges konfigurációjára állnak elő. Itt a spin-pálya kölcsönhatások miatt a kilökődési sebességek több ezer km/s nagyságúaknak adódtak. Az értekezésben kiemelt superkick konfiguráció (azonos tömegek és pályasíokban fekvő, ellenirányított spinek) esetén ez 3300 km/s volt, a legnagyobb, amit találtak, az állítás forrása a [77]-es hivatkozáscsoportból a következő cikk:

S. Dain, C. O. Lousto, Y. Zlochower, *Phys. Rev. D* 78, 024039 (2008).

Az értekezés beadása óta eltelt időben több tucat olyan rendszert találtak, melyek a kilökődés jeleit mutatják:

[v3] S. Komossa, *Adv. Astron.* 2012, 364973 (2012).

Kiemelném, hogy a maximális kilökődést biztosító konfiguráció nem szélsőérték-problémából levezetett analitikus eredmény, hanem csupán a numerikus relativitáselmélet művelői által vizsgált néhányszor tíz esetből leszűrt következtetés volt. Az értekezés benyújtása után született új eredménye a numerikus relativitáselmélet közösségnek, hogy léteznek ún. hangup-kick konfigurációk, melyekben a spinek hozzávetőlegesen, de nem teljesen ugyanazon irányba mutatnak a pálya-impulzusmomentummal, és a kilökődés sebessége akár 5000 km/s is lehet:

[v4] C. O. Lousto, Y. Zlochower, *Phys. Rev. Lett.* 107, 231102 (2011)

[v5] C. O. Lousto, Y. Zlochower, M. Dotti, M. Volonteri, Phys. Rev. D85, 084015 (2012), 1201.1923.

A bespirálozás alatt maximális kilökődést biztosító konfiguráció analitikus keresése folyamatban van, Keresztes Zoltán, Vasúth Mátyás és Mikóczi Balázssal együttműködésben kezdtük el.

II. VÁLASZ A 2. KÉRDÉSRE:

A 2. tételben mi indokolja az önspin és a kvadrupól-monopól kölcsönhatásból eredő szekuláris energiaveszteség szétválasztását? Van-e olyan független megfigyelési lehetőség, amelyben a kétféle eredetű, de azonos formájú energiaveszteség mögött álló mennyiségek szétválaszthatók (pl. a rendszer pályamomentumának szekuláris változásában másképp jelentkezik-e a két hatás)?

A járulékokat eredetük szerint különböztettem meg. Mindkét energiaveszteség-járulék a spinek négyzetével arányos, így formailag valóban hasonlóak és egyes szerzők összevontan kezelik őket, „spin1 négyzet” illetve „spin2 négyzet” járulékról beszélve. Más szerzők azonban a fenti megnevezések alatt csak a kvadrupól-monopól vagy csak az önspin járulékokat értik, ezért a cikkekben és az értekezésben félre nem érthető módon, külön-külön adtam meg ezeket a járulékokat.

A kvadrupól-monopól típusú járulékok akkor jelennek meg, ha az egyik test kvadrupól-deformációval rendelkezik, így kvadrupól-deformációval rendelkező gravitációs teret hoz létre, melyben a másik, tömegpontnak tekintett test mozog. A gyorsulás tehát megfelelő korrekciókat kap. Az energiaveszteség számolásakor a tömeg-multipólustenzor háromszoros időderiváltjába ezt a gyorsulást kell behelyettesíteni, a gyorsuláskorrekciók adják a kvadrupól-monopól járulékot.

Ezzel szemben az önspin járulék a gyorsulásban nem jelenik meg. A gravitációs sugárzás által elvitt energia számolásakor a kéttest-rendszer sebesség-kvadrupólmomentumának harmadik deriváltjában négyzetes tag a sebesség-kvadrupólmomentum spint is tartalmazó definíciója miatt ad önspin járulékot. Ez a járulék nem jelenik meg, amennyiben

$$\frac{\mathbf{S}_1}{m_1} = \frac{\mathbf{S}_2}{m_2} , \quad (1)$$

tehát például egyenlő tömegek, egyenlő és azonos irányú spinek esetén. A járulékok részletes

ismertetése a

[3] L. Á. Gergely, Phys. Rev. D 61, 024035 (1999)

[5] L. Á. Gergely, Z. Keresztes, Phys. Rev. D 67, 024020 (2003)

munkákban található.

Vannak tehát olyan partikuláris konfigurációk, melyekben csupán egyik hatás jelentkezik, ezek a konfigurációk azonban nulla mértékű részét képezik a teljes 16 paraméteres paraméterternek. A kérdéses konfiguráció megfigyelésből való független beazonosítására azonban nincs lehetőség, ugyanis a paraméterbecslés jelenlegi tudásunk szerint főként a spin-szögek tekintetében nagyfokú degenerációt mutat. Az is felmerül, hogy a dinamika megőrzi-e az ilyen konfigurációt.

A kétféle hatás az energiaveszteségben, impulzusveszteségben és impulzusmomentum-veszteségben valóban különböző együtthatókkal jelentkezik. Ez befolyásolja, hogy hosszú idő elteltével a pálya hogyan körösödik, így elvben különböző önspin és kvadrupól-monopól járulék-arányok megfigyelésére lehetőség nyílna. Azonban egyrészt a körösödés igen hosszú folyamat, másrészt közvetlenül a pályát nem áll módunkban megfigyelni.

Rövid távú megfigyelésekben a kibocsátott gravitációs hullám energiaveszteségek járulékai külön-külön nem figyelhetők meg, csak az összegük, de még az sem közvetlenül, hanem csak a gravitációs sugárzás fázisán keresztül.

Cikkeimben és a rájuk épülő értekezésben a szakirodalommal összhangban feltettem, hogy a kvadrupól-deformáció a fekete lyukak forgásának következménye, ez okozza a kétféle járulék formai hasonlóságát. Azonban nem kötelező a kvadrupól-deformációt a spinből származtatni, hiszen kvadrupól-momentum más okból is előállhat. A gravitációs hullámok fázisában és amplitúdójában más-más együtthatókkal jelennek meg ezek a járulékok, így a két mennyiség méréséből elvi szinten lehetséges annak ellenőrzésére, hogy a kvadrupól-deformáció valóban a fekete lyukak forgásának következménye-e? Fekete lyukak esetén a nemleges válasz egyúttal a no-hair tétel sérülését is jelentené, hiszen ebben az esetben a fekete lyuk rendelkezne az unicitás-tételek által megengedett paramétereiktől különböző paraméterrel is. A kérdés vizsgálata az általános relativitáselmélet újfajta ellenőrzéséhez vezet.

III. VÁLASZ A 3. KÉRDÉSRE:

A tömegfüggést bevezető elemzésből kiderül, hogy a hatáskeresztmetszetet azon sugár négyzetével veszik arányosnak, amelyet a galaxisok sugárának és tömegének összefüggése alapján származtatnak. A geometriai hatáskeresztmetszeteket általában az ütköző molekulák sugárának összegére szokás építeni. Csak akkor számít kizárólag a nagyobb méretű, ha eleve feltételezhető, hogy az egyik sugara sokkal kisebb a másikénál. Az analógia alapján természetesen adódik a kérdés: Mennyire érzékenyen reagál a jellemző tömegarány becslése arra a szimmetrikusabb feltevésre, amely a galaxisok sugárösszegének négyzetével arányosnak veszi a hatáskeresztmetszetet?

A 2011 őszén benyújtott értekezésben az összeolvadó szupernehéz fekete lyuk kettősök tömegarányára a

[6] L. Á. Gergely, P. L. Biermann, *Astrophys. J.* 697, 1621 (2009)

cikkben publikált eredményt ismertettem. Tudomásom szerint itt adtunk első ízben megfigyeléseken alapuló becslést a tömegarány gyakoriságra. A becslésben több olyan feltevést is felhasználtunk, mely bonyolultabb közelítéssel pontosítható, de jó első közelítésnek számít, ilyen a hatáskeresztmetszet számolása is. Feltevésünk, miszerint az egyik sugár sokkal kisebb a másiknál, statisztikailag igaz, ez a galaxishalmazok összetételének vizsgálatából mindjárt látszik, mivel egy-két domináns galaxis környezetében sok apróbb található és a központi fekete lyuk tömege korrelál a galaxis tömegével. Ezért feltettük, hogy csak a nagyobb fekete lyuk számít a hatáskeresztmetszet szempontjából.

A fő eredményünk az volt, hogy a spin-átfordulás jelenséget felmutató $3 \div 30$ tömegarány rendkívül gyakori, aminek messzemenő következményei vannak az X-alakú rádiógalaxisok szerkezetének megértésében. Az állítást természetesen mi magunk is igyekszünk folyamatosan finomítani. Ennek jegyében már az értekezés benyújtása után született egy másik cikk:

[v6] L. Á. Gergely, P. L. Biermann, The typical mass ratio and typical final spin in supermassive black hole mergers, e-Print: arXiv:1208.5251 (2012).

Ebben a munkában pontosabb és teljesebb adatok alapján újból meghatároztuk a tömegfüggvény differenciális és integrális alakját (a cikk első ábrája). A differenciális alak továbbra is egy tört hatványfüggvény (azaz két különböző hatványfüggvény a kisebb, illetve nagyobb tömegekre), a számok azonban kismértékben változtak. Az első, $\Phi_{BH}(M_{BH}) \propto M_{BH}^{-\tilde{\alpha}}$ tar-

tományban $\tilde{\alpha} = 1$, új alsó határa $m_a \approx 10^6 M_\odot$, a töréspont pedig $m_* = 10^{7.95} M_\odot \approx 8.9 \times 10^7 M_\odot$. A második, $\Phi_{BH}(M_{BH}) \propto M_{BH}^{-\tilde{\beta}}$ tartományban $\tilde{\beta} = 3$, a felső határa pedig $m_b \approx 3 \times 10^9 M_\odot$. Ennek segítségével ismét származtattuk a tömegarány-gyakoriságokat, ezeket a cikk (14). képlete és a 2. ábrája tartalmazza.

A hatáskeresztmetszetre javasolt szimmetrikusabb feltevés természetesen pontosabb eredményre vezet, várhatóan kissé eltolja a gyakoriságokat az összemérhető tömegek irányába. Az F összeolvadási ráta a feltevés szerint így $F \sim m_1^\xi + m_2^\xi = (qm_2)^\xi + m_2^\xi = (q^\xi + 1) m_2^\xi$, ahol $\xi = 1/2$ és $q = m_1/m_2 \geq 1$ a tömegarány. Az integrálokban szereplő fenti alakú F viszont megkettőzi a számolandó tagok számát.

Az új m_* töréspont a szupernehéz fekete lyukakat két tömegtartományba osztja, az elsőben a maximális tömegarány $q_1 = 89$ a másodikban pedig $q_2 = 36$. A tömegek m_* -ra történő normálása után így bármely $q \in [1, 36]$ esetén az összeolvadások száma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [1, 36]} &\propto \\ &\int_{m_a}^{m_*/q} \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^{-\tilde{\alpha}} \left(\frac{m_2 q}{m_*}\right)^{-\tilde{\alpha}} (q^\xi + 1) \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^\xi dm_2 \\ &+ \int_{m_*/q}^{m_*} \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^{-\tilde{\alpha}} \left(\frac{m_2 q}{m_*}\right)^{-\tilde{\beta}} (q^\xi + 1) \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^\xi dm_2 \\ &+ \int_{m_*}^{m_b/q} \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^{-\tilde{\beta}} \left(\frac{m_2 q}{m_*}\right)^{-\tilde{\beta}} (q^\xi + 1) \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^\xi dm_2 . \end{aligned} \quad (2)$$

A jobboldal első, második, illetve harmadik sora a kisebb tömegtartományból vett két fekete lyukra, a kisebb és a nagyobb tömegtartományból vett fekete lyukakra, illetve a nagyobb tömegtartományból vett két fekete lyukra vonatkozik. A $q \leq q_2$ feltétel biztosítja, hogy az integrálok felső határa nagyobb az alsónál.

A $q \in [36, 89]$ tömegarány tartományban két járulék van, két könnyű vagy egy könnyű és egy nehezebb fekete lyukat kell figyelembe venni:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [36, 89]} &\propto \\ &\int_{m_a}^{m_*/q} \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^{-\tilde{\alpha}} \left(\frac{m_2 q}{m_*}\right)^{-\tilde{\alpha}} (q^\xi + 1) \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^\xi dm_2 \\ &+ \int_{m_*/q}^{m_b/q} \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^{-\tilde{\alpha}} \left(\frac{m_2 q}{m_*}\right)^{-\tilde{\beta}} (q^\xi + 1) \left(\frac{m_2}{m_*}\right)^\xi dm_2 . \end{aligned} \quad (3)$$

Itt a $q \leq q_1$ feltétel biztosítja, hogy a felső határok az alsónál nagyobbak.

Végül $q \in [89, 3000]$ esetén csupán egy könnyű és egy nehezebb fekete lyuk páros járulékát kell figyelembe venni:

$$\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [89, 3000]} \propto \int_{m_a}^{m_b/q} \left(\frac{m_2}{m_\star} \right)^{-\tilde{\alpha}} \left(\frac{m_2 q}{m_\star} \right)^{-\tilde{\beta}} (q^\xi + 1) \left(\frac{m_2}{m_\star} \right)^\xi dm_2. \quad (4)$$

Az m_2 szerinti integrálás alapján az első tömegarány tartományban

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [1, 36]}^{(2)} &\propto \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [1, 36]}^{(1)} \\ &+ \frac{q^{-1-\xi+\tilde{\alpha}} - q_1^{-1-\xi+2\tilde{\alpha}} q^{-\tilde{\alpha}}}{1 + \xi - 2\tilde{\alpha}} + \frac{q^{-\tilde{\beta}} - q^{-1-\xi+\tilde{\alpha}}}{1 + \xi - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} + \frac{q_2^{1+\xi-2\tilde{\beta}} q^{-1-\xi+\tilde{\beta}} - q^{-\tilde{\beta}}}{1 + \xi - 2\tilde{\beta}}, \end{aligned} \quad (5)$$

ahol

$$\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [1, 36]}^{(1)} \propto \frac{q^{-1+\tilde{\alpha}} - q_1^{-1-\xi+2\tilde{\alpha}} q^{\xi-\tilde{\alpha}}}{1 + \xi - 2\tilde{\alpha}} + \frac{q^{\xi-\tilde{\beta}} - q^{-1+\tilde{\alpha}}}{1 + \xi - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} + \frac{q_2^{1+\xi-2\tilde{\beta}} q^{-1+\tilde{\beta}} - q^{\xi-\tilde{\beta}}}{1 + \xi - 2\tilde{\beta}}. \quad (6)$$

A második tömegarány tartományban

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [36, 89]}^{(2)} &\propto \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [36, 89]}^{(1)} \\ &+ \frac{q^{-1-\xi+\tilde{\alpha}} - q_1^{-1-\xi+2\tilde{\alpha}} q^{-\tilde{\alpha}}}{1 + \xi - 2\tilde{\alpha}} \\ &+ \frac{\left(q_2^{1+\xi-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}} - 1 \right) q^{-1-\xi+\tilde{\alpha}}}{1 + \xi - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}, \end{aligned} \quad (7)$$

ahol

$$\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [36, 89]}^{(1)} \propto \frac{q^{-1+\tilde{\alpha}} - q_1^{-1-\xi+2\tilde{\alpha}} q^{\xi-\tilde{\alpha}}}{1 + \xi - 2\tilde{\alpha}} + \frac{\left(q_2^{1+\xi-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}} - 1 \right) q^{-1+\tilde{\alpha}}}{1 + \xi - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}. \quad (8)$$

Végül a harmadik tömegarány tartományban

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [89, 3000]}^{(2)} &\propto \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [89, 3000]}^{m_1} \\ &+ \frac{q_2^{1+\xi-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}} q^{-1-\xi+\tilde{\alpha}} - q_1^{-1-\xi+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} q^{-\tilde{\beta}}}{1 + \xi - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}, \end{aligned} \quad (9)$$

ahol

$$\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [89, 3000]}^{(1)} \propto \frac{q_2^{1+\xi-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}} q^{-1+\tilde{\alpha}} - q_1^{-1-\xi+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} q^{\xi-\tilde{\beta}}}{1 + \xi - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}. \quad (10)$$

(Felhasználtam, hogy $m_b/m_\star = q_2$ és $m_\star/m_a = q_1$. Az $^{(1)}$ és $^{(2)}$ indexek az egy tömegből, illetve a két tömegből számolt hatáskeresztmetszetre vonatkoznak.) Az $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 3$ és

$\xi = 1/2$, $q_1 = 89$, $q_2 = 36$ paraméterértékek behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [1,36]}^{(1)} &\propto 2\frac{\sqrt{89}}{\sqrt{q}} - \frac{1}{45\,349\,632}q^2 - \frac{8}{45q^{\frac{5}{2}}} - \frac{8}{5}, \\ \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [1,36]}^{(2)} &\propto \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [1,36]}^{(1)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right),\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [36,89]}^{(1)} &\propto 2\frac{\sqrt{89}}{\sqrt{q}} - \frac{6221}{3888}, \\ \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [36,89]}^{(2)} &\propto \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [36,89]}^{(1)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right),\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [89,3000]}^{(1)} &\propto \frac{15\,842}{5}\frac{\sqrt{89}}{q^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{19\,440}, \\ \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [89,3000]}^{(2)} &\propto \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [89,3000]}^{m_1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right).\end{aligned}\quad (13)$$

Normálva a gyakoriságokat oly módon, hogy

$$\int_1^{36} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [1,36]} dq + \int_{36}^{89} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [36,89]} dq + \int_{89}^{3000} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [89,3000]} dq = 1 \quad (14)$$

feltétel teljesüljön, az összeolvadások gyakoriságára a következő adódik az egy tömegből számolt hatáskeresztmetszet esetén

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [1,36]}^{(1)} &= \frac{9.396\,4 \times 10^{-2}}{q^{0.5}} - \frac{8.853\,6 \times 10^{-4}}{q^{2.5}} \\ &\quad - 1.098\,2 \times 10^{-10}q^2 - 7.968\,1 \times 10^{-3}, \\ \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [36,89]}^{(1)} &= \frac{9.396\,4 \times 10^{-2}}{q^{0.5}} - 7.968\,6 \times 10^{-3}, \\ \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq}_{q \in [89,3000]}^{(1)} &= \frac{148.86}{q^{2.5}} - 2.561\,8 \times 10^{-7},\end{aligned}\quad (15)$$

illetve a két tömegből számolt hatáskeresztmetszet esetén:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [1,36]}^{(2)} &= \frac{7.2485 \times 10^{-2}}{q} - \frac{6.8298 \times 10^{-4}}{q^3} \\
&\quad + \frac{6.6338 \times 10^{-2}}{\sqrt{q}} - \frac{6.8298 \times 10^{-4}}{q^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad - 8.4713 \times 10^{-11} q^2 - 8.4713 \times 10^{-11} q^{\frac{3}{2}} \\
&\quad - 6.1467 \times 10^{-3} , \\
\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [36,89]}^{(2)} &= \frac{7.2485 \times 10^{-2}}{q} + \frac{6.6338 \times 10^{-2}}{\sqrt{q}} \\
&\quad - 6.1471 \times 10^{-3} , \\
\frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} \Big|_{q \in [89,3000]}^{(2)} &= \frac{114.83}{q^3} - \frac{1.9762 \times 10^{-7}}{\sqrt{q}} + \frac{114.83}{q^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad - 1.9762 \times 10^{-7} .
\end{aligned} \tag{16}$$

A $[q_1, q_2]$ tömegarány tartományba eső összeolvadások számát $\mathcal{N}_{q_1 \div q_2} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{d\mathcal{N}(q)}{dq} dq$ módon értelmezve, megkapjuk az $[1, 3]$, $[3, 30]$, $[30, 100]$ és $[100, 3000]$ tömegarány tartományokba eső összeolvadásokat százalékban kifejezve, a kétféle hatáskeresztmetszet számolási mód szerint:

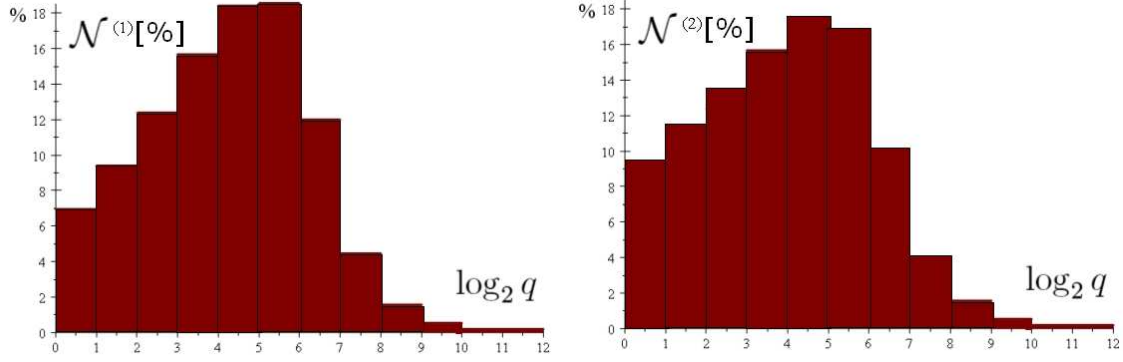
$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{1 \div 3}^{(1)} &= 12.1 \% , \quad \mathcal{N}_{3 \div 30}^{(1)} = 48.9 \% , \\
\mathcal{N}_{30 \div 100}^{(1)} &= 29.2 \% , \quad \mathcal{N}_{100 \div 3000}^{(1)} = 9.8 \% ,
\end{aligned} \tag{17}$$

és

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{1 \div 3}^{(2)} &= 16.4 \% , \quad \mathcal{N}_{3 \div 30}^{(2)} = 49.8 \% , \\
\mathcal{N}_{30 \div 100}^{(2)} &= 25.7 \% , \quad \mathcal{N}_{100 \div 3000}^{(2)} = 8.1 \% .
\end{aligned} \tag{18}$$

Látható, hogy a szimmetrikusan számolt hatáskeresztmetszet valóban növeli az összemérhető tömegek összeolvadásának esélyét. A munkám szempontjából azonban az a lényeges kérdés, hogy a $3 \div 30$ tömegarány tartományba az összeolvadások milyen része esik, hiszen ilyenkor van spin-átfordulás a bespirálózás folyamán. Ez a szám maradt a legstabilabb az összes közül, 48.9 %-ról 49.8 %-ra változott, tehát eredeti feltevésünk a hatáskeresztmetszet számolására a kérdésünk megválaszolása szempontjából jogos volt. A pontosabb, szimmetrikus hatáskeresztmetszet számolás szerint az általunk tipikusnak nevezett viselkedés még inkább megközelíti az 50%-ot.

Az összeolvadások gyakoriságát a tömegarány függvényében a két esetben az 1. ábra hisztogram formájában mutatja be.



1. ábra. A szupernehéz fekete lyuk összeolvadások gyakorisága a q tömegarányból képezett $\log_2 q$ változó függvényében az egy tömeg (bal oldali ábra), illetve két tömeg (jobb oldali ábra) figyelembevételével számolt hatáskeresztmetszetek esetén.

IV. VÁLASZ A 4. KÉRDÉSRE:

A (8.15) egyenlet szerint, az $U(\tau)$ függvény sugárzás jellegű forrástagnak képvisel, amennyiben, a hártyaállandó nem időfüggő és a bránra tükrözés-szimmetrikus külső világot tételezünk fel. (8.62) szerint pl. a hártya feszültség alkalmas időfüggésének bevezetésével elérhető, hogy a járulékok nem relativisztikus anyag energiasűrűségére jellemző hígulást mutasson és ezzel „sötét anyag” hatást fejtessen ki. Van-e elképzelés arra, hogy ennek részaránya és a fénylő négydimenziós anyag részaránya között természetes módon arányosság álljon fenn, azaz értelmezhető legyen a fénylő és a sötét anyag sűrűségének nagyjából azonos nagyságrendje? Ez a kérdés érdekes a 2.c) tézispont értékelése szempontjából, miután a késői fejlődés szempontjából az Eötvös-brán csak akkor releváns, ha a hártya feszültség időfejlődése szinkronizálva van a hártya anyagsűrűségének alakulásával.

A brán-kozmológia Friedmann és Raychaudhuri egyenleteiben jelentkező U forrástagnak a kérdésben megfogalmazott sajátos esetben valóban sugárzás jellegű járulékot ad, mely „sötét sugárzás” néven ismert. Általános esetben egyéb típusú skálafaktor függés is lehetséges, ezért jogos a kérdés, hogy az U valamelyik járulékában előállhat-e a sötét anyagra jellemző a^{-3} típusú függés?

További kérdés, hogy ez a függés előállhat-e a brán-feszültség időfüggésének alkalmas megválasztásával? A válaszhoz azt kell világosan látni, hogy a (8.62) egyenletben hol szerepel a brán-feszültség. A kérdést leegyszerűsítendő, az Eötvös brán modell esetén is használt

szimmetrikus beágyazás feltevésével élek, ekkor az egyetlen ilyen tag

$$\frac{3\beta\dot{v}^2}{2a^3} , \quad (19)$$

melyben β a brán ötödik dimenzióba kibocsátott sugárzását jellemzi. Ez a járulék azért brán-feszültség függő, mivel a bránon a standard modell mezőiből álló kozmológiai folyadékra a folytonossági egyenletnek teljesülnie kell, ezért a brán sugárzása illetve a brán-feszültség időváltozása egymással korrelációban áll a következő módon (értekezés (8.83) egyenlete):

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{\tilde{\kappa}^2 a^3} \sum_{I=L,R} \epsilon_I (-1)^{\eta_I} \beta_I \dot{v}_I^2 = \frac{6\beta\dot{v}^2}{\tilde{\kappa}^2 a^3} . \quad (20)$$

A második egyenlőség a szimmetrikus beágyazás feltételéből következik, valamint abból, hogy kozmológiai tágulás esetén $\epsilon(-1)^\eta = 1$ (értekezés 100. oldala). Vagyis az U akkor tartalmazhat változó brán-feszültségből származó sötét anyag jellegű (azaz a^{-3} függésű) tagot, ha $\beta\dot{v}^2 = \text{állandó}$.

Az Eötvös brán modellben (értekezés (8.84) képlete):

$$\beta\dot{v}^2 = \epsilon\dot{m}v = f^{-1}\dot{m} \left[\dot{a} - (\dot{a}^2 + f)^{1/2} \right] ,$$

ahol f az 5-dimenziós Vaidya téridő metrikus függvénye (értekezés (8.19) képlete, nulla töltésekkel). Látható, hogy $\beta\dot{v}^2$ viselkedését az 5-dimenziós Vaidya téridő tömegfüggvényének változása határozza meg. Ez azonban nem választható meg tetszőlegesen, mivel az Eötvös brán modellben a brán-feszültség skálafaktor-függése

$$\lambda = \lambda_{lt} \left(1 - \frac{a_{\min}}{a} \right) , \quad (21)$$

így (20) összefüggésből

$$\frac{\dot{m}}{a^2} = - \left(\frac{\kappa_{lt}^2 \lambda_{lt}}{6} \right)^{1/2} \frac{a_{\min}}{a} \dot{a} \left[\dot{a} + (\dot{a}^2 + f)^{1/2} \right] \quad (22)$$

adódik. Ez az egyenlet a Friedmann egyenlettel együtt csatolt differenciálegyenlet-rendszert alkot, melynek numerikus megoldása (alkalmasan átskálázott változókban) az értekezés (8.8) és (8.9) ábráján látható. Annak eldöntéséhez, hogy $\beta\dot{v}^2$ állandó-e, ezt az egyenletrendszert kellene átírni olyan változókra, melyek közül egyik pontosan $\beta\dot{v}^2$ és numerikusan újból megoldani.

Ez azonban nem szükséges, mert a (19) járulék akkor sem interpretálható sötét anyagként, ha esetleg pontosan a^{-3} függést mutatna (ez egyébként nem valószínű). Ennek oka az, hogy a Friedmann egyenletben (értekezés (8.9) egyenlete)

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \Lambda + \kappa^2 \left[\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + U \right] \quad (23)$$

az adott járulékot nem csak az U , hanem a

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{3\beta\dot{v}^2}{2a^3} \quad (24)$$

függvény is tartalmazza, mégpedig ellenkező előjellel (értekezés (8.62) és (8.63) összefüggései), és ezek kiegyensúlyozódnak a Friedmann egyenletből.

Ez azonban nem jelenti azt, hogy egy brán-modellben nem lehet olyan sötét anyagot helyettesítő geometriai eredetű forrástag, mely sötét anyagként viselkedik. Az U -ban szereplő

$$\frac{6m}{a^4} \quad (25)$$

járulékban az m tömegfüggvény skálafaktorral arányos viselkedése esetén pontosan ez történne. Az Eötvös brán esetében azonban a tömegfüggvény az értekezés (8.9) ábrája szerint csökken időben, így a skálafaktorban is monoton csökkenő lesz, nem pedig lineárisan növekvő.

Az U három járulékból tevődik össze, melyeket az 5-dimenziós Weyl görbület elektromos része, a beágyazás aszimmetriája és az 5-dimenziós mezők adnak. Az Eötvös brán esetén nem lehetséges tehát 5-dimenziós geometriai hatásokkal helyettesíteni a sötét anyagot, mely így hagyományos módon, a bránra lokalizált standard modell mezők között keresendő.

Ezzel szemben az összecsomósodott anyagot lokálisan modellező gömbszimmetrikus esetekben lehetséges 5-dimenziós geometriai hatásokkal kiváltani a sötét anyagot. Ezt a galaktikus forgásgörbe adatokkal való összevetéssel sikerült igazolnunk:

[v7] L. Á. Gergely, T. Harko, M. Dwornik, G. Kupi, Z. Keresztes, Mon. Not. Royal Astron. Soc. 415, 3275-3290 (2011).

V. VÁLASZ AZ 5. KÉRDÉSRE:

Az állapotegyenlet integrális alakját az anyag mikroszkopikus szerkezete és a rendszerre alkalmazott termodinamikai szigetelések határozzák meg. Van-e olyan ismert anyag (térelméleti közeg), amely rendelkezik az elemzésből leszűrt tulajdonságokkal? Ha nincs (aminek elég

nagy esélyt adnék), akkor következik-e, hogy nem lehetséges olyan ötdimenziós beágyazás, amelyre a csillagon kívüli tartomány sztatikus vákuum állapotban van?

A gömbszimmetrikus ideális folyadék bránon történő kollapszusának tárgyalását a

[14] L. Á. Gergely, J. Cosmol. Astropart. Phys. JCAP 07 (02), 027 (2007)

munka tartalmazza. Mind ebben a munkában, mind az értekezés idevágó részében, a 9.1.2 gravitációs kollapszussal foglalkozó alfejezetben gondosan kerültem az állapotegyenlet megnevezés használatát. Az értekezés 121. oldalán megadott (9.39) összefüggés:

$$\frac{p_{\pm}}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_{\pm}}{\lambda}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho_{\pm}}{\lambda}\right)^{-1}. \quad (26)$$

valóban kapcsolatot teremt az ideális folyadék energiasűrűsége és nyomása között, de ez azt fejezi ki, miként változik a nyomás az energiasűrűség függvényében a kollapszus során. Hasonló a newtoni pszeudo-csillagmodellekben használt politróp feltevéshez, mely szerint a nyomás az energiasűrűségnek egyszerű $p = K\rho^{1-1/n}$ hatványfüggvénye. Összhangban van a folytonossági egyenlettel és a hidrosztatikai egyensúly követelményével, de nem veszi figyelembe a hőtranszfert vagy termikus egyensúly követelményét. A korlátozás ellenére a politróp modellek igen hasznosnak bizonyultak a csillagok számos tulajdonságának megértésében.

Az összefüggésben a brán feszültség is szerepel, melynek értéke igen nagy, ezt a (9.40) összefüggés utáni paragrafus részletezi, mindenesetre sok nagyságrenddel nagyobb a csillagok jellegzetes energiasűrűségénél és nyomásánál. Ezért a kollapszus kezdetét jellemző kisenergiás tartományban érvényes közelítéssel kell élnünk ($|\rho| \ll \lambda$), mely esetén az összeomló ideális folyadék a következő politróp egyenlettel közelíthető:

$$p \approx -\frac{\rho^2}{2\lambda}. \quad (27)$$

A politróp index $n = 1$, a politróp állandó pedig $K = -1/2\lambda$, a brán feszültség függvénye. A $c = 1 = G$ egységekben a brán neutron csillagokra vonatkozó asztrofizikai megfontolások a $1,5 \times 10^{-136} \text{ eV}^{-2}$ korláthoz vezetnek. Ehhez képest a Nap sűrűsége $\rho_{\odot} = 1,8 \times 10^{-150} \text{ eV}^{-2}$ (SI mértékegység-rendszerben $\rho_{\odot} = 1408 \text{ kg/m}^3$). Ezekkel az adatokkal számolva

$$p \approx -6 \times 10^{-15} \rho \approx 0 \quad (28)$$

Közönséges csillagok esetén tehát a kollapszáló folyadék a portól gyakorlatilag megkülönböztethetetlennek tekinthető, ezt az értekezés is kiemeli.

Neutroncsillagok sűrűségével számolva már nem alkalmazható ez a közelítés, és mivel ezt az esetet sem a cikkben, sem az értekezésben nem elemeztem, az alábbiakban térek ki rá. A jellegzetes $1.4 M_\odot$ tömeggel és 10 km-es sugárral számolva $\rho_{\text{neutroncsillag}} = 8,6 \times 10^{-136} \text{ eV}^{-2}$ (SI mértékegység-rendszerben $\rho_\odot = 6,7 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$), így $\rho_{\text{neutroncsillag}} \approx 5,7 \lambda_{\text{astro}}$, illetve a nyomás energiasűrűség függéséből $p_{\text{neutroncsillag}} \approx -2.4 \lambda_{\text{astro}}$ lenne, azaz már teljesülne a $\rho + 3p < 0$ sötét energia feltétel. Megjegyezendő azonban, hogy brán-elméletekben a dinamika az anyagi mezőkben nemlineáris és míg kis energiasűrűségeken a négyzetes tagok elhanyagolhatók, addig a neutroncsillagok nagy energiasűrűsége mellett figyelembe kell venni őket. A lineáris + négyzetes tagok együttesen egy energiafeltételeket teljesítő effektív anyagként is felfoghatók.

Tudomásom szerint nem vizsgálták eddig azt a kérdést, hogy létezik-e olyan térelméleti közeg, amelynek energiasűrűségéből képezett lineáris és négyzetes járulékok pontosan úgy kombinálódnának, hogy az effektív anyag neutroncsillagot jellemezzon, ez a neutroncsillagok állapotegyenletével és bránokkal foglalkozó kutatások egy következő célja lehetne, amelynek komplexitása azonban túlmutat az itt adható válaszon. A magam részéről én is azt tartom valószínűnek, hogy a neutroncsillagokat jellemző ismert állapotegyenletek nem fognak elegendeni a kívánt feltételnek, így a Schwarzschild bránba ágyazott neutroncsillagokat nem engedné meg a bránelmélet. Az értekezésben részletesen tárgyalt árapálytöltéssel is rendelkező sztatikus vákuum bránba azonban minden további nélkül beágyazható a neutroncsillag, így a kérdésben említett no-go tétel nem a sztatikus vákuum, hanem csak a Schwarzschild téridőre vonatkozna.

VI. VÁLASZ A 6. KÉRDÉSRE:

A szerző idézi azt az irodalomban elterjedt vélekedést, miszerint az ötdimenziós elméletben a négydimenziós fekete lyuk egy ötdimenziós véges horizontú objektum négydimenziós metszete (130. oldal). Bekenstein gondolkísérlete az entrópiát információvesztésre és a horizont-felület azt kísérő növekedésére alapozza. Tudható-e, hogy az ötdimenziós világban 1 bit információnak a fekete szivarban történő elnyelése a négydimenziós felület arányos megváltozását eredményezi? Nem lehetséges-e, hogy az ötdimenziós geometria valamelyik más adata az adekvát mérőszám?

A bránelmélet 5-dimenziós gravitációelmélet, mely megengedi, hogy ugyancsak 5 dimen-

zióban létezzenek egyéb, nem szokványos mezők is. Csupán a részecskefizika standard modelljében szereplő mezők (melyek az általunk megszokott anyag építőkövei) helyezkednek el a $3+1$ dimenziós bránon. Így amennyiben egy kompakt horizontú 5-dimenziós fekete lyukba 5-dimenziós nem-standard anyag hullik, mely természetesen információt hordoz, továbbra is alkalmazható a fekete lyuk termodinamika, mely a horizont felületének növekedését jelenti. A fekete lyuk termodinamika magasabb dimenziós érvényességét az a figyelemreméltó 1996-os húrelméleti eredmény

[v8] A. Strominger, C. Vafa, Phys. Lett. B 379, 99 (1996)

is alátámasztja, mely szerint az 5-dimenziós extrémális Reissner-Nordström fekete lyuk mikroállapotaiknak összeszámlálása megadja a Bekenstein-Hawking entrópiát.

Felmerül a kérdés, hogy a 4-dimenziós bránról történő akkréció ugyanúgy növeli-e a felszínt? Mivel vizuális gondolkodásmódunk 3 dimenzióra korlátozódik, sok esetben a dimenziális redukció technikáját alkalmazzuk következtetéseink levonására. Annak az esetnek, amikor a 4-dimenziós bránról hullik anyag az 5-dimenziós fekete lyukba, megvizsgálhatjuk az alacsonyabb dimenziós analógiáját. A Kerr fekete lyukba behulló, egyébként csupán az egyenlítői síkban keringő akkréciós anyag hatására a fekete lyuk Kerr típusú marad, melynek csak a tömege és forgási paramétere növekszik. A tömegnövekedés hatására a horizont sugara nő, a forgási paraméter növekedése hatására csökken. A két paraméter változása azonban olyan, hogy együttes hatásukra a horizont felszíne továbbra is növekedik, igaz marad tehát a fekete lyuk termodinamika abban az esetben is, amikor a behulló anyag disztribucionális jellegű.

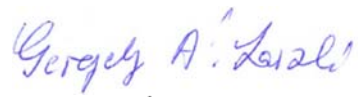
További kérdés, hogy a fekete szivarba történő akkréció esetén vajon növekedik-e a négydimenziós metszetének felülete? Az igenlő válasz alátámasztására Emparan, Horowitz és Myers 2000-ben publikált munkájáról tesztek említést:

[v9] R. Emparan, G.T. Horowitz, R.C. Myers, J. High Energy Phys. 0001, 021 (2000).

A szerzők 4 dimenziós modell keretén belül vizsgálták az ún. BZT brán fekete lyukakat és magasabb dimenziós BZT fekete húr kiterjesztéseiket. Kimutatták, hogy a 4-dimenziós horizont felszínéként értelmezett entrópia (vezető rendben, nagy tömegek esetén) megegyezik a 3-dimenziós metszet területéből számolt entrópiával, amennyiben figyelembe vették a különböző dimenziókban más-más értékű Planck tömegeket. Ez az eredmény arra utal, hogy a magasabb dimenziós fekete objektumok és metszeteik, így a fekete szivar és négydimenziós metszetének növekedése között is korreláció van.

Végül megjegyzem, hogy az 5-dimenziós geometria nagyon hasonló a 4-dimenzióshoz, nem várható új geometriai adat megjelenése, mely befolyásolná a termodinamikai megfontolásokat. Ilyen új geometriai adat megjelenik a két dimenzióról háromra váltáskor (a görbületi skalár helyett a Ricci tenzor), vagy a három dimenzióról 4-re való váltáskor (megjelenik a Weyl tenzor), azonban a 4 és 5 dimenzió nagyon hasonló. Elképzelhető viszont új topológiai jellegzetességek megjelenése, hiszen a dimenziószám növekedésével a topológiailag inekvivalens fekete lyukak száma növekedik. Tudomásom szerint azonban nem ismert olyan információ-elnyeléssel járó (akkréció) folyamat, melynek során a fekete lyuk topológiai átalakuláson esne át (például az 5-dimenziós Schwarzschild fekete lyuk a H. Reall és R. Emparan által talált gyűrű alakú fekete lyukká alakulna).

Szeged, 2013. május 13


Gergely Árpád László