

dc_233_11

AKADÉMIAI DOKTORI ÉRTEKEZÉS

TASNÁDI ATTILA

Tiszta és vegyes oligopóliumok

BUDAPEST, 2011

Tartalomjegyzék

Előszó	5
1. Bevezetés	7
2. Homogén termékű oligopóliumok	11
2.1. Cournot oligopólium	11
2.1.1. Egyensúly létezése és egyértelműsége	12
2.1.2. Approximációs tételek	13
2.2. Bertrand oligopólium	18
2.3. Bertrand–Edgeworth oligopólium	19
2.3.1. Adagolási szabályok	20
2.3.2. Az oligopol modell	24
2.3.3. Tiszta és kevert Nash-egyensúly	26
2.4. Stackelberg oligopólium	30
3. Döntések időzítése	32
3.1. Kapacitáskorlátos triopólium	34
3.1.1. Egzogén döntési sorrendek	35
3.1.2. Az endogén döntési sorrend meghatározása	39
3.2. Konvex költségfüggvényű duopóliumok	41
3.2.1. A két időszakos időzítési játék	45
3.2.2. Több időszakos időzítési játék	52

4. Árvezérlés	56
4.1. Egy nagyvállalatos ármeghatározó oligopólium	58
4.2. Duopolisztikus árvezérlés	65
4.3. Domináns vállalati árvezérlés	69
5. Termelési mód	74
5.1. A modellkeret	76
5.2. Készletre történő termelés melletti egyensúly	78
5.3. Döntés időzítés készletre történő termelésnél	81
6. Döntési változók választása	83
6.1. Döntési változók endogén választása	84
6.2. Döntési változót választó játékok	85
6.3. Egzogen szereposztású játék	88
6.4. Kevert Nash-egyensúly	96
6.5. Döntési változók endogén meghatározása	99
6.5.1. Szimultán szerep és érték választás	99
6.5.2. Szekvenciális szerep és érték választás	102
7. Bérjáték az inputpiacon	104
7.1. A modellkeret	106
7.2. A bérjáték Nash-egyensúlya	109
7.3. Kevert Nash-egyensúly	115
7.4. Eredmények interpretációja	124
Záró gondolatok	126
Függelék	129
A. Bizonyítások	130
A.1. Készletre történő termelési játék egyensúlya	130
A.1.1. Nagy kapacitások esete	130
A.1.2. Közepes kapacitások esete	137

A.2. A bérjáték egyensúlyának egyértelműsége	141
B. Feltevések jegyzéke	144
Tárgymutató	147
Irodalomjegyzék	149

Előszó

A mikroökonómia egyik alapvető területével, az oligopóliumokkal kapcsolatos kutatásokat 1996 óta folytatok. E területen, a társadalmi választások elmélete mellett, számottevő és egymásra épülő eredményt értem el. Az MTA doktori disszertációm témájául az oligopóliumokat választottam a társadalmi választások elméletével szemben, mivel e területen elért eredményeim egyrészt önállóak, másrészt jobban kapcsolódnak egymáshoz. Az elért eredményeim az *Economics Letters*, a *Közgazdasági Szemle*, a *Labour Economics*, az *International Journal of Industrial Organization*, a *Journal of Economic Behavior and Organization*, a *Journal of Economics*, a *Portuguese Economic Journal* és a *Sigma* szakfolyóiratok közölték. Az értekezésem támaszkodik a *Timing of Decisions in Oligopoly Games* című monográfiámban elért eredményeimre is.

Az értekezésem kimondottan homogén termékű oligopol piacokat vizsgál, amelyek alapmodelljei a Cournot, a Bertrand, a Bertrand–Edgeworth és a Stackelberg duopóliumok, illetve oligopóliumok. Ezen alapmodelleket nevezem röviden tiszta oligopóliumoknak, amelyre értekezésem címének első része utal. Cournot és Stackelberg modelljében a döntési változó a mennyiség, a Bertrand modellben az ár, a Bertrand–Edgeworth modellben pedig mindkettő, bár a mennyiség alárendelt szerepet játszik. Más szempontból tekintve mindhárom modell szimultán döntésű, míg Stackelberg modellje szekvenciális. Nyilván az árat és a mennyiséget, mint lehetséges döntési változókat tekintve, további lehetséges döntési sorrendek képzelhetők el, továbbá az egyes vállalatok szempontjából lehet, hogy az ár, míg más vállalatoknál a mennyiség a domináns döntési változó. Ez vezet el minket az alapmodellek keresztezéseikhez a döntési

változók és a döntési sorrendek tekintetében, amelyeket vegyes modelleknek hívok, amire az értekezésem címének második jelzője utal. Felvetődik annak a lehetősége, hogy egy összetettebb vegyes modell egyensúlyi kimenetelét tekintve ekvivalens egy alapmodellel. Kreps és Scheinkman (1983) érte el a legismertebb ilyen irányú eredményt, amelyben egy kapacitás kiépítési (mennyiségi) szakaszt egy Bertrand–Edgeworth duopol árjáték követ. Kreps és Scheinkman (1983) megmutatta, hogy az így értelmezett összetettebb vegyes modell egyensúlyában a vállalatok első időszakban kiépített kapacitásai megegyeznek az azonos költségfüggvényű Cournot duopólium egyensúlyi termelésével, amellyel a Cournot modell egyfajta megalapozását adták. Az értekezésemben többek között a Cournot oligopólium más irányú megalapozását és a Forchheimer-féle domináns vállalati árvezérlés modelljének alátámasztását adom.

Az értekezésem megértése a mikroökonómia, a matematikai analízis, a valószínűségszámítás, és a játékelmélet alapfogalmainak ismeretét igényli. A technikai jellegű, hosszabb bizonyítások mértékelméleti ismereteket is feltételeznek.

Az értekezés 1. és 2. fejezetei a tárgyalt eredmények rövid ismertetését és a tiszta oligopóliumokra vonatkozó legfőbb ismereteket tartalmazzák. A többi fejezet saját kutatásaimon alapul. A 3. fejezet a döntések időzítésével, a 4. fejezet az árvezérléssel, az 5. fejezet a készletre történő termelés és a rendelésre történő termelés összehasonlításával, a 6. fejezet a döntési változók meghatározásával és a 7. fejezet a Bertrand–Edgeworth modell inputpiacon történő alkalmazási lehetőségével foglalkozik.

Végezetül köszönetet szeretnék mondani a Magyar Tudományos Akadémiának a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj, a Budapesti Corvinus Egyetemnek a Kutatási Kiválósági Ösztöndíj és az International Studies Centernek¹ a publikációs díjak keretében nyújtott anyagi és erkölcsi támogatásáért.

Budapest, 2011. szeptember 17.

Tasnádi Attila

¹A Budapesti Corvinus Egyetem idegennyelvű képzési központja.

1. fejezet

Bevezetés

Az oligopol irodalom két fontos kérdése a megfelelő döntési változó megválasztása és a piacon létrejövő döntési sorrend meghatározása. A döntések sorrendje és a döntési változó meghatározza a piac szerkezetét és egyensúlyi kimenetelét. Arra is gondolhatunk, hogy a vizsgált piacon termelt jószág jellemzői meghatározzák a piac elsődleges döntési változóját és a vállalatok közötti erőviszonyok pedig a kialakuló döntési sorrendet. Gyakori példaként szokás a halászatot felhozni, ahol a kifogott halmennyiség a döntési változó, mivel a kikötőbe visszaérkező hajó adott mennyiségű fogással érkezik, majd ezután a halárak a kereslet-kínálat egyensúlyaként jönnek létre, tehát ilyen értelemben a Cournot oligopólium írja le a legjobban a piacot. Ezzel szemben az éttermek adott befogadóképességgel rendelkeznek, így a döntési változójuk az étel, illetve ital árak. Emiatt az árverseny írja le jobban a piaci szituációt.

A valós helyzetek a két említett példa eseténél jóval összetettebbek, sőt a két példát tekintve is a dinamikus aspektusokat figyelmen kívül hagytuk. Egy étterem például adott helyen, hosszabb időtávon bővítheti kapacitását a szomszédos helység megvásárlásával. A valóság modellezésére használt oligopólium csak adott időtávon képes leírni a piaci szituációt és korlátozott mértékben képes előre jelezni a piac kimenetelét. Ilyen kérdésekkel foglalkozik például Friedman (1988).

Az oligopóliumok tanulmányozása azonban több szempontból is fontos.

Egyrészt az egyszerűbb modellek megértése szükséges a bonyolultabb, valóság közeli modellek elemzéséhez. Másrészt oligopol modelleket gyakran alkalmaznak valóságos piaci szituációk leírására, amelyre jó példa az energia szektor. Példának okáért Bompard, Ma, és Ragazzi (2005) több oligopol modellt is alkalmaz az elektromos áram piacának leírására. Az árvezérlés modelljét pedig Gisser (1986) alkalmazta az amerikai ipari termelés során monopolista elemek révén keletkező holtteher-veszteség becslésére.

Kreps és Scheinkman (1983) úttörő munkája megmutatta, hogy egy kapacitás kiépítési szakaszt követő árverseny esetén, piaci kimenetelt tekintve, a Cournot modell valósul meg a piacon. Ezzel a Cournot modell egyfajta megalapozását adták, mivel Cournot modelljének hiányossága az egyensúlyi ár kialakulásának megmagyarázása, ugyanis nem világos, hogy ki találja meg a piactisztító egyensúlyi árat. Kreps és Scheinkman (1983) két időszakos modelljében viszont az árakat maguk a vállalatok alakítják ki és az egyensúlyi kapacitások megegyeznek a Cournot kibocsájtásokkal. Modelljük további erénye, hogy feloldják a teljesen eltérő eredményekre vezető mennyiségi és árverseny közötti különbségből adódó feszültségeket. Azonban mások rámutattak arra, hogy Kreps és Scheinkman (1983) eredménye jelentős mértékben függ a kiindulási feltevéseiktől, például Davidson és Deneckere (1986) megállapította, hogy az úgynevezett hatékony adagolási szabály arányos adagolási szabályra történő cseréje révén a két időszakos játék már nem a Cournot kimenetelt adja.

A döntési változó választását tekintve két eredménnyel szolgálunk. Először is a 4.2. tétel megmutatja, hogy egy nagyvállalat és sok kisvállalat esetén a mennyiségi és az ármodell egyensúlyi kimenetelei közötti különbség elhanyagolható. Másodjára a 6.3. tétel Kreps és Scheinkman (1983) eredményéhez hasonlóan a Cournot megoldás megvalósulását igazolja, egy olyan vegyes oligopólium segítségével, amelyben a vállalatok maguk választhatják meg döntési változóikat. Megjegyzendő, hogy amennyiben a döntési változó és annak értékének megválasztása egyszerre történik, akkor a Forchheimer-féle domináns vállalati árvezérlés modellje (lásd Scherer és Ross, 1990) is megvalósulhat.

Az oligopolelméleti irodalom szempontjából másik alapvető kérdést, a döntések időzítésének kérdését vizsgáló szakirodalom, elsősorban a kilencvenes évektől folyamatosan bővül. Gal-Or (1985), Dowrick (1986) és Boyer és Moreaux (1987) korai ez irányú munkái egzogén adott döntési sorrendeket vizsgáltak és meghatározták a vezető és a követő szerepkörök előnyösebbikét. Munkáik azonban nem oldották föl a kedvező szerepkörök betöltésére irányuló konfliktushelyzeteket, és így általában az endogén döntési sorrendet sem határozták meg. A konfliktushelyzet feloldását, és ezzel együtt a piacon kialakuló endogén döntési sorrendet, többek között Hamilton és Slutsky (1990), Deneckere és Kovenock (1992), van Damme és Hurkens (1999, 2004) és Matsumura (1999, 2002) határozta meg.

Az oligopol döntések időzítésének kérdését a homogén termékű Bertrand–Edgeworth oligopóliumok keretein belül vizsgáljuk. A Bertrand–Edgeworth típusú (elsődlegesen) ármodellek fő jellegzetessége a Bertrand modellel szemben, hogy a vállalatok nem kötelesek a náluk jelentkező kereslet maradéktalan kiszolgálására. Az ilyen típusú modellek alkalmazásának fő nehézsége a tiszta Nash-egyensúly esetleges hiánya és a kevert egyensúlyok nehéz kezelhetősége (lásd a 2.3. alfejezetet).

Az alapvető oligopol elméleti eredményeket felhasználva, a 3. fejezetben meghatározzuk a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth triopólium endogén döntési sorrendjét, valamint a szigorúan konvex költségfüggvényű, de kellően aszimmetrikus költségfüggvényű Bertrand–Edgeworth duopólium endogén döntési sorrendjét. Az első esetben a legnagyobb kapacitású vállalat lép elsőként, míg a második esetben a kevésbé hatékony vállalat. Mindkét eredmény Deneckere és Kovenock (1992) kapacitáskorlátos homogén termékű Bertrand–Edgeworth duopóliumok területén folytatott vizsgálatainak más-más irányú általánosításaiként fogható fel. A 3.1. alfejezet több kisvállalatot, a 3.2. alfejezet más alakú költségfüggvényeket enged meg.

Az ármodellek keretein belül az időzítési játékok gyakran az árvezérlés bizonyos modelljeit szolgáltatják. A 4. fejezetben a Forchheimer-féle domináns

vállalati árvezérlés modelljének kétféle játékelméleti megalapozását adjuk. Az előbbi Tasnádi (2004a) nyomán egy ármodellen alapuló, míg a másik Tasnádi (2010b) alapján egy mennyiségi modellen alapuló megalapozást adunk. A fejezet a duopolista árvezérlés lehetőségét is vizsgálja.

A Bertrand–Edgeworth modellkereten belül az ár és mennyiségi döntések két lehetséges sorrendje két nevezetés termelési módhoz vezet. Ha az árdöntések megelőzik a mennyiségi döntéseket, akkor rendelésre történő termelésről beszélünk, míg ha az árdöntések és a mennyiség döntések egyidejűleg történnek, akkor készletre történő termeléssel állunk szemben. A szimmetrikus duopol esetben levezetjük Tasnádi (2004b) nyomán, hogy szimmetrikus egyensúlyokban a két termelési mód azonos várható profitot eredményez (az 5.1. tétel). Továbbá, ha egyik játék szimmetrikus egyensúlyi kevert stratégiája sem elfajult, akkor első rendben sztochasztikusan dominálják a készletre történő termelési játék árai a rendelésre történő termelés árait (5.1. tétel).

Mivel a Bertrand–Edgeworth oligopólium kevert egyensúlya nehezen és csak speciális esetekben határozható meg, számos kérdés vár még megválaszolásra. Példának okáért a 3.1 triopóliumokra elért eredmény legalább részleges kiterjesztését — azaz milyen nevezetes sorrendek adódhatnak, illetve biztosan nem adódhatnak — érdemes megcélozni. Továbbá a termelési mód endogén megválasztását meg lehetne vizsgálni. Ilyen jellegű empirikus vizsgálatokat folytatott a közelmúltban Casaburi és Minerva (2011), amely szerint a differenciáltabb piacok a rendelésre történő termelésnek és a homogénebb piacok pedig a készletre történő termelésnek kedveznek.

Végül a 7. fejezetben Bertrand–Edgeworth típusú versenyt vizsgálunk az inputpiacon, amely egy a munkanélküliségre mikroelméleti magyarázatot adó modell (Tasnádi, 2005). A modellben a munkanélküliség a munkások vállalatokhoz történő nem hatékony hozzárendelése révén keletkezik. Nyilván nem a munkanélküliség globális magyarázatáról van szó, csupán egy a munkanélküliség irányába ható tényező modellszintű beazonosításáról.

2. fejezet

Homogén termékű oligopóliumok

Ebben a fejezetben röviden bemutatjuk az alapvető homogén termékű oligopóliumokat, amelyekre tiszta oligopol modellekként hivatkozunk. Nagyobb hangsúlyt fektetünk a Cournot és a Bertrand–Edgeworth oligopóliumokra, a disszertációban ezen modelleket és a rájuk vonatkozó eredményeket használjuk. A Bertrand modellre vonatkozó legfontosabb eredményeket a teljesség kedvéért röviden ismertetjük. A Stackelberg oligopóliumról rövidebben írunk, mivel ez csak a döntések sorrendjében tér el a Cournot modelttől, a döntések időzítésének kérdését pedig a következő fejezetekben részletesen tárgyaljuk.

2.1. Cournot oligopólium

A Cournot oligopóliumban a vállalatok egyszerre hozzák meg a mennyiségi döntéseiket és ezek után meghatározódik a piactisztító ár egy nem specifikált mechanizmuson keresztül. A piactisztító ár „kikiáltását” gyakran egy fiktív árverezőhöz kötik, illetve előszeretettel hivatkoznak Kreps és Scheinkman (1983) cikkére, amelyet a bevezetőben röviden leírtunk.

Ebben az alfejezetben két gyakori kérdésre térünk ki:

- az egyensúly létezésére, amelyre a 4. és a 6. fejezetben lesz szükségünk, továbbá

- az approximációs tételekre, amelyek (a parciális egyensúlyi modellkereten belül) a versenyzői egyensúlyt sokszereplős Cournot oligopóliumokkal közelítik, és amelyek gondolatmenete a 4.3. alfejezethez kapcsolódik.

2.1.1. Egyensúly létezése és egyértelműsége

A $P : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ inverz keresleti görbéről feltesszük, hogy kielégíti az alábbi feltételeket:

2.1. feltevés. P szigorúan monoton csökkenő a $[0, a]$ intervallumon, azonosan nulla az (a, ∞) intervallumon, kétszer differenciálható a $(0, a)$ intervallumon és konkáv a $[0, a]$ intervallumon.

A P függőleges tengelymetszetét jelölje b , azaz $P(0) = b$.

A termelői oldalon legyen n vállalat a piacon, amelyek költségfüggvényei teljesítik a következő feltételeket:

2.2. feltevés. A $c_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) költségfüggvények kétszer differenciálhatók, szigorúan monoton növekedők és konvexek a $[0, a]$ intervallumon.

A Cournot oligopólium kifizetőfüggvényei

$$\pi_i(\mathbf{q}) = P(q_1 + \dots + q_n) q_i - c_i(q_i)$$

minden $i \in \{1, \dots, n\}$ vállalatra.

Szidarovszky és Yakowitz (1977) igazolta, hogy a 2.1. és a 2.2. feltevések mellett a Cournot oligopóliumnak létezik egyértelmű megoldása. A továbbiakban elsősorban Szidarovszky és Yakowitz (1977) egzisztencia és unicitási tételét fogjuk alkalmazni.

Érdemes néhány további nevezetes egzisztencia, illetve unicitási tételt is megemlíteni. A létezés szempontjából Bamon és Fraysee (1985), Novshek (1985a), Amir (1996) és Forgó (1996) feltételei a fentieknél enyhébbek, és többek között megszabadulnak a költségfüggvények konvexitásának erős feltevésétől. Példának okáért Amir (1996) a keresleti függvény szigorú monoton

csökkenését és log-konkavitását, a költségfüggvények szigorú monoton növekedését és balról folytonosságát, továbbá a „módosított” profitfüggvények egy ponttól kezdődő negativitását követeli meg.¹ A feltételekhez a költségfüggvények konkavitását is hozzávéve adódik az egyensúly egyértelműsége is. Egy aktuális munkában Ewerhart (2011) az eddigi legáltalánosabb egzisztenciátételt adja, amelyet elsősorban az általánosság mellett az a törekvés vezérelt, hogy csak keresleti és költségfüggvényre vonatkozó kikötés szerepeljen az egzisztenciátételben, így Amir (1996) „módosított” profitfüggvényre vonatkozó feltevését kiváltja a keresleti függvény úgynevezett α -bikonkavitása.²

2.1.2. Approximációs tételek

A Cournot oligopólium egyik jó tulajdonsága, hogy amennyiben a piac kínálati oldalát elegendően sok kisvállalat alkotja, akkor a Cournot oligopólium egyensúlyi ára közel esik a kereslet és kínálat egyensúlyaként meghatározott kompetitív árhoz, azaz a Cournot oligopolisták közel határköltségen termelnek. A Cournot oligopóliumok ilyen jellegű viselkedését többek között, különböző feltételekből kiindulva, Frank (1965), Ruffin (1971), Novshek (1985b) és Campos és Padilla (1996) igazolták. A kérdéshez kapcsolódik a gyengébb kvázikompetitivitási tulajdonság teljesülése, amely csak annyit követel meg, hogy a vállalatok számának növekedésével csökkenjen a piaci ár. Ilyen irányú eredményeket ért el például Okuguchi (1973) és Amir és Lambson (2000). Vives (1999) számos további sokszereplős Cournot oligopóliumokra vonatkozó eredményt tárgyal.

Ebben a szakaszban egy könnyen igazolható és a 4.3. alfejezet gondolatmenetét tükröző saját approximációs eredményt mutatunk be. A fő feltevéseink az inverz keresleti görbe monoton csökkenő és konvex volta, továbbá a költ-

¹Léteznie kell olyan $\bar{Q}$ mennyiségnek, hogy $P(Q)Q - C_i(Q) < 0$ bármely $Q > \bar{Q}$ -ra és bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ -re.

²Az $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény α -bikonkáv, ha $[f(x)]^\alpha / \alpha$ az $x^{1-\alpha} / (1-\alpha)$ -nak konkáv függvénye. Megjegyzendő, hogy a $\alpha \rightarrow 0$ -val értelmezhető a 0-konkavitás, amely a logkonkavitással ekvivalens.

ségfüggvények szigorú konvexitása, valamint a vállalati kínálati görbék elhanyagolhatóvá válása az összpiaci kínálathoz képest, ha a vállalatok száma a végtelenbe tart. Eredményünk eltér Frank (1965) és Campos és Padilla (1996) konvergenciatételeitől abban, hogy nem korlátozzuk az eltérő költségfüggvényű vállalatok számát. Novshek (1985b) nagyon általános konvergenciatétele nem érvényes fixköltségek hiányában és jóval bonyolultabb az itt közölnél. Egyébként Campos és Padilla (1996) példát adott arra, hogy a szükséges feltételek hiányában Cournot oligopóliumokkal nem feltétlenül közelíthető a kompetitív piac.

A modellkeret

Az eredmény aszimptotikus természete miatt oligopol piacok sorozatát vesszük, amelynek az n -edik piacát n vállalat alkotja. Feltesszük, hogy a sorozat összes piacán a kereslet azonos. Az n -edik piacon az $i \in \{1, \dots, n\}$ vállalat költségfüggvényét és kompetitív kínálati függvényét jelölje rendre c_i^n és s_i^n . Ezért az n -edik oligopol piac megadható a

$$\langle \{1, \dots, n\}, (c_1^n, \dots, c_n^n), P \rangle$$

hármassal. Jelölje $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát. A sorozat Cournot oligopóliumainak, a következő feltétel miatt, létezni fog egyértelmű egyensúlya.

2.3. feltevés. A $c_i^n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) költségfüggvények kétszer differenciálhatók, nincsenek fixköltségek, szigorúan monoton növekedők és szigorúan konvexek. Továbbá $(c_i^n)'(0) = \lim_{q \rightarrow 0^+} (c_i^n)'(q) = mc_i^n(0) = 0$ és $\lim_{q \rightarrow \infty} mc_i^n(q) = \infty$ bármely $n \in \mathbb{N}$ -re és bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ vállalatra.

A fixköltségek hiánya garantálja, hogy a piacon jelenlévő vállalat mindegyike aktív legyen. A 2.3. feltevésből az is következik, hogy az i vállalat kompetitív kínálata, a továbbiakban röviden kínálata, a p áron $s_i^n(p) = (mc_i^n)^{-1}(p)$, mert az $\arg \max_{q \geq 0} pq - c_i^n(q)$ probléma egyértelműen megoldható bármely $p \geq 0$ áron a 2.3. feltevés alapján. Jelölje $S_c^n = \sum_{i=1}^n s_i^n$ a vállalatok aggregált kompetitív kínálatát és annak inverzét $MC_c^n = (S_c^n)^{-1}$.

A *mennyiségi profilnak* nevezett $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in [0, a]^n$ vektor megadja az n vállalat mennyiségi döntését. Az n -edik mennyiségi játékot az $O_q^n = \langle \{1, \dots, n\}, [0, a]^n, (\pi_i^n)_{i=1}^n \rangle$ struktúra adja meg, ahol

$$\pi_i^n(\mathbf{q}) = P(q_1 + \dots + q_n) q_i - c_i^n(q_i)$$

bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ vállalatra. Ha O_q^n kielégíti a 2.1. és a 2.3. feltevéseket, akkor Szidarovszky és Yakowitz (1977) egzisztencia tétele biztosítja, hogy az O_q^n oligopol játéknak egyértelműen létezik tiszta Nash-egyensúlya.

A konvergenciatételünkhöz szükségünk lesz még két további feltételre:

2.4. feltevés. Az $1, \dots, n$ vállalatok összkínálata az $(O_q^n)_{n=1}^\infty$ oligopol piacok sorozatának minden egyes piacán azonos.

A 2.4. feltevés miatt a vállalatok aggregált kompetitív kínálata $S_c = \sum_{i=1}^n s_i^n$ és az $MC_c = S_c^{-1}$ inverze független n -től.

2.5. feltevés. Létezik olyan c pozitív valós érték, hogy

$$s_i^n(p) < \frac{c}{n} S_c(p)$$

teljesül bármely $p \in (0, b]$ árra, bármely $n \in \mathbb{N}$ pozitív egészre és bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ vállalatra.

Az n növelésével a 2.4. és a 2.5. alapján az összes vállalat kompetitív kínálata tetszőlegesen kicsivé tehető a piaci összkínálathoz képest. Megjegyzendő, hogy ez utóbbi két feltevés az approximáció jellegére is rámutat. A feltételek alapján a kompetitív piacot egy egyre több nemcsak relatív értelemben, hanem egyben abszolút értelemben is kisebb súlyú vállalatból álló Cournot piaccal közelítjük. Tehát az eredményünk lényegében azt állítja majd, hogy egy minél több kisvállalatból álló Cournot piac lényegében úgy viselkedik, mint az azonos kínálatú és keresletű kompetitív piac. Másképpen nem arról van szó, hogy egyre több hasonló hatékonyságú vállalat piacra lépésével a kompetitív piac adódik. Az ilyen típusú approximációs tételekben a kínálati oldal fokozatosan bővül. Az

általunk alkalmazott megközelítéssel élt például Novshek (1985b). Számunkra ez a megközelítés a 4.3. alfejezet szempontjából azért előnyös, mert ott is egy adott kínálatú kompetitív szegéllyel rendelkező Forchheimer-féle modellt kívánunk közelítéssel megalapozni.

Végül jelölje p^c a piactisztító árat és a q^c az aggregált kompetitív kibocsátást, azaz

$$p^c = P(q^c) = MC_c(q^c).$$

A konvergenciatétel

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a 2.1., a 2.3., a 2.4. és a 2.5. feltételeket kielégítő $(O_q^n)_{n=1}^\infty$ oligopol piacok sorozatához egyértelműen létező egyensúlyi árak sorozata a p^c piactisztító árhoz tart.

2.1. állítás. *Elégítse ki az $O_q = (O_q^n)_{n=1}^\infty$ Cournot oligopóliumok sorozata a 2.1., a 2.3., a 2.4. és a 2.5. feltételeket. Ekkor az O_q^n oligopóliumnak egyértelműen létezik tiszta Nash-egyensúlya bármely $n \in \mathbb{N}$ -re, amelyet ha $(q_i^n)_{i=1}^n$ jelöl, akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n q_i^n\right) = p^c \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n q_i^n = S_c(p^c),$$

azaz a mennyiségi játékok sorozatának egyensúlyai a kompetitív kimenetelhez tartanak.

Bizonyítás. A feltevéseink lehetővé teszik Szidarovszky és Yakowitz (1977) egzisztencia és unicitási tételének alkalmazását tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re, amely alapján biztosított a $\mathbf{q}^n = (q_i^n)_{i=1}^n$ egyensúlyi mennyiségi profil létezése. Legyen $q_c^n = \sum_{i=1}^n q_i^n$ a vállalatok egyensúlyi össztermelése. A $(q_c^n)_{n=1}^\infty$ sorozat korlátos volta miatt létezik konvergens részsorozata. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $(q_c^n)_{n=1}^\infty$ már konvergens és a határértéke $\bar{q}_c$. A vállalatok $(q_i^n)_{i=1}^n$ egyensúlyi döntései szükségszerűen kielégítik a

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(\mathbf{q}^n) = P(q_c^n) + P'(q_c^n) q_i^n - mc_i^n(q_i^n) = 0 \quad (2.1)$$

elsőrendű feltételeket.

Azt állítjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} q_i^n = 0$, ahol az a_i^n ($i, n \in \mathbb{N}$ és $i \leq n$) kettős sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i^n = a$ teljesül, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : |a_i^n - a| < \varepsilon.$$

A (2.1) feltételből és a 2.5. feltevésből

$$\begin{aligned} q_i^n &= s_i^n (P(q_c^n) + P'(q_c^n) q_i^n) < \\ &< \frac{c}{n} S_c (P(q_c^n) + P'(q_c^n) q_i^n) \leq \frac{c}{n} S_c(b) \end{aligned} \quad (2.2)$$

bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ -re. Ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} q_i^n = 0$.

Legyen $p^n = P(q_c^n)$ és jelölje $\bar{p}$ a $(p^n)_{n=1}^\infty$ sorozat határértékét. Nyilván $\bar{p} = P(\bar{q}_c)$ teljesül P folytonossága miatt. Ezért határértékeket véve a (2.1) feltételben, adódik

$$\bar{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} m c_i^n(q_i^n), \quad (2.3)$$

P' korlátosságának figyelembe vételével. Vegyük észre, hogy (2.3) szerint

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall i \in \{1, \dots, n\} : |m c_i^n(q_i^n) - \bar{p}| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Válasszuk a $\hat{q}_i^n$ és $\tilde{q}_i^n$ értékeket úgy, hogy $m c_i^n(\hat{q}_i^n) = \bar{p} - \varepsilon$ és $m c_i^n(\tilde{q}_i^n) = \bar{p} + \varepsilon$. A $\hat{q}_i^n \leq q_i^n \leq \tilde{q}_i^n$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\hat{q}_c^n \leq q_c^n \leq \tilde{q}_c^n$, amiből pedig $MC_c(\hat{q}_c^n) \leq MC_c(q_c^n) \leq MC_c(\tilde{q}_c^n)$ adódik. Mivel $MC_c(\hat{q}_c^n) = \bar{p} - \varepsilon$ és $MC_c(\tilde{q}_c^n) = \bar{p} + \varepsilon$ az MC_c folytonosságát felhasználva

$$\bar{p} = MC_c(\bar{q}_c). \quad (2.5)$$

Tehát $\bar{q}_c$ kielégíti a $P(q) = MC_c(q)$ egyenlőséget, amelynek létezik egyértelmű megoldása a 2.1. és a 2.3. feltevések alapján. Ezért a $(q_c^n)_{n=1}^\infty$ sorozatnak csak egyetlen torlódási pontja lehet (2.5) alapján, amiből $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sum_{i=1}^n q_i^n) = p^c$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n q_i^n = S_c(p^c)$ ($\bar{q}_c = q^c$ és $\bar{p} = p^c$) következik. $\square$

2.2. Bertrand oligopólium

Homogén termékű piacon alapvetően kétfajta árjátékot különböztethetünk meg. Az egyiket Bertrand (1883) vezette be, amely feltételezi, hogy a vállalatok kötelesek a teljes keresletet kielégíteni, még akkor is, ha ez nyilván nem áll valamelyik vállalat érdekében. Bevezető mikroökonómia tankönyvekből jól ismert, hogy konstans és azonos egységköltségek esetén két vállalat közötti verseny már kikényszeríti a kompetitív megoldást, azaz a piaci ár megegyezik a vállalatok egységköltségével. Ezt az intuícióval ellentétes megoldást szokás Bertrand-paradoxonnak nevezni. A klasszikus Bertrand-paradoxont produkáló iskolapéldában két vállalat, D keresleti görbe és c egységköltség esetén az $i \in \{1, 2\}$ vállalat profitfüggvénye

$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_i - c)D(P_i), & \text{ha } p_i < p_j; \\ (p_i - c)\frac{D(p_i)}{2}, & \text{ha } p_i = p_j; \\ 0, & \text{ha } p_i > p_j; \end{cases}$$

ahol j vállalat az i vállalat versenytársa. Azonban a konstans egységköltségek feltételezése szükséges a paradoxonhoz, mivel csökkenő hozadékok (Dastidar, 1995) és növekvő hozadékok (Vives, 1999) már feloldják a paradoxont. Továbbá növekvő hozadékok mellett, például állandó határköltségek és pozitív fixköltségek esetén, Hoernig (2007)³ és Baye és Kovenock (2008) megmutatta, hogy nemcsak a tiszta Nash-egyensúly hiánya állhat elő, hanem még a kevert Nash-egyensúly hiánya is. A közelmúltban a tiszta Nash-egyensúly létezésére vonatkozóan szükséges és elégséges feltételt adott Saporiti és Coloma (2010) fixköltségek fennállása esetén.

Visszatérve a klasszikus állandó egységköltségek esetére, Baye és Morgan (1999) megmutatta, hogy a monopolista profitok korlátossága szükséges a Bertrand-paradoxon előfordulásához, míg Kaplan és Wettstein (2000) valamelyest eltérő feltételek mellett igazolta, hogy nem korlátos bevételek szükségesek és elégségesek a nem pozitív profitú kevert Nash-egyensúly létezéséhez.

³Hoernig (2007) megvizsgálta az áregyenlőségek mellett alkalmazott különböző törési szabályok hatását a Bertrand-paradoxonra.

A Bertrand oligopóliumról további részleteket nem közlünk, mivel elemzéseinkben a következő alfejezetben tárgyalandó Bertrand–Edgeworth oligopóliumokat részesítjük előnyben.

2.3. Bertrand–Edgeworth oligopólium

Az árjátékok második alaptípusában, az úgynevezett Bertrand–Edgeworth oligopóliumokban, a vállalatok nem kötelesek kínálati áraikon a teljes kereslet kielégítésére. A disszertációban található legtöbb eredmény valamilyen módon kapcsolódik a Bertrand–Edgeworth típusú árjátékokhoz. Az oligopólium elnevezése onnan ered, hogy Edgeworth (1925) a Bertrand-paradoxon feloldására Bertrand (1883) modelljébe kapacitáskorlátokat vezetett be, amelyek miatt a vállalatok nem feltétlenül voltak képesek kínálati áraikon a náluk jelentkező kereslet maradéktalan kielégítésére. Ismeretes, hogy lineáris keresleti görbe és kis vagy nagy kapacitások esetén a Bertrand–Edgeworth duopóliumnak létezik tiszta Nash-egyensúlya (lásd például Tirole, 1988 vagy Wolfstetter, 1999). Azonban egy köztes kapacitás tartományban a játéknak csak nem elfajult kevert Nash-egyensúlya van. Az arányos adagolási szabály mellett a kevert Nash-egyensúlyt zárt alakban Beckmann (1965) vezette le, továbbá hatékony adagolási szabály mellett pedig Levitan és Shubik (1972). Dasgupta és Maskin (1986b) megmutatta a kevert Nash-egyensúly létezését arányos adagolási szabály esetén olyan keresleti görbékre, amelyek mindkét tengelyt metszik. Továbbá Maskin (1986) ennél még általánosabb feltételek mellett igazolta a kevert Nash-egyensúly létezését.

Ebben a fejezetben formálisan definiáljuk a Bertrand–Edgeworth-játékot, amely igényli az adagolási szabály fogalmának bevezetését. Majd röviden ismertetjük a Bertrand–Edgeworth-játék tiszta és kevert Nash-egyensúlyára vonatkozó fontosabb eredményeket.

2.3.1. Adagolási szabályok

A Bertrand–Edgeworth oligopólium megadása a vállalatok eltérő áron történő kínálata miatt egy úgynevezett adagolási szabályt igényel. Jelölje a továbbiakban $\mathcal{D}$ a szigorúan monoton csökkenő keresleti görbék halmazát.

Az adagolási szabályokat előbb duopol piacokon vezetjük be, amely a $j \in \{1, 2\}$ vállalatnál jelentkező keresletet adja meg. A viszonylag általános kombinált adagolási szabályokat értelmezzük, amelyeket Tasnádi (1999b) vezetett be.

2.1. definíció. A $\Delta : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ függvény egy *kombinált adagolási szabály* $\lambda \in [0, 1]$ paraméterrel, ha a $j \in \{1, 2\}$ vállalatnál

$$\Delta_j(D, p_1, p_2, q_1, q_2) = \begin{cases} D(p_j) & \text{ha } p_j < p_i, i \neq j; \\ \frac{q_j}{q_1 + q_2} D(p_j) & \text{ha } p_j = p_i, i \neq j; \\ \max(D(p_j) - \alpha(p_i, p_j)q_i, 0) & \text{ha } p_j > p_i, i \neq j; \end{cases}$$

kereslet jelentkezik, ahol $\alpha(p_i, p_j) = (1 - \lambda) \frac{D(p_j)}{D(p_i)} + \lambda$.

Mielőtt röviden megindokolnánk a kombinált adagolási szabály alkalmazásának jogosságát, előbb ismertetjük az irodalomban leggyakrabban alkalmazott két adagolási szabályt, a hatékony és az arányos adagolási szabályt,⁴ amelyek a kombinált adagolási szabály speciális esetei. A 2.1. definícióban a $\lambda = 1$ választással megkapjuk a hatékony adagolási szabályt, míg $\lambda = 0$ választással az arányos adagolási szabályt. A hatékony adagolási szabály mellett az alacsonyabb áron kínáló duopolista előbb a magasabb rezervációs árú fogyasztókat szolgálja ki. Ezért a keresleti görbének az alacsonyabb áron értékesített termékmennyiséggel való eltolásával megkapjuk az úgynevezett reziduális keresleti görbét, amely megadja a magasabb ár függvényében a magasabb árat megállapító vállalatnál jelentkező keresletet. A hatékony elnevezést indokolja, hogy adott árak és mennyiségek esetén ez az adagolási szabály maximalizálja

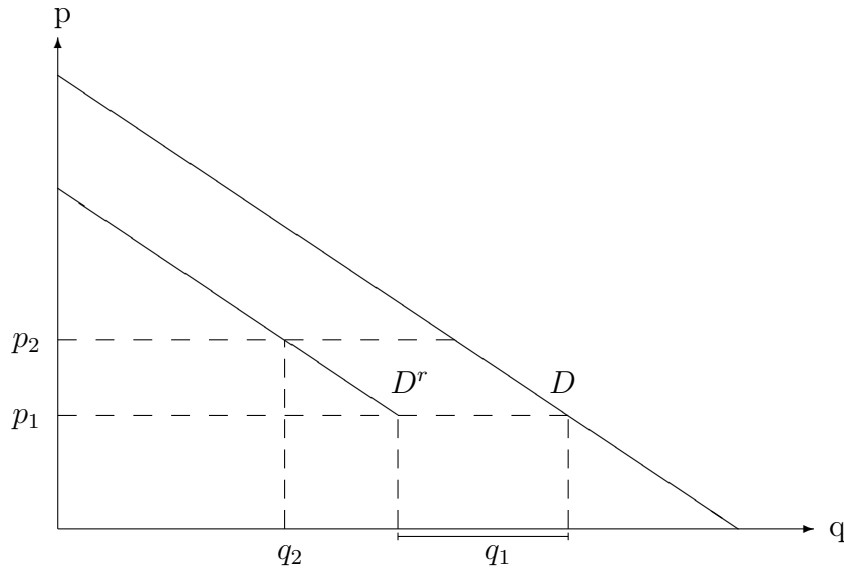
⁴Az adagolási szabályok alkalmazhatósági feltételeivel részletesen foglalkozik Tasnádi (1999c).

a fogyasztói többletet (lásd Tirole, 1988). A hatékony adagolási szabályt fontossága miatt külön is megadjuk.

2.2. definíció. A $\Delta : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ adagolási szabály *hatékony*, ha bármely $j = 1, 2$ vállalat kereslete az alábbi:

$$\Delta_j(D, p_1, q_1, p_2, q_2) = \begin{cases} D(p_j) & \text{ha } p_j < p_i, i \neq j; \\ \frac{q_j}{q_1 + q_2} D(p_j) & \text{ha } p_j = p_i, i \neq j; \\ (D(p_j) - q_i)^+ & \text{ha } p_j > p_i, i \neq j. \end{cases}$$

A hatékony adagolási szabályt a 2.3.1 ábra szemlélteti, amelyben megtalálható a magasabb árat megállapító vállalat reziduális kereslete is. Látható, hogy a keresleti görbe q_1 mennyiséggel balra történő eltolásával adódik a reziduális keresleti görbe, ahol feltettük, hogy $p_1 < p_2$.



2.1. ábra. Hatékony adagolási szabály

Az arányos adagolási szabály esetén a reziduális kereslet bármely p_i árnál magasabb áron a piaci keresleti görbe $1 - q_i/D(p_i)$ -szerese, ami mögött az húzódik meg, hogy a piaci kereslettel arányosan csökken a reziduális kereslet.

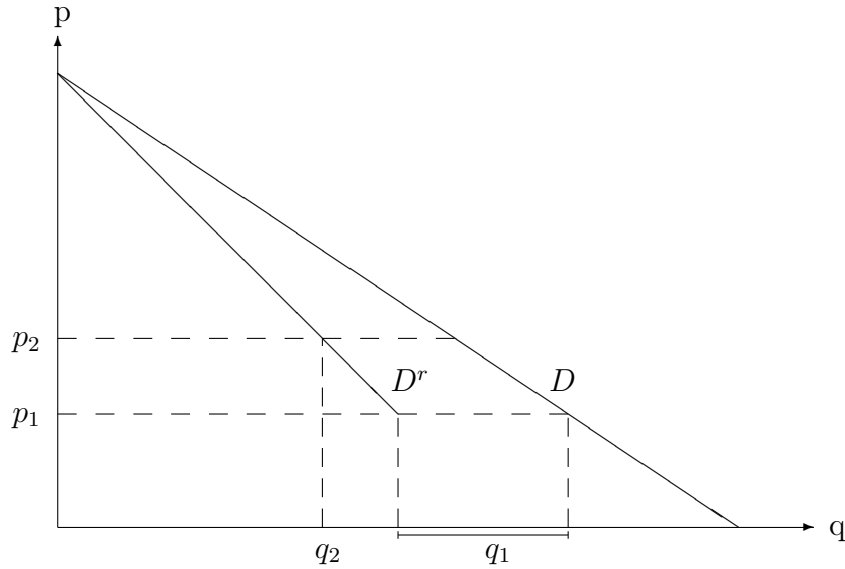
2.3. definíció. A $\Delta : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ adagolási szabály *arányos*, ha

bármelyik $i = 1, 2$ vállalat kereslete

$$\Delta_j(D, p_1, q_1, p_2, q_2) = \begin{cases} D(p_j) & \text{ha } p_j < p_i, i \neq j; \\ \frac{q_j}{q_1 + q_2} D(p_j) & \text{ha } p_j = p_i, i \neq j; \\ \left(\left(1 - \frac{q_i}{D(p_i)}\right) D(p_j) \right)^+ & \text{ha } p_j > p_i, i \neq j \end{cases}$$

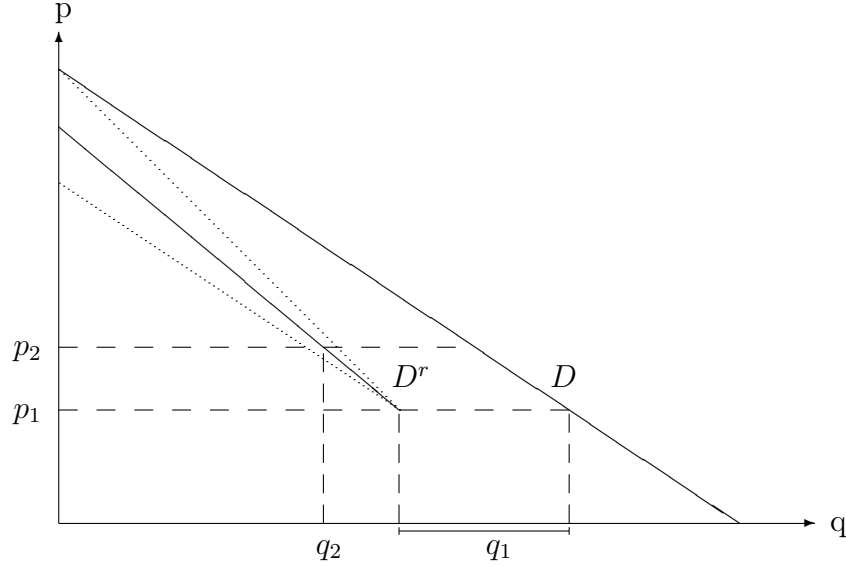
kifejezéssel adott.

Az arányos adagolási szabályt a 2.2 ábra szemlélteti, továbbá az arányos adagolási szabály levezetéseit illetően lásd Tasnádi (1998b).



2.2. ábra. Arányos adagolási szabály

Végül az elsőként definiált kombinált adagolási szabályt a 2.3 ábrában szemléltetjük. Röviden leírunk két olyan piaci helyzetet, amikor a kombinált adagolási szabály szerint történik a fogyasztók kiszolgálása a piacon. Először tegyük fel, hogy a keresletet n azonos egyéni $d(\cdot)$ keresleti görbével rendelkező fogyasztó teszi ki, akiket érkezési sorrend szerint szolgálnak ki. Induljunk ki egy kellően nagy n -ből, hogy az egyetlen csak részben kielégített fogyasztó kereslete elhanyagolhatóvá váljon. Legyen továbbá $p_1 < p_2$ és $q_1 \leq D(p_1) = nd(p_1)$. Az 1 vállalat $m = \lfloor q_1/d(p_1) \rfloor$ fogyasztót képes maradéktalanul kielégíteni. Rögzítsünk egy $\lambda \in [0, 1]$ értéket. Tegyük fel, hogy az 1 vállalat $m_1 = \lfloor (1-\lambda)q_1/d(p_1) \rfloor$



2.3. ábra. Kombinált adagolási szabály

fogyasztó egyéni keresletét maradéktalanul kielégíti és a többi fogyasztó csak $\frac{q_1 - m_1 d(p_1)}{n - m_1}$ mennyiségben részesül p_1 áron. Ebben az esetben

$$D^r(p_2) \approx D(p_2) - (1 - \lambda)q_1 \frac{D(p_2)}{D(p_1)} - \lambda q_1$$

a reziduális kereslet, ha n elegendően nagy. A kombinált adagolási szabály azonos egyéni keresleti görbéjű fogyasztók esetén megadott levezetése, a hatékony és az arányos adagolási szabályok hasonló körülmények közötti levezetéseiből származtatható (lásd Davidson és Deneckere, 1986). Megjegyzendő, hogy akkor is a kombinált adagolási szabály adódik azonos keresletű fogyasztók esetén, ha minden egyes fogyasztó p_1 áron $\frac{q_1}{n}(\lambda + (1 - \lambda)d(p_2)/d(p_1))$ mennyiséget vásárolhat.

Egy másik piaci környezetben feltesszük, hogy a $D(p)$ keresleti görbe kontinuum sok rugalmatlan és elfajult egyéni keresleti görbéjű (azaz mindenki egyéni mennyiséget hajlandó vásárolni a saját rezervációs ára alatti áron) fogyasztók összessége alkotja. Tegyük fel, hogy első körben az 1 vállalat $(1 - \lambda)q_1$ mennyiséget érkezési sorrend szerint ad el. Az ily módon kiszolgált fogyasztók a p_1 áron vásárolni kívánó fogyasztók egy véletlen mintájának tekinthetők. Ezért a p_2 áron vásárolni hajlandó és p_1 áron termékhez nem jutott fogyasztók

mennyisége $D(p_2) - (1 - \lambda)q_1 D(p_2)/D(p_1)$. Második körben a fennmaradó λq_1 mennyiséget az 1 vállalat a magasabb rezervációs árú fogyasztóknak értékesíti. Az így leírt p_1 áron történő kiszolgálási mód szintén elvezet a λ paraméterű kombinált adagolási szabályhoz.

Érdemes még megemlíteni, hogy ha a keresleti oldal egy $u(x, m) = Ax^{(1-\lambda)}m^\lambda$ alakú Cobb-Douglas hasznossági függvénnyel reprezentálható, ahol x a duopolisták termékéből fogyasztott mennyiség és m egy összetett jószágból (pénzből) fogyasztott mennyiség, akkor szintén a kombinált adagolási szabályt kapjuk (részleteket illetően lásd Tasnádi, 1998a).

Eddig kizárólag duopol piacokkal foglalkoztunk. A kombinált adagolási szabály rekurzívan kiterjeszthető oligopóliumokra úgy, hogy sorra haladunk az egyre nagyobb kínálati árak felé, azaz vesszük a legkisebb árú termelőt és az általa meghagyott reziduális keresletből határozható meg a második legkisebb árú termelő kereslete, majd az általa a harmadik legkisebb árú termelőnek meghagyott reziduális kereslet, és így tovább. Explicit kifejezések adhatóak hatékony és arányos adagolási szabály esetén. A hatékony adagolási szabály esetén

$$\Delta_j(D, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \frac{q_j}{\sum_{p_i=p_j} q_i} \left(D(p_j) - \sum_{p_i < p_j} q_i \right)^+$$

adódik és az arányos adagolási szabályra

$$\Delta_j(D, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \frac{q_j}{\sum_{p_i=p_j} q_i} \left(1 - \sum_{p_i < p_j} \frac{q_i}{D(p_i)} \right)^+ D(p_j),$$

adódik egy n vállalatos oligopol piacon.

2.3.2. Az oligopol modell

Az oligopol piac keresleti oldala a keresleti függvénnyel és az adagolási szabállyal adott. A keresleti görbével szemben leggyakrabban az alábbi követelményeket támasztjuk.

2.6. feltevés. Metssze a $D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ keresleti görbe a vízszintes tengelyt a mennyiségnél és a függőleges tengelyt b áron. Legyen D szigorúan monoton csökkenő, folytonos a $[0, b]$ intervallumon, kétszer folytonosan differenciálható a $(0, b)$ intervallumon. Továbbá legyen D jobbról folytonos 0-ban, balról folytonos b -ben és $D(p) = 0$ bármely $p \geq b$ -re.

2.7. feltevés. A monopolista bevételi függvénye $pD'(p) + D(p)$ szigorúan monoton csökkenő $[0, b]$ -n.

A 2.6. és a 2.7. feltevéseket teljesítő monopolistának létezik egyértelmű bevétel maximalizáló ára.

A továbbiakban a piac kínálati oldalát tekintve két különböző típusú költségfüggvényt fogunk vizsgálni. Jelölje $n \geq 2$ a piacon versenyző vállalatok számát. Az első esetben röviden a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth oligopóliumról fogunk beszélni.

2.8. feltevés. A piacon versenyző n oligopolista egységköltsége nulla a k_i pozitív kapacitáskorlátig ($i = 1, \dots, n$). Mindegyikük megadhatja a p_i árát és a q_i mennyiségét szekvenciálisan vagy szimultán.

A második esetre a szigorúan konvex költségfüggvényű Bertrand–Edgeworth oligopóliumként fogunk hivatkozni.

2.9. feltevés. Mindegyik $i = 1, \dots, n$ vállalat $c_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvénye kétszer folytonosan differenciálható, szigorúan növekedő és szigorúan konvex.

Emlékeztetőül az i vállalat kompetitív kínálata, röviden kínálata, p áron $s_i(p) = \arg \max_{q \geq 0} pq - c_i(q)$, amiből következik, hogy $s_i(p) = (mc_i)^{-1}(p)$.⁵ A p^c piactisztító ár a $\sum_{i=1}^n s_i(p^c) = D(p^c)$ implicit egyenlettel értelmezett.

A Bertrand–Edgeworth oligopólium teljes megadásához még meg kell adnunk a vállalatok profitfüggvényeit. Készletre történő termelés esetén az i vállalat értékesítése vagy a saját q_i termelése vagy a $\Delta_i(D, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ kereslete által behatárolt. Továbbá q_i mennyiség megállapítása valóban q_i mennyiség

⁵Néhány ár mellett nem létezik egyértelmű profitmaximalizáló mennyiség. Ez esetben $s_i(p)$ -vel a legnagyobb profitmaximalizáló mennyiséget jelöljük.

letermelését jelenti, így ha $q_i > \Delta_i(D, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$, akkor felesleges készletek keletkeznek. Tehát az i vállalat profitfüggvénye készletre történő termelés esetén

$$\pi_i((p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)) = p_i \min \{ \Delta_i(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), q_i \} - c_i(q_i).$$

Ezzel szemben rendelésre történő termelés esetén az i vállalat sosem termel a terméke iránt jelentkező keresletnél többet. Ezért a profitfüggvénye a $\pi_i((p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)) =$

$$p_i \min \{ \Delta_i(D, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), q_i \} - c_i(\min \{ \Delta_i(D, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), q_i \}).$$

kifejezéssel adott. Ebben az esetben az i vállalatnak $q_i = s_i(p_i)$ mennyiséget érdemes termelnie a 2.8. vagy a 2.9. feltevés alapján. Tehát a rendelésre történő termelési játék tulajdonképpen egy árjátékra redukálódik, amiért szokás a Bertrand–Edgeworth-játéknak ez utóbbi válfaját a Bertrand-játékhoz hasonlóan árjátéknak nevezni.

2.3.3. Tiszta és kevert Nash-egyensúly

Ebben a szakaszban röviden összefoglaljuk a Bertrand–Edgeworth játék tiszta és kevert egyensúlyára vonatkozó legfontosabb eredményeket.

A kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth játéknak kis és nagy kapacitáskorlátok mellett van tiszta Nash-egyensúlya. Ha a keresleti görbe mindkét tengelyt metszi, akkor van egy úgynevezett közepes kapacitástartomány, amelyben a játéknak nincsen tiszta Nash-egyensúlya (lásd például Wolfstetter, 1999). Megjegyzendő, hogy amennyiben a keresleti görbe nem metszi a tengelyeket, mint például hiperbolikus keresleti görbéknél, akkor nem feltétlenül létezik ilyen köztes tiszta Nash-egyensúly nélküli kapacitástartomány (lásd Tasnádi, 1999a). Tiszta Nash-egyensúly létezése esetén a duopolisták a termékeiket a piactisztító áron értékesítik.

A szigorúan konvex költségfüggvényű Bertrand–Edgeworth duopóliumban még rosszabb a helyzet. Ha a költség- és keresleti függvények között fennáll

minden $i \in \{1, \dots, n\}$ -re a $0 \leq c'_i(0) = \lim_{p \rightarrow 0+0} c'_i(p) < D(0)$ kapcsolat, akkor a Bertrand–Edgeworth duopóliumnak nincsen tiszta Nash-egyensúlya (lásd például Tasnádi, 1999c).

A kevert Nash-egyensúly létezésére vonatkozó Glicksberg-egzisztenciátétel (1952) nem alkalmazható a Bertrand–Edgeworth oligopóliumra, mivel a játék profitfüggvényei nem folytonosak. Az első nem folytonos kifizetőfüggvényű játékokra vonatkozó egzisztencia tétel Dasgupta és Maskin (1986a) eredménye, amelyet egyben a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth-játékokra is alkalmazták (Dasgupta és Maskin, 1986b). Maskin (1986) szigorúan konvex költségfüggvényű Bertrand–Edgeworth-játékokra is igazolta a kevert Nash-egyensúly létezését. Dasgupta és Maskin (1986a) egzisztenciátételét egy sor további nem folytonos kifizetőfüggvényű játékokra vonatkozó egzisztenciátétel követett, mint például Simon (1987), Reny (1999) vagy a közelmúltban Bagh (2010) tételei. Továbbá Bagh (2010 5.2. tétel) igazolja, hogy a növekvő, folytonos, szigorúan konvex költségfüggvényű és folytonos keresleti függvényű Bertrand–Edgeworth oligopóliumnak meglehetősen általános adagolási szabályok (beleértve a kombinált adagolási szabályokat is) és törési szabályok esetén van kevert Nash-egyensúlya.

A Bertrand–Edgeworth oligopólium kevert Nash-egyensúlyának meghatározása általában egy nehéz feladat. Zárt alakban megadott kevert Nash-egyensúlyi megoldás csak nagyon speciális esetben ismert, nevezetesen a konstans egységköltségű kapacitáskorlátos esetben.

Elsőként Beckmann (1965) határozta meg — lineáris keresleti függvény, konstans és azonos egységköltségek, azonos kapacitáskorlátok és arányos adagolási szabály mellett — a Bertrand–Edgeworth duopólium kevert Nash-egyensúlyát.⁶ Beckmann (1965) keresleti függvényre és költségfüggvényre alkalmazott feltételei mellett, de hatékony adagolási szabályt alkalmazva Levitan és Shubik (1972), határozta meg a Bertrand–Edgeworth duopólium kevert Nash-egyensúlyát. A hatékony adagolási szabálya mellett a számítások menete

⁶A számításaiban kisebb javítható hibát vétett (lásd például Osborne és Pitchik, 1986).

jóval egyszerűbb. Beckmann (1965) összes feltevését megtartva, Cheviakov és Hartwick (2005) megmutatták, hogy a kapacitáskorlát növelésével csökken a vállalatok várható profitja.

Davidson és Deneckere (1986) megadta a kevert Nash-egyensúlyt meghatározó differenciálegyenletet, arányos adagolási szabályt, szigorúan csökkenő keresleti függvényt, nulla egységköltséget feltételezve és aszimmetrikus kapacitásokat is megengedve, ami az egyensúly implicit alakban történő megadását jelentette Beckmann-nál (1965) általánosabb feltételek mellett. Davidson és Deneckere (1986) eredményét Allen és Hellwig (1993) általánosították abban az értelemben, hogy a kevert Nash-egyensúlyi stratégiák tartóit elemezték behatóan.

Vives (1986) az oligopol esetre általánosította Levitan és Shubik (1972) eredményét szigorúan monoton csökkenő, konkáv keresleti függvényekre és azonos kapacitások feltételezése mellett.

2.10. feltevés. Legyen a D keresleti függvény konkáv a $[0, b]$ intervallumon.

2.11. feltevés. Az n oligopolista kapacitáskorlátja azonos, azaz $k = k_i > 0$ bármely $i = 1, \dots, n$ -re.

Ekkor a j vállalat költségfüggvénye:

$$c_j(q) = \begin{cases} 0, & \text{ha } q_j \in [0, k], \\ \infty, & \text{ha } q_j \in (k, \infty). \end{cases}$$

A 2.6., a 2.8., a 2.10. és a 2.11. feltevések mellett a Cournot oligopóliumnak létezik egyértelmű szimmetrikus tiszta Nash-egyensúlya. Az ehhez tartozó vállalati kibocsátásokat jelölje y .

2.1. tétel (Vives, 1986). *A 2.6., a 2.8., a 2.10., a 2.11. feltevések és hatékony adagolási szabály mellett a Bertrand–Edgeworth oligopólium szimmetrikus egyensúlya:*

1. ha $k \leq y$, akkor mindegyik vállalat $p_j^* = P(nk)$ árat állapít meg és $q_j^* = k$ mennyiséget értékesít;

2. ha $y < k < a/(n-1)$, akkor a vállalatok a szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyban az árakat a

$$\phi(p) = \begin{cases} \left(\frac{k-\pi/p}{nk-D(p)} \right)^{1/(n-1)} & \text{ha } p \in [p', p''], \\ 0 & \text{ha } p \in [0, p'] \cup (p'', b], \end{cases} \quad (2.6)$$

eloszlásfüggvény szerint határozzák meg, ahol $p'' = \arg \max_{p \in B} \{p(D(p) - (n-1)k)\}$, $\pi = p''(D(p'') - (n-1)k)$ és $p' = \pi/k$;

3. ha $k \geq a/(n-1)$, akkor mindegyik vállalat $p^* = 0$ árat állapít meg.

Megjegyzendő, hogy a hatékony adagolási szabály esetén azért könnyebb a kapacitáskorlátos kevert Nash-egyensúlyt meghatározni, mert a reziduális kereslet csak az alacsonyabb áron értékesített mennyiségtől függ és az alacsonyabb ártól nem.

Mivel a kevert Nash-egyensúly meghatározása komoly nehézségekbe ütközik, ezért bármilyen további információ a kevert Nash-egyensúlyra vonatkozóan önmagában hasznosnak bizonyulhat. Sok alkalmazás szempontjából már a vállalatok kevert Nash-egyensúlybeli profitjának ismerete elégséges. A közelmúltban Hirata (2009) és De Francesco és Salvadori (2010) behatárolta a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth oligopolisták egyensúlyi profitjait és speciálisan triopóliumokra a rendelésre történő termeléses változat egyensúlyi profitjait pontosan megadták. Mivel ez utóbbi eredményt a 3.1 alfejezetben alkalmazni fogjuk a triopolisták egyensúlyi profitjait megadó tételt részletesen ismertetjük.

Feltesszük, hogy a keresleti görbe mindkét tengelyt metszi, szigorúan monoton csökkenő és konkáv azon az intervallumon, amelyen a kereslet pozitív. A vállalatok állandó és megegyező egységköltségeit nullára normáljuk. Tehát teljesüljenek a 2.6., a 2.8. és a 2.10. feltevések. Legyen

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_i &= \max_{p \in [0, b]} p \left(D(p) - \sum_{j \neq i} k_j \right)^+ \text{ és} \\ p_i^m &= \arg \max_{p \in [0, b]} p \left(D(p) - \sum_{j \neq i} k_j \right)^+ \end{aligned}$$

rendre a profitmaximalizáló profit és ár, ahol az $i \in \{1, 2, 3\}$ kapacitáskorlátjába nem ütköző vállalat a legmagasabb árat megadó vállalat, és ezért a reziduális keresletet szolgálja ki. Tegyük fel, hogy $k_1 \geq k_2 \geq k_3$. Ekkor könnyen ellenőrizhetően $p_1^m \geq p_2^m \geq p_3^m$. Továbbá legyen $p_i^d \min\{k_i, D(p_i^d)\} = p_i^m \left(D(p_i^m) - \sum_{j \neq i} k_j\right)^+$ az az ár, amelyen az $i \in \{1, 2, 3\}$ vállalat közömbös a teljes kereslettel való szembesülés és a reziduális keresleti görbe mentén maximalizáló profit választása között. A 6. fejezetbeli 6.4. lemma igazolja, hogy n vállalat esetén a $(p_i^d)_{i=1}^n$ sorozat monoton fogyó, és így $p_1^d \geq p_2^d \geq p_3^d$.

Az alábbi feltétel biztosítja, hogy valóban ne elfajult kevert Nash-egyensúlya legyen a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth-játéknak.

2.12. feltevés. $p_1^m > p^c$.

A következő tétel tartalmazza a 3.1. alfejezetben alkalmazott eredményt, amely egy speciális esete a Hirata (2009) és De Francesco és Salvadori (2010) által közölt, egymástól függetlenül elért eredménynek.

2.2. tétel (Hirata, 2009 és De Francesco és Salvadori, 2010).

Hatékony adagolási szabály esetén a 2.6., a 2.8., a 2.10. és a 2.12. feltételek teljesülése mellett, ha $k_1 > k_2 = k_3$, akkor $(\pi_1^, \pi_2^*, \pi_3^*)$ egyensúly profitok megegyeznek a $(\bar{\pi}_1, p_1^d k_2, p_1^d k_3)$ sorozattal.*

2.4. Stackelberg oligopólium

A mikroökonómia könyvekből jól ismert Stackelberg duopólium annyiban tér el a Cournot modelltől, hogy a duopolisták egymás után hozzák meg a döntéseiket. Számunkra ez a modell abból a szempontból érdekes, hogy összehasonlíthatóvá teszi a vezető (elsőként lépő) és a követő (másodjára lépő) helyzetét. Mivel a vezető az első időszakban az egyensúlyi Cournot kibocsátást is választhatja, ezért általában nem járhat a Cournot duopolistánál, illetve a követőnél rosszabbul.

A Stackelberg duopóliumnak többféle kiterjesztése is elképzelhető, mivel az oligopóliumok vizsgálata számos lehetőséget felvet, ugyanis n vállalat léphetne m különböző időszakban. Az egyik szélsőséges esetet Anderson és Engers (1992) vizsgálták, amikor is az összes vállalat egymás után lép ($m = n$), amelyet hierarchikus Stackelberg oligopóliumnak neveznek. Ebben a környezetben megmutatták, hogy az első lépő profitja alacsonyabb is lehet a Cournot egyensúlyi profitnál. A másik sokat vizsgált szélsőséges esetben a vállalatok két időszak közül választhatnak ($m = 2$), amely a mindkét időszakban több szimultán lépő vállalat miatt nehezen elemezhető. Sherali (1984) az ilyen két időszakos mennyiségi játékok egyensúlyának létezését, egyértelműségét és meghatározását vizsgálja. A sok ilyen irányú munka közül Julien (2011) eredményét emelnénk ki, amely részletesen tárgyalja, hogy mikor ér el egy vállalat az első időszakban első lépőként több profitot, mint Cournot oligopolistaként. Például duopol esetben

- lineáris keresleti görbe és állandó egységköltségek mellett a Stackelberg piacvezető profitja magasabb a Cournot duopolistáénál,
- hiperbolikus keresleti görbe mellett a Stackelberg vezető és követő profitja is rendre megegyezik a Cournot profitjukkal, továbbá
- egy speciális nem konstans rugalmasságú keresleti görbe mellett⁷ mindkét Stackelberg duopolista profitja alacsonyabb a megfelelő Cournot profitoknál, ráadásul a követő jobban jár a vezetőnél.

A 4.3. alfejezetben a Forchheimer-féle domináns vállalati árvezérlés modelljére egy két időszakos n vállalatú kiterjesztett Stackelberg duopóliumon alapuló játékelméleti megalapozást adunk.

⁷ $P(x) = \alpha/(x + \theta)^\gamma$, ahol $\alpha, \theta > 0$ és $\gamma > 2$.

3. fejezet

Döntések időzítése

A vállalatok döntéseinek időrendi sorrendjét meghatározó modellek konstruálása és elemzése az oligopóliumokat vizsgáló irodalom egy divatos részterületévé vált az 1990-es évektől. Ha az ismert Cournot-duopólium egyensúlyát összehasonlítjuk az egyébként azonos költségviszonyú és keresletű Stackelberg-duopólium egyensúlyával, akkor már el is végeztünk egy a különböző időrendi sorrendek hatását vizsgáló elemzést. Ilyen típusú elemzéseket végeztek más típusú, illetve feltételű oligopóliumokban többek között Gal-Or (1985), Dowrick (1986) és Boyer és Moreaux (1987). Ezek után felvetődhet, hogy amennyiben a vállalatok maguk választhatják meg a döntéshozataluk, illetve annak közzétételének időpontját, akkor vajon melyik már ismert vagy esetleg új oligopol modell szerint viselkednek. Az első ilyen irányú átfogó munka Hamilton és Slutsky (1990) nevéhez fűződik, akik viszonylag általános és különböző információs feltételek mellett vizsgálták a két időszakos duopol modelleket. Ettől kezdődően egyre szaporodtak az olyan munkák, amelyek oligopol döntések időzítési kérdését vizsgálták és bizonyos klasszikus oligopol modellt kívántak levezetni. Például Deneckere és Kovenock (1992) a domináns vállalati árvezérlés modelljét egy két időszakos ármodell segítségével valósította meg. További ilyen jellegű munkákat illetően lásd például Anderson és Engers (1992), Matsumura (1999, 2002) vagy van Damme és Hurkens (1999, 2004) cikkeit. Ehhez a területhez kapcsolódik Tasnádi (2000, 2003, 2004a, 2010a és 2010b), amelyek

részletes leírása megtalálható ebben és a következő fejezetben (lásd a domináns vállalati árvezérlést).

Deneckere és Kovenock (1992) levezette a homogén termékű kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth duopóliumra a vállalatok endogén döntési sorrendjét, amely két szekvenciális és egy szimultán játék egyensúlyainak meghatározását igényelte. A vizsgálataik során állandó egységköltséget tételtek fel, és az endogén döntési sorrendet az egységköltségek és kapacitáskorlátok függvényében adták meg. Gangopadhyay (1993) megkísérelte kiterjeszteni Deneckere és Kovenock (1992) eredményeit oligopóliumokra. Mivel a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth oligopol játék esetén — tiszta Nash-egyensúly hiányában — kevert Nash-egyensúlyi megoldásokat kell tekinteni, amelyre vonatkozó ismereteink a probléma nehézsége miatt hiányosak, Gangopadhyay (1993) csak a tisztán szekvenciális esetet (mindegyik oligopolista más időpontban lép) tudta a szimultán esettel összehasonlítani. A 3.1 alfejezetben általánosítjuk Deneckere és Kovenock (1992) eredményeit kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth triopóliumra.

Boyer és Moreaux (1987) olyan homogén termékű modellt vizsgált, amelyben két duopolista rögzített sorrendben hozhatta meg ár és mennyiségi döntését. Megállapították, hogy kis egységköltségbeli eltérés esetén mindkét duopolista a követő szerepét preferálja, míg nagyobb egységköltségbeli eltérések esetén feloldódik a konfliktus szituáció, mivel meglepő módon a kevésbé hatékony vállalat elvállalja a vezető és a hatékonyabb vállalat a követő szerepét. Megjegyzendő, hogy mivel a két vállalat egyidejű döntésével járó szimultán esettel nem foglalkoztak, ezért nem beszélhetünk a döntési sorrendek endogén meghatározásáról. Egy velük hasonló modellkeretben, amely megengedte a duopolisták szimultán lépését, Tasnádi (2003) megmutatta, hogy Boyer és Moreaux (1987) minőségi eredményén nem változtat az egyidejű lépések megengedése abban az esetben, ha a két duopolista költségfüggvénye „kellően” eltér egymástól. Ez utóbbi eredményt tartalmazza a 3.2. alfejezet. Intuitíve a hatékonyabb vállalat jobban jár, ha a piackövető pozícióból kényszeríti rá ver-

senytársát egy kellően alacsony ár megállapítására, hogy elkerülhesse árának aláárazását és az ezzel járó jelentős piacvesztést.

3.1. Kapacitáskorlátos triopólium

Ebben az alfejezetben a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth triopólium olyan variánsait vizsgáljuk, amelyben a vállalatok árdöntéseiket két időpontban hozhatják meg. Mint már említettük Deneckere és Kovenock (1992) hasonló elemzéseket végeztek duopol esetben. Ennek során többek között megállapították az időzítési játékra, hogy azonos egységköltségek mellett az endogén piacvezető a nagyobb kapacitású vállalat, míg a követő a kisebb kapacitású.¹ A kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth oligopóliumok kevert egyensúlyára vonatkozó — Hirata (2009) és De Francesco és Salvadori (2010) által elért — eredmények lehetővé teszik Deneckere és Kovenock (1992) említett eredményének triopóliumokra történő kiterjesztését.

Elemzéseink során feltesszük, hogy a keresleti görbe mindkét tengelyt metszi, szigorúan monoton csökkenő és konkáv, azaz D kielégíti a 2.6. és a 2.10. feltevéseket. Továbbá feltesszük, hogy a piacon a fogyasztók alacsonyabb áron való kiszolgálása a hatékony adagolási szabály szerint történik.² Legyen a három triopolista egységköltsége azonos, amelyet az általánosság megszorítása nélkül nullának vehetünk. Állapodjunk meg abban, hogy a vállalatokat kapacitásaik szerint csökkenően indexeljük, továbbá a lehetséges esetek számának csökkentése érdekében feltesszük, hogy $k_1 > k_2 = k_3$.

3.1. feltevés. $n = 3$ és $k_1 > k_2 = k_3$.

Az 1 vállalatra nagyvállalatként fogunk hivatkozni, míg a 2 és 3 vállalatokra kisvállalatként. A 3.1. feltevés és a két lehetséges döntési időpont miatt öt különböző játék vizsgálendő, az alábbi öt döntési sorrenddel:

¹Megjegyzendő, hogy az aszimmetrikus egységköltségek esetére is kitérnek.

²Emlékeztetőül az arányos adagolási szabály alkalmazása nehezebb, mivel ekkor a Bertrand–Edgeworth játék kevert Nash-egyensúlyáról jóval kevesebbet tudunk.

- (i) a nagyvállalat az első döntéshozó,
- (ii) a nagyvállalat az utolsó döntéshozó,
- (iii) valamelyik kisvállalat az első döntéshozó,
- (iv) valamelyik kisvállalat az utolsó döntéshozó,
- (v) mindhárom vállalat ugyanabban a döntési időszakban lép.

A cégek profitfüggvényeit lényegében már a 2. fejezetben definiáltuk. Azonban áregyenlőség esetén a később lépőket részesítjük előnyben, azaz a második időszakban lépők a kínálatukat az első időszakban lépők előtt értékesíthetik. Ez a kis módosítás biztosítja, hogy a második időszakban lépőknek ne kelljen aláárazni az első időszaki árakat, a részjátéknak legyen egyensúlyi megoldása és ne kelljen ε -egyensúlyi megoldásokra áttérni, amely egyébként sem adna minőségileg más eredményeket.

A (v) eset a 2. fejezetben tárgyalt szimultán Bertrand–Edgeworth oligopólium lejátszását jelenti. Ha ennek a szimultán játéknak van tiszta Nash-egyensúlya, akkor tudjuk, hogy a piacon a kompetitív megoldás valósul meg. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez esetben az (i)-(iv) döntési sorrendek mellett is ugyanúgy a kompetitív megoldás adódik. Ezért az időzítési játék akkor válik érdekessé, ha a szimultán Bertrand–Edgeworth oligopol játéknak nem létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása, azaz a 2.12. feltevés mellett.

3.1.1. Egzogén döntési sorrendek

Hirata (2009) és De Francesco és Salvadori (2010) egymástól függetlenül megmutatta, hogy a feltevéseink mellett a (v) esetben az 1-es vállalat várható profitja $\bar{\pi}_1$, míg a 2-es és 3-as vállalatoké $p_1^d k_2 = p_1^d k_3$. Az (i)-(iv) eseteket külön állításokban vizsgáljuk.

3.2. állítás (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.10., a 2.12., a 3.1. feltevések és a hatékony adagolási szabály mellett, ha a nagyvállalat az egzogéne adott első*

lépő, akkor létezik egyértelmű részjáték-tökéletes egyensúly az alábbi egyensúlyi árakkal és profitokkal:

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (p_1^m, p_1^m, p_1^m) \text{ és } (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*) = (\bar{\pi}_1, p_1^m k_2, p_1^m k_3).$$

Bizonyítás. A nagyvállalat nyilván $[p_1^d, b]$ intervallumbeli p_1 árat állapít meg, és ezért a kisvállalatok a második időszakban nem mondanak p_1 -nél kisebb árat. Indirekte tegyük fel, hogy $p_i > p_1$ teljesülne valamelyik $i \in \{2, 3\}$ kisvállalatra. Ha $p_i > p_j$, ahol j a másik kisvállalatot jelöli ($i \neq j$ és $i, j \in \{2, 3\}$), akkor az i vállalat nem érhet el $\bar{\pi}_i$ -nél több profitot, ami kevesebb mint $p_1^d k_i \leq p_1 k_i$. Ezért az i vállalat számára előnyösebb volna a p_1 ár. Ha $p_i = p_j > p_1$, akkor mindkét kisvállalat érdekelt a második időszakban egyoldalúan a másik kisvállalat aláárazásában. Tehát a második időszakhoz tartozó részjátéknak az egyetlen lehetséges tiszta Nash-egyensúlyi megoldása a $p_2 = p_3 = p_1$, amelynek egyensúlyi volta könnyen ellenőrizhető.

Ismerve a kisvállalatok második időszakbeli reakcióit a nagyvállalat az első időszakban a reziduális keresleti görbén maximalizálja profitját, és ezért a p_1^m árat választja. $\square$

A (ii) esetben a megoldás során feltehető, hogy ha a nagyvállalat azonos profitot érne el

- egy kisvállalattal megegyező alacsonyabb ár megállapításával és
- egy magasabb áron a reziduális kereslet kiszolgálásával,

akkor a nagyvállalat a reziduális kereslet kiszolgálása mellett fog dönteni. Ekkor a nagyvállalat egy a kisvállalatnál magasabb árat fog bementeni. Pótlólagos feltevésünkkel feloldjuk, a nagyvállalat legjobb-válasz függvényének kétértékűségét. Megjegyzendő, hogy a nagyvállalat „robusztusabb” döntése mellett tettük le a voksunkat, mivel a kisvállalat árával azonos ár megállapítása a kisvállalatot egy a kérdéses árnál ε -nál kisebb ár meghatározásában tenné érdekelté, ami egyébként sem adna részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyt.

3.3. állítás (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.10., a 2.12., a 3.1. feltevések és a hatékony adagolási szabály mellett, ha a nagyvállalat az egzogéne adott utolsó lépő, akkor két esetet kell megkülönböztetnünk:*

1. *az egyértelmű részjáték-tökéletes egyensúly és egyensúlyi profitok rendre*

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (p_1^m, p_1^d, p_1^d) \text{ és } (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*) = (\bar{\pi}_1, p_1^d k_2, p_1^d k_3),$$

amennyiben $k_1 < D(p_1^d) - k_2$;

2. *a két részjáték-tökéletes egyensúly és a hozzájuk tartozó egyensúlyi profitok*

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (p_1^m, p_1^d, p_1^u) \text{ és } (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*) = (\bar{\pi}_1, p_1^d k_2, p_1^u k_3) \text{ vagy} \\ (p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (p_1^m, p_1^u, p_1^d) \text{ és } (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*) = (\bar{\pi}_1, p_1^u k_2, p_1^d k_3),$$

ahol p_1^u a $p_1^u \min \{k_1, (D(p_1^u) - k_2)^+\} = \bar{\pi}_1$ implicit egyenletet kielégítő két ár kisebbike, amennyiben $k_1 \geq D(p_1^d) - k_2$.

Bizonyítás. Mivel a nagyvállalat sosem választ p_1^d alatti árat, a kisvállalatok sem adnak meg p_1^d -nél kisebb árat. Vegyük észre, hogy tiszta részjáték-tökéletes egyensúlyban legalább egyik kisvállalat p_1^d árat állapít meg, mert különben a nagyvállalat legalább a kisvállalatok egyike alá fog árazni.

Tegyük fel, hogy $k_1 < D(p_1^d) - k_i$ esetén az i kisvállalat p_1^d árat választ, míg a másik j kisvállalat egy p_1^d feletti p_j árat. Ekkor a nagyvállalat jobban járna egy $p_i = p_1^d$ és p_j közötti árral, a p_1^m árral szemben, hiszen egy p_1^d -vel csak kismértékben magasabb áron képes a teljes kapacitását értékesíteni és $\bar{\pi}_1$ -nél több profitra szert tenni. Tehát a j vállalat profitja $\pi_j^r(p_j)$, ami kevesebb $p_1^d k_j$ -nél, azaz ellentmondásra jutottunk. Összegezve a $k_1 < D(p_1^d) - k_i$ esetben a két kisvállalat p_1^d árat állapít meg az első időszakban és a nagyvállalat p_1^m árat.

A $k_1 \geq D(p_1^d) - k_2$ esetben, az előző esettel ellentétben, a j vállalat első időszaki ára p_1^u is lehetne, mert a profitjának maximalizálása a $D(p) - k_i$ keresleti görbén a $[p_1^d, p_1^u]$ intervallumon nem eredményezne $\bar{\pi}_1$ -nél magasabb profitot a nagyvállalat számára. Így két aszimmetrikus részjáték-tökéletes

egyensúlyt kapunk. Könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott két stratégia-együttes két tiszta részjáték-tökéletes Nash-egyensúly. $\square$

3.4. állítás (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.10., a 2.12., a 3.1. feltevések és a hatékony adagolási szabály mellett, ha csak az egyik kisvállalat, mondjuk a 3, lép elsőként, akkor létezik egyértelmű részjáték-tökéletes egyensúly az alábbi egyensúlyi profitokkal:*

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (X_1^*, X_2^*, p_1^d) \text{ és } (E\pi_1^*, E\pi_2^*, \pi_3^*) = (\bar{\pi}_1, p_1^d k_2, p_1^d k_3),$$

ahol az 1 és 2 vállalatok második időszakbeli egyensúlyi árai az X_1^*, X_2^* független valószínűségi változók a φ_1^*, φ_2^* eloszlásmértékekkel, amelyek a $D(p) - k_3$ keresleti függvényű második időszakbeli Bertrand–Edgeworth játék egy kevert egyensúlyát alkotják.³

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a 3 vállalat ára $p_3 > p_1^d$. Az 1 és 2 vállalatok a φ_1 és φ_2 kevert stratégiáikat alkalmazzák. Legyen $\bar{p}_i = \sup \text{supp}(\varphi_i)$ és $\underline{p}_i = \inf \text{supp}(\varphi_i)$ mindkét $i \in \{1, 2\}$ -re. Nyilván $\underline{p}_1 \geq p_1^d$, és ezért $\underline{p}_2 \geq p_1^d$. Egy második időszakbeli egyensúlyban nem lehet $\bar{p}_2 > \bar{p}_1$, mivel ez maga után vonná, hogy $\bar{p}_2$ áron a 2 vállalat profitja alacsonyabb volna, mint a p_1^d áron. Ha $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 > p_3$, akkor a két eloszlás egyike atommentes a $\bar{p}_1$ áron, továbbá φ_2 -nek atommentesnek kell lennie, mivel ellenkező esetben a 2 vállalat jobban járna a p_1^d árral, mint a $\bar{p}_2$ árral. Ezért, ha $\bar{p}_1 > p_3$, akkor az 1 vállalat a $\bar{p}_1$ áron a $D(p) - k_2 - k_3$ reziduális keresletet elégíti ki, amiből $\bar{p}_1 = p_1^m$ következik. Ekkor azonban $p_3 > p_1^d$ miatt az 1 vállalat javíthatna a helyzetén, például egy p_1^d -nél valamivel magasabb ár megadásával, és ezért a 2 vállalat nem állapíthat meg p_3 -nál magasabb árat, és emiatt (φ_1, φ_2) nem alkotna egyensúlyi stratégiaprofílt a második időszakban. Eddig megmutattuk, hogy a 3 vállalat nem határoz meg p_1^d -nél magasabb árat. Végül vegyük

³Ebben az alfejezetben a továbbiakban az $E\pi_i$ írásmód hangsúlyozza, hogy a megfelelő kevert stratégiaegyütteshez tartozó nem determinisztikus várható vállalati profitról van szó, míg π_i -t akkor írunk, ha a profit determinisztikus.

észre, hogy ha a 3 vállalat p_1^d árat állapít meg, akkor a $D(p) - k_3$ keresleti görbéjű szimultán 1 és 2 vállalatok által játszott Bertrand–Edgeworth-játék kevert egyensúlyában — amely a második időszakbeli kevert egyensúlyi stratégiákat adja — az 1 és 2 vállalatok nulla valószínűséggel adnak meg p_1^d árat. $\square$

3.5. állítás (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.10., a 2.12., a 3.1. feltevések és a hatékony adagolási szabály mellett, ha csak az egyik kisvállalat, mondjuk a 3, lép utolsóként, akkor létezik egyértelmű részjáték-tökéletes egyensúly az alábbi egyensúlyi profitokkal:*

$$\begin{aligned}(p_1^*, p_2^*, p_3^*) &= (X_1^*, X_2^*, E \max\{X_1^*, X_2^*\}) \text{ és} \\ (E\pi_1^*, E\pi_2^*, E\pi_3^*) &= (\bar{\pi}_1, p_1^d k_2, E \max\{X_1^*, X_2^*\} k_3),\end{aligned}$$

ahol az X_1^*, X_2^* független valószínűségi változók adják meg rendre az 1 és a 2 vállalatok első időszaki egyensúlyi árait, amelyek eloszlásmértékei a $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ a $D(p) - k_3$ keresleti függvényű, az 1 és 2 vállalatok által játszott Bertand-Edgeworth duopólium egy kevert egyensúlyát alkotják. Továbbá $p_1^d k_3 < E \max\{X_1^*, X_2^*\} k_3 < p_1^m k_3$ is teljesül.

Bizonyítás. Az 1 vállalat nyilván nem állapít meg p_1^d -nél alacsonyabb árakat és biztosan b' alatti árat ad meg, ahol b' a $k_1 + k_2 = D(b')$ implicit egyenlettel értelmezett. Most ha a 2 vállalat ára $p_2 < b'$, akkor a 3 vállalat legjobb válasza $\max\{p_1, p_2\}$. Ezért az 1 és 2 vállalatok az első időszakban a $D(p) - k_3$ keresleti görbével szembesülnek. $\square$

3.1.2. Az endogén döntési sorrend meghatározása

Az alfejezetben — az öt egzogén döntési sorrendű játékra kapott eredmények alapján — meghatározzuk az időzítési játék egyensúlyaként megvalósuló endogén döntési sorrendet. Az időzítési játékban a vállalatok először arról döntenek, hogy az első vagy a második időszakban hozzák meg az árdöntésüket. Ezek

után megfigyelik, hogy ki, melyik időpontban hozza majd meg az árdöntését. Végül a döntéseik által kijelölt, (i)-(v) eset valamelyikének megfelelő egzogén döntési sorrenddel adott játékot játsszák. Az időzítési játéknak ezt a variánsát Hamilton és Slutsky (1990) „megfigyelhető késleltetésű játéknak” nevezték. A másik alternatív változatban, amelyet „döntési elkötelezettségű játéknak” hívtak, csak a korábban döntő játékosok cselekvései ismertek, tehát még azt sem lehet tudni, hogy ki fog még egy adott időszakban lépő vállalattal együtt dönteni. A Bertrand–Edgeworth játék kevert egyensúlyának meghatározásából és jellemzéséből adódó nehézségek miatt nem vállalkozunk ez utóbbi variánsnak megfelelő időzítési játék megoldására.

Az öt eset összehasonlításával látható, hogy a nagyvállalat várható profitja mind az öt esetben azonos. Azonban a profit csak az (i) és a (ii) esetekben determinisztikus. Még ha a kevert egyensúly meghatározásakor az oligopol irodalom kockázatmentes vállalatokat tételez fel, tegyük fel, hogy amennyiben egy vállalat egy biztos π profit vagy egy bizonytalan π várható értékű profit közül választhat, akkor a biztos kimenetelt részesíti előnyben az időzítési játékban. Továbbá a kisvállalatok számára a Pareto-hatékony kimenetelt az (i) eset jelenti. A szimultán első időszaki lépést tekintve, továbbá figyelembe véve a 3.2. és a 3.5. állításokat — azaz azokat az eseteket vizsgálva, amelyeken a nagyvállalat az első időszakban dönt — megállapíthatjuk, hogy a kis vállalatok a második időszakban kívánnak lépni. Tehát a (ii) eset az időzítési játék egyensúlya. Azonban a 3.2.-3.5. állításokat tekintve az az eset, amikor a két kisvállalat szimultán lép az első időszakban és a nagyvállalat a második időszakban, az időzítési játék egy másik Pareto inferior egyensúlyát adja. Ezzel az alábbi tételt nyertük.

3.1. tétel (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.10., a 2.12., a 3.1. feltevések és a hatékony adagolási szabály mellett abban az időzítési játékban, amelyben a három vállalat két időszak között választhat árdöntésének meghozatalára és az időzítésük ismeretében hozza meg árdöntését, egyértelmű Pareto hatékony részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyában a nagyvállalat lép először, majd a két*

kisvállalat a második időszakban.

A 3.1. tétel kiterjeszti Deneckere és Kovenock (1992) eredményét duopóliumokról triopóliumokra abban az értelemben, hogy a domináns vállalati árvezérlés modelljének, amelyet részletesen a 4. fejezetben fogunk vizsgálni, egy játékelméleti megalapozását adja.

3.2. Konvex költségfüggvényű duopóliumok

Ebben az alfejezetben a duopol esetet vizsgáljuk ($n = 2$). A 2.6. és a 2.9. feltevések mellett szükségünk lesz még az alábbi feltevésekre.

3.2. feltevés. A vállalatoknak nincsenek fixköltségei, azaz $c_1(0) = c_2(0) = 0$.

A feltevéseinkből következik, hogy az i vállalat kompetitív kínálata, a továbbiakban röviden kínálata, a $p \in [0, b]$ áron

$$s_i(p) = \begin{cases} a, & \text{ha } p \in (mc_i(a), b], \\ (mc_i)^{-1}(p), & \text{ha } p \in [mc_i(0), mc_i(a)] \cap [0, b], \\ 0, & \text{ha } p \in [0, mc_i(0)). \end{cases}$$

A következő technikai feltételek biztosítják, hogy a piacon mindkét vállalat aktív lesz.

3.3. feltevés. $s_1(p^c) > 0$ és $s_2(p^c) > 0$.

3.4. feltevés. Teljesüljön $0 \leq mc_i(0) = \lim_{p \rightarrow 0+0} mc_i(p) < D(0)$ minden $i \in \{1, 2\}$ -re.

Az $i \in \{1, 2\}$ vállalat ár és mennyiségi döntése $(p_i, q_i) \in [0, b] \times [0, a]$. A q_1 és q_2 mennyiségek a valóban megtermelt termékmennyiségeket jelölik. Feltesszük, hogy az árdöntések megelőzik a mennyiségi döntéseket, azaz rendelésre történő (lényegében just-in-time típusú) termelésről lesz szó. Továbbá, a duopolisták árdöntéseiket követően mennyiségi döntéseiket egyidejűleg hozzák

meg. Az árdöntéseik sorrendjét tekintve két szekvenciális és egy szimultán játékot fogunk vizsgálni. Szekvenciális árdöntéseket véve az első időszakban vagy az 1 vagy a 2 vállalat közli árdöntését, majd a második időszakban a másik vállalat hozza meg az árdöntését és végül a harmadik időszakban egyszerre hozzák meg mennyiségi döntéseiket. A szimultán játék két időszakos: az első időszakban születnek az árdöntések és a másodikban a mennyiségi döntések.

A vállalati keresletek megadásakor hatékony adagolási szabályt tételezünk fel. Áregyezőség esetén eltérő módon definiáljuk a vállalatok keresleteit a szekvenciális és a szimultán esetekben: legyen $T_1(p, q_2) = (D(p) - q_2)^+$ és $T_2(p, q_1) = D(p)$ a vállalatok kereslete a két szekvenciális játékban és

$$T_i(p, q_j) = \max \left\{ \frac{s_i(p)}{s_i(p) + s_j(p)} D(p), D(p) - q_j \right\}$$

a szimultán esetben, ahol $i, j \in \{1, 2\}$ és $i \neq j$. Ez a különbségtétel biztosítja számunkra a két szekvenciális játék egyértelmű megoldhatóságát, és így nem kell jellegét tekintve hasonló ε -egyensúlyi megoldásokkal foglalkozni. A fentieket figyelembe véve a vállalatok keresleteit a következőképpen definiáljuk:

$$\Delta_i(D, p_i, q_i, p_j, q_j) = \begin{cases} D(p_i), & \text{ha } p_i < p_j \\ T_i(p_i, q_j), & \text{ha } p_i = p_j \\ (D(p_i) - q_j)^+, & \text{ha } p_i > p_j. \end{cases}$$

Mivel a vállalatok értékesítése a piaci kereslet vagy a megtermelt mennyiség által korlátozott, $\min \{\Delta_i(D, p_i, q_i, p_j, q_j), q_i\}$ mennyiségeket értékesítenek. Ezek után az ár és mennyiségi játék profitfüggvényeit a következőképpen értelmezzük:

$$\tilde{\pi}_i(D, p_i, q_i, p_j, q_j) = p_i \min \{\Delta_i(p_i, q_i, p_j, q_j), q_i\} - c_i(q_i).$$

Az ár és mennyiségi játék utolsó mennyiségi döntésekre vonatkozó részjátékának megoldásaként az alábbiakban megadott, a továbbiakban általunk vizsgált árjátékhoz jutunk. Ha az i vállalat ára az alacsonyabb, akkor

$$\tilde{\pi}_i(D, p_i, q_i, p_j, q_j) = p_i \min \{D(p_i), q_i\} - c_i(q_i)$$

és az i vállalat optimális termelése

$$q_i = \min \{D(p_i), s_i(p_i)\}. \quad (3.1)$$

Ekkor a magasabb árat megállapító j vállalat termelése meghatározásakor a $\tilde{\pi}_j(D, p_j, q_j, p_i, \min \{D(p_i), s_i(p_i)\}) =$

$$p_j \min \{(D(p_j) - \min \{D(p_i), s_i(p_i)\})^+, q_j\} - c_j(q_j)$$

függvényt maximalizálja q_j -ben, amelynek megoldása:

$$q_j = \min \{(D(p_j) - s_i(p_i))^+, s_j(q_j)\}. \quad (3.2)$$

Hátra maradt még az áregyenlőség esete. A két szekvenciális játékban $p = p_1 = p_2$ esetén

$$q_1 = \min \{(D(p) - s_2(p))^+, s_1(p)\}, \quad q_2 = \min \{D(p), s_2(p)\}. \quad (3.3)$$

A szimultán játékban — az alkalmazott törési szabályunkból adódóan — az i vállalat által értékesíthető mennyiség, a versenytárs döntésétől függetlenül, $\frac{s_i(p)}{s_i(p) + s_j(p)} D(p)$. Hasonlóak érvényesek a j vállalatra is. Tehát a $p = p_1 = p_2$ áron az i vállalat termelése

$$q_i = \min \left\{ \frac{s_i(p)}{s_i(p) + s_j(p)} D(p), s_i(p) \right\}. \quad (3.4)$$

A mennyiségi részjátékokra vonatkozó (3.1), (3.2), (3.3) és (3.4) eredményeket figyelembe véve a továbbiakban áttérhetünk az $O_p = \langle \{1, 2\}, [0, b]^2, (\pi_1, \pi_2) \rangle$ árjáték elemzésére, ahol

$$\pi_i(p_i, p_j) = p_i \min \{D(p_i), s_i(p_i)\} - c_i(\min \{D(p_i), s_i(p_i)\}),$$

ha az i vállalat ára alacsonyabb,

$$\pi_i(p, p) = p \min \{T_i(p, s_j(p)), s_i(p)\} - c_i(\min \{T_i(p, s_j(p)), s_i(p)\})$$

ha a két vállalat azonos árat állapít meg és $\pi_i(p_i, p_j) =$

$$p_i \min \{(D(p_i) - s_j(p_j))^+, s_i(p_i)\} - c_i(\min \{(D(p_i) - s_j(p_j))^+, s_i(p_i)\})$$

ha az i vállalat ára a magasabb.

Jelölje $D_i^r(p) = (D(p) - s_j(p))^+$ az i vállalat reziduális keresletét mindhárom játékban,⁴ amely „majdnem” megegyezik az i vállalat keresletével abban az esetben, ha a versenytársa „éppen” aláárazná i -t. Pontosabban fogalmazva a szekvenciális játékokban a $D_1^r(p)$ érték azonos az 1 vállalat keresletével, ha a 2 vállalat 1-gyel megegyező árat állapítana meg, míg minden más esetben

$$D_i^r(p) = \lim_{p_j \rightarrow p^-} \Delta_i(p, s_i(p), p_j, s_j(p_j)) < \Delta_i(p, s_i(p), p, s_j(p))$$

bármely $p > p^c$ -re. Legyen

$$\begin{aligned} \pi_i^* &= \max_{p \in [0, b]} \tilde{\pi}_i(p, D_i^r(p), p, s_j(p)), \\ P_i^* &= \arg \max_{p \in [0, b]} \tilde{\pi}_i(p, D_i^r(p), p, s_j(p)). \end{aligned}$$

Nyilván az i vállalat biztosítani tudja a π_i^* profitszintet.

Legyen az

$$L_i = \{p \in [0, b] \mid p \min\{D(p), s_i(p)\} - c_i(\min\{D(p), s_i(p)\}) = \pi_i^*\}$$

halmaz azon árak halmaza, amelyek mellett az i vállalat közömbös a teljes piaci kereslet kielégítése és reziduális keresleti görbén történő profitmaximalizálás tekintetében. Megjegyzendő, hogy feltevéseink alapján L_i nemüres, de nem feltétlenül egyelemű. Legyen továbbá $p_i^L = \min L_i$. Ekkor az i vállalat sosem fog p_i^L alatti árat megállapítani, mert bármely $p < p_i^L$ árat dominál egy $p^* \in P_i^*$ ár. A feltevéseink alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $p^* > p_i^L > p^c$ teljesül bármely $p^* \in P_i^*$ árra.

A következő feltevés biztosítja a két vállalat aszimmetrikus voltát.

3.5. feltevés. Tegyük fel, hogy $D(p) < s_1(p)$ teljesül bármely $p \geq p_1^L$ árra.

A 3.5. feltevés lényegében azt jelenti, hogy az 1 vállalat az összes nem dominált árán hajlandó a teljes kereslet kielégítésére. Ezért az 1 vállalat a hatékonyabb, míg a 2 vállalat a kevésbé hatékonyabb. Példának okáért a $D(p) = 1 - p$ keresleti görbéjű duopol piacon a $c_1(q) = \alpha q^2$ és a $c_2(q) = q^2$ költségfüggvények

⁴Ez a legrosszabb eset ami megtörténhet az i vállalattal, ha p árat állapít meg.

mellett teljesül a 3.5. feltevés, ha $0 < \alpha \leq (-1 + \sqrt{6})/5 \approx 0.2899$. Azonban a 3.5. feltevés kizárja azokat az eseteket, amikor a vállalatok költségfüggvényei nem kellően aszimmetrikusak. Például a $D(p) = 1 - p$ keresleti görbe, továbbá $c_1(q) = \alpha q^2$ és $c_2(q) = q^2$ költségfüggvényeknél sérül a 3.5. feltevés bármely $\alpha > (-1 + \sqrt{6})/5$ esetén. Ezért indoklásra szorul, hogy miért is élünk a 3.5. feltevessel elemzéseink során. A viszonylag erős feltevésünkre azért van szükség, mert a konvex költségfüggvényű homogén termékű Bertrand–Edgeworth játék kevert egyensúlyának létezésén túl gyakorlatilag semmit sem tudunk az egyensúly jellegéről. Ennek ellenére a 3.5. feltevés lehetővé teszi számunkra a szimultán játék egyensúlyi profitjának összehasonlítását a két szekvenciális játék egyensúlyi profitjával.

Végül a $\tilde{p}$ legyen az az ár, amely mellett a kevésbé hatékony vállalat képes volna a teljes kereslet kielégítésére, azaz $s_2(\tilde{p}) = D(\tilde{p})$. Ellenőrizhető, hogy $\tilde{p} > p_1^L$.

3.2.1. A két időszakos időzítési játék

Ebben az alfejezetben egy olyan két időszakos időzítési játékot vizsgálunk, amelyben a vállalatok két különböző időszakban közölhetik döntéseiket. A vállalatok az első lépésben kiválasztott döntési időszakok ismeretében hozzák meg a második lépésben az árdöntéseiket. Egy ilyen típusú kétidőszakos időzítési játékot elemzett Deneckere és Kovenock (1988) a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth duopólium keretében. Mint már említettük, általánosabban ilyen típusú „megfigyelhető késleltetésű játékokkal” foglalkozott Hamilton és Slutsky (1990) tiszta Nash-egyensúllyal rendelkező játékok esetén. A döntések endogén sorrendjének meghatározásához össze kell hasonlítanunk a három árjátékunk egyensúlyi profitjait.

Egzogén döntési sorrendek

Az elemzésünket azzal a szekvenciális játékkal kezdjük, amelyben a hatékonyabb vállalat lép előbb.

3.6. állítás (Tasnádi, 2003). *Tegyük fel, hogy a 2.6., a 2.9., a 3.2., a 3.3., a 3.4., a 3.5. feltevések teljesülnek és a piacon a hatékony adagolási szabály valósul meg. Ekkor ha a hatékonyabb vállalat lép előbb, akkor bármely részjáték-tökéletes egyensúlyban a hatékony vállalat egy $p^* \in P_1^*$ árat állapít meg, amelyet a második időszakban a kevésbé hatékony vállalat is átvesz.*

Bizonyítás. Már megállapítottuk, hogy a hatékonyabb vállalat nem fog p_1^L alatti árat megállapítani, és ezért egy $p \in [p_1^L, b]$ árat fog választani. Ekkor $s_1(p) + s_2(p) > D(p)$. Elemzésünket két esetre bontjuk. (i) $s_2(p) < D(p)$, azaz $p < \tilde{p}$ és (ii) $s_2(p) \geq D(p)$, azaz $p \geq \tilde{p}$.

Az (i) esetben a 2 vállalat nem fog egy p alatti árat megállapítani, mert p áron a 2 vállalat a teljes kínálatát értékesítheti. Egy p feletti p_2 ár választása esetén a 3.5. feltevés szerint $D(p_2) - s_1(p_2) \leq 0$ bármely $p_2 > p$ -re, és így a 2 vállalat p_2 áron semmit sem tud értékesíteni. Tehát $p_2 = p$ Nash-egyensúlya a részjátéknak. Vegyük észre, hogy ezért a p áron a hatékonyabb vállalat $\min\{D(p) - s_2(p), s_1(p)\} = D(p) - s_2(p)$ mennyiséget értékesíthet.

A (ii) esetben a 2 vállalat nem állapíthat meg $\tilde{p}$ alatti árat, mert $\tilde{p}$ dominálja a nála alacsonyabb árakat, mivel $\tilde{p}$ áron a 2 vállalat a teljes kínálatát képes értékesíteni. A kevésbé hatékony vállalat a 3.5. feltevés miatt nyilván nem fog egy p feletti árat megállapítani. Ezért a költségfüggvényre vonatkozó feltevéseink alapján a 2 vállalat kielégíti a teljes keresletet, ami maga után vonja, hogy az 1 vállalat nem fog egy $\tilde{p}$ feletti árat választani.

Az eddigieket összegezve megállapíthatjuk, hogy a hatékonyabb vállalat a reziduális keresleti görbével szembesül, és ezen választ egy $[p_1^L, \tilde{p}]$ profitmaximalizáló árat, továbbá ekkor a kevésbé hatékony vállalat átveszi az árat, azaz árelfogadóként viselkedik. $\square$

Megemlítendő, hogy egy az általunk választottól eltérő azonos árakra vonatkozó törési szabály esetén, a 3.6. állításban szereplő megoldás csak egy ε -egyensúly. Belátható, hogy a kevésbé hatékony vállalat ekkor $s_2(p_1)$ -nél kisebb kereslettel szembesülne, és ezért aláárazná a p_1 árat bármely $p_1 \in [p_1^L, \tilde{p}]$

ár esetén.

Ezek után rátérünk annak a szekvenciális játéknak az elemzésére, amelyben a kevésbé hatékony vállalat lép előbb. Mint már említettünk a hatékonyabb vállalat biztosan nem ad meg p_1^L alatti árat. Ezért a kevésbé hatékony vállalat a teljes kínálatát értékesítheti p_1^L -nél nem nagyobb áron, amiből következik, hogy a kevésbé hatékony vállalat nem fog p_1^L -nél alacsonyabb árat közölni. Továbbá a kevésbé hatékony vállalatnak az árát úgy kell megállapítania, hogy a hatékony vállalat ne aláárazza, mert különben a 3.5. feltevés miatt a hatékonyabb vállalat elvinné az egész piacot. Ha a hatékony vállalat ára az alacsonyabb egy $p \geq p_1^L$ ár mellett, akkor $D(p)$ mennyiséget értékesít. Legyen $h(p_1, p_2) = \min\{s_1(p_1), (D(p_1) - s_2(p_2))^+\}$ ($p_1 \geq p_2 \geq p_1^L$), amely a hatékonyabb vállalat által értékesített mennyiséget adja meg, ha versenytársánál magasabb vagy vele azonos árat állapít meg. Jelölje $G(p) = pD(p) - c_1(D(p))$ és $H(p_1, p_2) = p_1h(p_1, p_2) - c_1(h(p_1, p_2))$ az előbb említett két esethez tartozó profitszinteket. A $\pi^h(p_2) = \max_{p_1 \in [p_2, b]} H(p_1, p_2)$ függvény a profitmaximumot adja meg abban az esetben, ha a hatékonyabb vállalat ára nem kisebb a versenytársa által megadott árnál.⁵ Vegyük észre, hogy ha $p_1^L \leq p_2 < p_2' \leq \tilde{p}$, akkor bármely $p_1 \in [p_2', \hat{p}]$ árra, ahol $\hat{p}$ a $D(\hat{p}) = s_2(p_2)$ implicit egyenlettel értelmezett, $H(p_1, p_2) > H(p_1, p_2')$ teljesül a költségfüggvényekre kirótt feltevések miatt, és ezért $\pi^h(p_2) > \pi^h(p_2')$. Továbbá a maximumtétel miatt π^h folytonos. Ezért a kevésbé hatékony vállalat p_2' egyensúlyi ára a legkisebb $G(p_2) = \pi^h(p_2)$ egyenlőséget kielégítő ár. Megjegyzendő, hogy az előbbi egyenlőségnek van megoldása a $[p_1^L, \tilde{p}]$ intervallumban, mert $G(p_1^L) = \pi_1^* < \pi^h(p_1^L)$ és $G(\tilde{p}) > \pi^h(\tilde{p}) = 0$. A legkisebb $G(p_2) = \pi^h(p_2)$ egyenlőséget kielégítő árat pedig azért kell választania, mert π^h szigorúan monoton csökkenő a $[p_1^L, \tilde{p}]$ intervallumon. Az 1 vállalat egy részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyban egy a $H(\cdot, p_2^l)$ függvényt maximalizáló p_1^h árat választ. A 2.6., a 2.9., a 3.2., a 3.3., a 3.4. és a 3.5. feltevések mellett több ár is maximalizálhatja a $H(\cdot, p_2^l)$ függvényt. Összegezve beláttuk

⁵Deneckere és Kovenock (1992) hasonló függvényeket vezetett be a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth duopóliumhoz tartozó időzítési játék elemzésekor.

az alábbi állítást.

3.7. állítás (Tasnádi, 2003). *Teljesüljenek a 2.6., a 2.9., a 3.2., a 3.3., a 3.4., a 3.5. feltevések és a piacon a hatékony adagolási szabály valósuljon meg. Ha a kevésbé hatékony vállalat lép előbb a szekvenciális árjátékban, akkor p_2^l árat állapít meg, míg a hatékonyabb vállalat egy $H(\cdot, p_2^l)$ függvényt maximalizáló p_1^h árat ad meg, amely magasabb p_2^l -nél.*

Az endogén döntési sorrend

Ebben az alfejezetben összehasonlítjuk az előző alfejezetben elemzett szekvenciális és szimultán játékokat. Először is megmutatjuk, hogy az 1 vállalat első időszaki árdöntése és a 2 vállalat második időszaki árdöntése nem részjáték-tökéletes Nash-egyensúly a időzítési játéknak. Tehát a hatékonyabb vállalat nem kerül árvezérlő szerepkörbe.

Maskin (1986) eredményéből következik, hogy a 2.6. és a 2.9. és feltevések mellett a szimultán játéknak létezik kevert egyensúly. Jelölje $\pi_i(\varphi_1, \varphi_2)$ az i vállalat várható profitját a (φ_1, φ_2) kevert stratégiaprofilban. A következő állítás szerint a hatékonyabb vállalat nem fogja a piacon az árvezérlő szerepet elvállalni.

3.8. állítás (Tasnádi, 2003). *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 2.6., a 2.9., a 3.2., a 3.3., a 3.4., a 3.5. feltevések és a vállalatok a hatékony adagolási szabály szerint szolgálják ki a fogyasztókat. Ha $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ egy kevert egyensúly a szimultán döntésű árjátéknak, akkor*

$$\pi_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*) \geq \pi_1(p_1^*, \varphi_2^*) > \pi_1^*$$

bármely $p_1^ \in P_1^*$ -ra, azaz a hatékonyabb vállalat a szimultán döntésű árjátékot előnyben részesíti annál a szekvenciális árjátéknál, amelyben elsőként közli az árát.*

Bizonyítás. Nyilván nem lehet kevert Nash-egyensúlyi az a stratégiaprofil, amelyben mindkét $i \in \{1, 2\}$ vállalat 1 valószínűséggel ugyanazt a $p_1^* \in P_1^*$

árat állapítja meg, mert ekkor a hatékonyabb vállalatnak érdemes egy p_1^* -nál valamivel kisebb árat megállapítania a 4.1. feltevés miatt. Tehát a kevésbé hatékony vállalat bármely kevert Nash-egyensúlyi stratégiaprofilban pozitív valószínűséggel állapít meg p_1^* -tól eltérő árakat. Feltevéseink alapján, ha a kevésbé hatékony vállalat a p_1^* árnál magasabb árat állapít meg, akkor a hatékonyabb vállalat p_1^* áron kielégíti a teljes keresletet és a $D_1^r(p_1^*)$ mennyiségnél többet értékesít. Ekkor ha a 2 vállalat egy p_1^* árnál alacsonyabb p_2 árat állapít meg, akkor csak $s_2(p_2)$ mennyiséget kínál, ami kevesebb a $s_2(p_1^*)$ mennyiségnél a 2.9. feltevés miatt és ebből adódóan a hatékonyabb vállalat p_1^* áron $D_1^r(p_1^*)$ mennyiségnél többet értékesíthet. Ezért a hatékonyabb vállalat p_1^* áron a $D_1^r(p_1^*)$ mennyiségnél 1 valószínűséggel többet értékesíthet, és így $\pi_1(p_1^*, \varphi_2^*) > \pi_1^*$. A $\pi_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*) \geq \pi_1(p_1^*, \varphi_2^*)$ egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. $\square$

A hatékonyabb vállalat lényegében azért választja az első lépő szereppel szemben a szimultán játékot, mert bármely $p_1^* \in P_1^*$ domináns vállalati áron pozitív valószínűséggel a $D_1^r(p_1^*)$ reziduális keresletnél nagyobb mennyiséget értékesíthet a szimultán árjátékban, mivel a riválisa egy nemdegenerált kevert stratégiát játszik a szimultán árjátékban.

Az eddigi eredményeink alapján megfogalmazhatjuk és bebizonyíthatjuk az alábbi állítást.

3.2. tétel (Tasnádi, 2003). *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 2.6., a 2.9., a 3.2., a 3.3., a 3.4. és a 3.5. feltevések, továbbá a kiszolgálás a hatékony adagolási szabály szerint történik. Ekkor az időzítési játék egyetlen egyensúlyában a kevésbé hatékony vállalat lép elsőként, majd a hatékony vállalat másodikként. Továbbá a kevésbé hatékony vállalat p_2^l árat állapít meg és a hatékony vállalat egy p_2^l árnál magasabb p_1^h árat, amely maximalizálja a $H(\cdot, p_2^l)$ függvényt.*

Bizonyítás. A 3.8. állításból tudjuk, hogy a hatékonyabb vállalat nem vállalja el az piacvezető szerepet. Ezért már csak az bizonyítandó, hogy mindkét vállalat előnyben részesíti a szimultán árjátéknál azt a szekvenciális árjátékot,

amelyben a kevésbé hatékony vállalat lép elsőként. Legyen a szimultán árjáték-
nak (φ_1, φ_2) egy kevert Nash-egyensúlyi stratégiája. Jelölje $\underline{p}_i = \min \text{supp} \varphi_i$ a
 φ_i tartójabeli legkisebb árat és $\bar{p}_i = \max \text{supp} \varphi_i$ a φ_i tartójabeli legnagyobb
árat ($i \in \{1, 2\}$). Nyilván $\underline{p}_1 \geq p_1^L$, továbbá $\underline{p}_2 < \tilde{p}$, mivel ellenkező esetben

- $\pi_2(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, ha $\bar{p}_1 < \bar{p}_2$;
- $\pi_1(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, ha $\bar{p}_1 > \bar{p}_2$;
- $\pi_i(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, ha $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$ és $\varphi_j(\{\bar{p}_j\}) = 0$; valamint
- mindkét vállalat növelhetné a profitját azzal, hogy $\varphi_i(\{\bar{p}_i\})$ valószínűsége-
gel aláárazná a versenytársát, ha $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$, $\varphi_1(\{\bar{p}_1\}) > 0$ és $\varphi_2(\{\bar{p}_2\}) > 0$.

Szükségünk lesz a következő négy állításra: (i) $\underline{p}_1 \leq \underline{p}_2$, (ii) $\bar{p}_1 \geq \bar{p}_2$, (iii)
 $\varphi_2(\{\underline{p}_2\}) = 0$ és (iv) $\varphi_2(\{\bar{p}_1\}) = 0$. Az első, $\underline{p}_1 \leq \underline{p}_2$ teljesül, mivel máskülön-
ben egy a $\underline{p}_2 < \underline{p}_1$ egyenlőtlenséget kielégítő stratégiaprofil nem lehet egyen-
súlyi, mert a kevésbé hatékony vállalat a teljes kínálatát értékesíthetné egy
 $[\underline{p}_2, \min\{\underline{p}_1, \tilde{p}\})$ intervallumbeli árat választva, és így profitja növelhető volna
a $[\underline{p}_2, \min\{\underline{p}_1, \tilde{p}\})$ intervallumon. A második igazolásánál ha a 2 vállalat egy
 $\bar{p}_1$ feletti árat állapít meg, akkor a 3.5. feltevés miatt semmit sem tudna ér-
tékesíteni. A harmadik állítás ellenőrzéséhez tegyük fel, hogy φ_2 -nek atomja
volna a $\underline{p}_2$ áron, azaz $\alpha = \varphi_2(\{\underline{p}_2\}) > 0$. Két esetet fogunk megkülönböz-
tetni. Ha létezik olyan $\varepsilon > 0$ érték, amelyre $\varphi_1([\underline{p}_2, \underline{p}_2 + \varepsilon)) = 0$, akkor a 2
vállalat jobban járna a $(\underline{p}_2, \underline{p}_2 + \varepsilon)$ intervallumbeli árak választási esélyének α
valószínűséggel történő megnövelésével és a $\underline{p}_2$ ár nulla valószínűséggel történő
választásával. Ha bármely pozitív ε -ra $\varphi_1([\underline{p}_2, \underline{p}_2 + \varepsilon)) > 0$, akkor választható
egy olyan kellően kis pozitív ε' , hogy a hatékonyabb vállalat nyerhet a $\underline{p}_2$ ár
 $\beta = \varphi_1([\underline{p}_2, \underline{p}_2 + \varepsilon'))$ valószínűséggel történő aláárazásával és $[\underline{p}_2, \underline{p}_2 + \varepsilon')$ in-
tervallumbeli árak nulla valószínűséggel történő választásával. Végül térjünk
rá a (iv) állításra. Indirekte tegyük fel, hogy $\varphi_2(\{\bar{p}_1\}) > 0$. Ekkor (ii) miatt
 $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$. Ha most $\varphi_1(\{\bar{p}_1\}) = 0$, akkor $\pi_2(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ következne, ami ellent-
mondás. De $\varphi_1(\{\bar{p}_1\}) > 0$ sem lehet, mivel ekkor létezne olyan $\varepsilon > 0$, hogy
 $\pi_1(\bar{p}_1 - \varepsilon, \varphi_2) > \pi_1(\varphi_1, \varphi_2)$.

Végül belátjuk, hogy $\underline{p}_2 < p_2^l$, amiből már (i) miatt adódik, hogy mindkét vállalat inkább a kevésbé hatékony vállalat általi első időszakbeli ármeghatározását részesíti előnyben a szimultán árjátéknál. Tegyük fel, hogy $\underline{p}_2 \geq p_2^l$, de ekkor a (iv), (ii) és (iii) állítások alkalmazásával a $H(\cdot, p_2^l)$ függvényt maximalizáló bármely ár esetén

$$\pi_1(\varphi_1, \varphi_2) = \pi_1(\bar{p}_1, \varphi_2) < \pi_1(\bar{p}_1, p_2^l) \leq \pi_1(p_1^h, p_2^l) = \pi^h(p_2^l) = \pi_1(p_2^l, \varphi_2).$$

Tehát (φ_1, φ_2) nem lehet a szimultán árjáték egy kevert Nash-egyensúlya, és ezért $\underline{p}_2 < p_2^l$. $\square$

A 3.2. tétel szerint a hatékonyabb vállalat a követő pozíciót részesíti előnyben, amelyből kikényszerítheti, hogy a kevésbé hatékony vállalat egy kellően alacsony ár megállapításával a piac viszonylag kis részét elégítse csak ki. A kellően alacsony ár választásával a kevésbé hatékony vállalat elkerülheti, hogy a riválisa alávágjon árának és ezzel kiszorítsa a piacról.

Szükséges felhívni a figyelmet arra, hogy abban a szekvenciális árjátékban, amelyben a kevésbé hatékony vállalat lép előbb, egy másik T_i törési szabály alkalmazása, csak speciális esetben és csak kis mértékben változtatna a 3.2. tétel eredményén. Nevezetesen csak akkor tapasztalunk eltérést, ha azt a másik szélsőséges törési szabályt alkalmazzuk, amely a kevésbé hatékony vállalatot kényszeríti a reziduális keresleti görbére, azaz $T_1(p, q_2) = D(p)$ és $T_2(p, q_1) = (D(p) - q_1)^+$. Ebben az esetben a hatékonyabb vállalatnak a p_2^l árra adott két legjobb válasza a p_2^l és p_1^h . Ezen bizonytalanság elkerülése érdekében a hatékonyabb vállalat egy kevéssel p_2^l alatti árat választhat, ami egy ε -egyensúlyi megoldást adna.

Az alfejezet zárásaként az eredményünket egy számpéldán szemléltetjük.

3.1. példa. Legyen $D(p) = 1 - p$, $c_1(q) = \frac{1}{4}q^2$ és $c_2(q) = q^2$.

A 3.5. feltevés teljesül, hiszen $\frac{1}{4} \in \left(0, -\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5}\right]$. A költségfüggvényekből kapjuk a két kínálati függvényt: $s_1(p) = \min\{2p, 1\}$, $s_2(p) = p/2$ és

$D_1^r(p) = (1 - 3p/2)^+$ bármely $p \in [0, 1]$ -re. Egyszerű számításokkal adódik $P_1^* = \{14/33\}$ és $\pi^* = 4/33$. Ha az 1 vállalat az árvezérlő, akkor $p_1 = 14/33$ árat választ és a 2 vállalat árkövető a 3.6. állítás szerint. Továbbá könnyen adódik $p_1^L = \frac{3}{5} - \frac{2}{165}\sqrt{429} \approx 0.34894$. Térjünk rá arra a szekvenciális árjátékra, amelyben a 2 vállalat lép előbb.⁶ Ez utóbbi játékra $G(p) = p(1 - p) - \frac{1}{4}(1 - p)^2$ bármely $p \geq p_1^L$ -re, $h(p_1, p_2) = (1 - p_1 - \frac{p_2}{2})^+$ és $H(p_1, p_2) = p_1(1 - p_1 - \frac{p_2}{2})^+ - \frac{1}{4}\left((1 - p_1 - \frac{p_2}{2})^+\right)^2$ bármely $p_1 \geq p_2 \geq p_1^L$ -re. Ha a $\max_{p_1 \in [p_2, 1]} H(p_1, p_2)$ problémának van belső megoldása, azaz $p_2 \in [p_1^L, \frac{6}{13})$, akkor $p_1 = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}p_2$. Ezek után levezethető

$$\pi^h(p_2) = \begin{cases} \frac{1}{20}p_2^2 - \frac{1}{5}p_2 + \frac{1}{5}, & \text{ha } p_2 \in [p_1^L, \frac{6}{13}]; \\ -\frac{33}{16}p_2^2 + \frac{7}{4}p_2 - \frac{1}{4}p_2, & \text{ha } p_2 \in (\frac{6}{13}, \frac{2}{3}); \\ 0, & \text{ha } p_2 \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

A $G(p_2) = \pi^h(p_2)$ egyenlet megoldásaként adódik $p_2^l = \frac{17}{26} - \frac{1}{26}\sqrt{55} \approx 0.36861$. Továbbá $H(p_1, p_2^l)$ első változójában történő maximalizálása szolgáltatja a $p_1^h \approx 0.48942$ értéket. Tehát az időzítési játék egyensúlyában a 2 vállalat $p_2^l \approx 0.36861$ árat állapít meg, majd az 1 vállalat a $p_1^h \approx 0.48942$ árral követi.

3.2.2. Több időszakos időzítési játék

A 3.2.1 alfejezetben vizsgált időzítési játék meglehetősen egyszerű volt. Ebben az alfejezetben szigorúan konvex költségfüggvények mellett egy, a kapacitáskorlátos esetben Deneckere és Kovenock (1988) által elemzett, több időszakos időzítési játék megoldását határozzuk meg. A két időszakos időzítési játék kiterjesztése előtt, röviden összegezzük az előző alfejezet eredményeit (lásd a 3.7. állítást és a 3.2. tételt) és bevezetünk néhány szükséges jelölést. Ha rendre π_i^L -l, π_i^F -fel és π_i^S -sel jelöljük az i vállalat által a vezető, követő és szimultán lépő szerepkörben elért egyensúlyi profitokat,⁷ akkor a 2.6., a 2.9., a 3.2., a 3.3.,

⁶A 3.1. példához tartozó szimultán árjáték kevert egyensúlyának explicit alakú előállítását egy nehéz és egyelőre megoldatlan feladat konvex költségfüggvényekre.

⁷Ha a szimultán játéknak nem volna egyértelmű egyensúlya, akkor tekintsük egy tetszőleges egyensúlyát.

a 3.4. és a 3.5. feltevések mellett

$$\pi_1^L < \pi_1^S < \pi_1^F \quad \text{és} \quad \pi_2^S < \pi_2^L, \quad (3.5)$$

a 3.7. állítás és a 3.2. tétel szerint.

A vállalatok T különböző időpontban hozhatják meg árdöntéseiket a t/T időpontokban, ahol $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$. Jelölje $\tau = 1/T$ a két időperiódus közt eltelt időt. Feltesszük, hogy a két időszakos időzítési játékhoz hasonlóan a több időszakos döntési játék is „megfigyelhető késleltetésű”, azaz a vállalatok tudni fogják, mikor játszanak szimultán árjátékot. Továbbá a vállalati értékesítések, akkor határozódnak meg, amikor mindkét vállalat meghozta árdöntését, és legyen a kereslet mértéke független a vállalati árdöntések időpontjától. Tegyük fel továbbá, hogy a vállalatok a profitjaikat folytonosan diszkontálják r diszkontrátával, és legyen $\delta = e^{-r\tau}$.

A több időszakos időzítési játék részjáték-tökéletes egyensúlyát visszafele történő indukcióval határozzuk meg. Ha a végső $T-1$ -edik időszak előtt nem hozzák meg a vállalatok a döntéseiket, akkor mindketten meghozzák árdöntéseiket, mert különben semmit sem értékesítenek, ami nulla profitot eredményezne, vagyis az utolsó időszakban egy szimultán árjátékot játszanak. Ha pedig a $T-2$ -edik időszakig nem következnek be az árdöntések, akkor a vállalatok egy 2×2 bimátrix játékkal szembesülnek, amelyben ha a $T-2$ -edik időszakban meghozzák a döntésüket, akkor $\delta^{T-2}\pi_i^S$ profitot realizálnak; ha mindketten a következő időszakra halasztják az árdöntésüket, akkor $\delta^{T-1}\pi_i^S$ profitot érnek el. Ha csak a hatékonyabb vállalat hozza meg az árdöntését a $T-2$ -edik időszakban, akkor a másik vállalat az utolsó időszakban lép, ami rendre $\delta^{T-1}\pi_1^L$ és $\delta^{T-1}\pi_2^F$ profitot eredményez. A fennmaradó esetben a kevésbé hatékony vállalat az árát a $T-2$ -edik, míg a hatékonyabb vállalat a $T-1$ -edik időszakban hozza meg, ami rendre $\delta^{T-1}\pi_2^L$ és $\delta^{T-1}\pi_1^F$ profittal jár. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\pi_1^S/\pi_1^F < \delta$, ami elegendően nagy T választásával elérhető. Könnyen ellenőrizhető a (3.5) és a 3.1 táblázat segítségével, hogy a $T-2$ időpontban játszott részjáték-tökéletes egyensúlyában a kevésbé hatékony vállalat a $T-2$ -edik időszakban dönt és a hatékonyabb vállalat a döntését

a $T - 1$ -edik időszakra halasztja.

3.1. táblázat. A $T - 2$ -edik időpontbeli részjáték.

	Dönt	Vár
Dönt	$(\delta^{T-2}\pi_1^S, \delta^{T-2}\pi_2^S)$	$(\delta^{T-1}\pi_1^L, \delta^{T-1}\pi_2^F)$
Vár	$(\delta^{T-1}\pi_1^F, \delta^{T-1}\pi_2^L)$	$(\delta^{T-1}\pi_1^S, \delta^{T-1}\pi_2^S)$

Indukcióval belátjuk, hogy a $T - k$ ($k \in \{3, 4, \dots, T\}$) időszakban kezdődő részjátékban a kevésbé hatékony vállalat egyből bemondja az árát és a hatékonyabb vállalat a döntését a rákövetkező időszakra halasztja. Tegyük fel, hogy a $T - k$ -edik időszak előtt nem döntött egyik vállalat sem. Ha mindkét vállalat a $T - k$ -edik időszakban közli az árát, akkor $\delta^{T-k}\pi_i^S$ profitot érnek el. Ha mindkét vállalat elhalasztja a döntését, akkor az indukciós feltevés szerint a kevésbé hatékony vállalat a $T - k + 1$ -edik periódusban és a hatékonyabb vállalat a $T - k + 2$ -edik időpontban közli az árát, ami a két vállalat számára rendre $\delta^{T-k+2}\pi_2^L$ és $\delta^{T-k+2}\pi_1^F$ profitot ad. Ha csak a hatékonyabb vállalat nyilvánítja ki az árát a $T - k$ -edik időpontban, akkor a kevésbé hatékony vállalat a $T - k + 1$ -edik időpontban állapítja meg az árát, ami rendre $\delta^{T-k+1}\pi_1^L$ és $\delta^{T-k+1}\pi_2^F$ profittal jár. Máskülönben a kevésbé hatékony vállalat a $T - k$ -edik időpontban és a hatékonyabb vállalat a $T - k + 1$ -edik időpontban állapítja meg az árát, amivel rendre $\delta^{T-k+1}\pi_2^L$ és $\delta^{T-k+1}\pi_1^F$ profitot érnek el. Ezek után a (3.5) és a 3.2 táblázat segítségével könnyen ellenőrizhető a $T - k$ -edik időszakban kezdődő részjátékra, ha addig még nem születtek árdöntések, hogy a kevésbé hatékony vállalat a $T - k$ -edik időszakban lép és a hatékonyabb vállalat a rákövetkező időszakban. Tehát a több időszakos időzítési játék megerősíti a 3.2. tételt, azaz a kevésbé hatékony vállalat lesz az endogén első lépő.

3.2. táblázat. A $T - k$ -adik időpontbeli részjáték.

	Dönt	Vár
Dönt	$(\delta^{T-k}\pi_1^S, \delta^{T-k}\pi_2^S)$	$(\delta^{T-k+1}\pi_1^L, \delta^{T-k+1}\pi_2^F)$
Vár	$(\delta^{T-k+1}\pi_1^F, \delta^{T-k+1}\pi_2^L)$	$(\delta^{T-k+2}\pi_1^F, \delta^{T-k+2}\pi_2^L)$

4. fejezet

Árvezérlés

Az előző fejezetben az árdöntések időzítését vizsgáltuk egy több időszakos időzítési játékban, amely segíthet az oligopol piacokon gyakran tapasztalható árvezérlés megmagyarázásában. Az árvezérléssel és annak fajtáival a korai iparági szervezeti irodalom behatóan foglalkozott (lásd Stigler, 1947; Markham, 1951; Lanzillotti, 1957; és Bain, 1960). Ezekben a korai munkákban közös, hogy az árvezérlés különböző formáit (domináns vállalati, barometrikus, versenyzői barometrikus, monopolisztikus barometrikus, stb.) tárgyalták és nem adtak meg az adott típusú árvezérlési formákat megalapozó, illetve legitimáló modelleket. Már Lanzillotti (1957) és Bain (1960) is kritizálta a korai munkák leíró és empirikus természetét, de maguk nem álltak elő az árvezérlés formális modelljével. Bain (1960) különösen komoly kételyeket fogalmazott meg a domináns vállalati árvezérlés modelljével szemben, amelyben egy vállalat feltevészerűen domináns, továbbá a kompetitív szegély feltételezett árelfogadó viselkedése az oligopol elem kizárását jelentette, azaz egy szegélybeli vállalatnak nincsen stratégiai áralakító hatása.

Elsőként Ono (1982) kísérelte meg az árvezérlés formális modellezését. A modelljében egy vállalat a piaci árat, míg a többi vállalat külön-külön a saját kibocsátását határozza meg, és végül az árat meghatározó vállalat a reziduális keresletet elégíti ki. Ezzel Ono egy vegyes oligopol modellt vizsgált, amelyben egyszerre vannak árjátékosok és mennyiségi játékosok. Feltevései mellett

Ono igazolta, hogy van olyan vállalat, amely elvállalja az ármeghatározó szerepet, míg a többi vállalat a kibocsátás mennyiségének meghatározását részesíti előnyben. Azonban Ono megválaszolatlanul hagyja, hogy az árjátékos miért is a reziduális keresletet szolgálja ki és miért csak egy ármeghatározó vállalat van a piacon.

A domináns vállalati árvezérlés első játékelméleti megalapozását Deneckere és Kovenock (1988, 1992) adta. A döntések endogén sorrendjét egy kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth duopólium keretei között határozták meg. Megmutatták, hogy azonos és konstans egységköltségeket feltételezve — a hatékony adagolási szabály esetén — a nagy kapacitású vállalat a vezető szerepet és a reziduális keresleti görbe menti profitmaximalizáló árat választja. Továbbá a kis kapacitású vállalat a követő szerepét részesíti előnyben, árelfogadóként viselkedik, valamint kapacitáskorláton termel. Ez az eredmény részben választ adott a domináns vállalati árvezérlés Baini (1960, 197. oldal) kritikájára, mivel megmagyarázza a kis kapacitású vállalat árelfogadó magatartását még nagyon kis kapacitásbeli különbségek esetén is. Deneckere és Kovenock azt is megmutatta, hogy aszimmetrikus egységköltségek esetén a döntések endogén sorrendje a kapacitásoktól és az egységköltségektől egyaránt függ. Gangopadhyay (1993) részben ki tudta terjeszteni Deneckere és Kovenock eredményét kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth típusú oligopóliumokra, a szimultán és a tisztán szekvenciális ároligopólium egyensúlyának összehasonlításával. Oligopóliumok esetében azonban az általa vizsgált két speciális döntési sorrenden kívül sok más döntési sorrend is előfordulhat.

Ebben a fejezetben a Forchheimer-féle domináns vállalati árvezérlés modelljének két különböző játékelméleti megalapozását adjuk. Az első Tasnádi (2004a) nyomán egy ároligopólium alapú, míg a második a mennyiségi oligopóliumokon keresztüli megalapozás egy speciális esete Tasnádi (2010a) megközelítésének. Az utóbbi eset specialitása abban rejlik, hogy csak az azonos kisvállalatok esetét vizsgálja, amely nagymértékben leegyszerűsíti az állítás bizonyítását. Deneckere és Kovenock (1992) és Gangopadhyay (1993) konstans

egységköltség feltétele helyett szigorúan konvex költségfüggvényekkel dolgozunk. Az ároligopóliumokon keresztüli játékelméleti megalapozás esetén feltételezzük egy „nagyvállalat” jelenlétét, ahol nagyvállalat alatt az értendő, hogy a vállalat a költségelőnyének köszönhetően képes a releváns ártartományban bármelyik kisvállalat teljes kínálatát kiváltani. Arra az esetre, amikor a nagyvállalat az egzogéne adott első lépő, igazoljuk a domináns vállalati árvezérlés modelljének megvalósulását (a 4.9. állítás). A második alfejezetben a 4.9. állítás egy kiterjesztését adjuk meg, amelyben először két nagyvállalat lép először, majd utánuk sok kisvállalat. A vizsgált modell a duopolisztikus árvezérlés modelljének tekinthető. Mint már említettük, a domináns vállalati árvezérlésnek egy mennyiségi játékokon keresztüli megalapozását is megadjuk. De ebben az esetben nem beszélhetünk szó szerinti árvezérlésről, mivel a vállalatok nem az áraikat állapítják meg. Ennek ellenére belátjuk, hogy ha a nagyvállalat az egzogéne adott első lépő, akkor a mennyiségi játékok egy alkalmasan választott sorozatának egyensúlyi árai és kibocsátásai a domináns vállalati árvezérlés modellje által adott értékekhez tartanak (a 4.11. állítás).

4.1. Egy nagyvállalatos ármeghatározó oligopólium

Jelölje $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a vállalatok halmazát. Esetleges fixköltségek esetén elképzelhető, hogy pozitív p árak esetén egyes vállalatok kínálata nulla. Az alábbi feltevés biztosítja az összes vállalat aktivitását a piacon, és így nem kell a belépés kérdésével foglalkozni.

4.1. feltevés. $s_i(p^c) > 0$ bármely $i \in N$ vállalatra.

A 4.1. feltevésből az is következik, hogy $s_i(p) = (mc_i)^{-1}(p)$ bármely $p > p^c$ árra és bármely $i \in N$ vállalatra.

Most rátérünk a Forchheimer-féle domináns vállalati árvezérlés modelljének rövid ismertetésére, amelyben az 1 vállalat tölti be a domináns vállalat

szerepét és a többi vállalat alkotja a kompetitív szegélyt. Ez utóbbi vállalatok halmazát jelölje $N_c = \{2, \dots, n\}$ és legyen $S_c = \sum_{i=2}^n s_i$, a kompetitív szegély kompetitív kínálata. Forchheimer modellje szerint a domináns vállalat a reziduális keresleti görbe $D^r(p) = (D(p) - S_c(p))^+$ mentén maximalizálja a profitját, azaz a $\pi^r(p) = D^r(p)p - c_1(D^r(p))$ reziduális profitfüggvényt maximalizálja, amelynek a 2.6., a 2.9. és a 4.1. feltevések mellett van $(0, b)$ intervallumbeli megoldása. Jelölje Π^* a π^r -t maximalizáló árak halmazát. A modell szerint a domináns vállalat egy $p^* \in \Pi^*$ -beli árat választ, a többi vállalat elfogadja a p^* árat és a kompetitív szegély $S_c(p^*)$ mennyiséget kínál. Mivel Forchheimer modellje nem a vállalatok egyéni racionalitásából indul ki, a cé-lünk egy olyan oligopol játék megadása, amely egyensúlyi viselkedését tekintve ekvivalens Forchheimer modelljével.

Az árjáték értelmezéséhez meg kell adjuk a vállalatok lehetséges stratégiáit és profitfüggvényeit. A vállalatok árai a $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in [p^c, b]^n$ vektorral adottak, amelyet a továbbiakban *árprofilnak* hívunk. Az $A \subset N$ termelők $\mathbf{p}$ árprofil melletti kínálata $\widehat{S}(\mathbf{p}, A) = \sum_{i \in A} s_i(p_i)$. Legyen $B(\mathbf{p}, i) = \{j \in N \mid p_j < p_i\}$ és $C(\mathbf{p}, i) = \{j \in N^c \mid p_j = p_i\}$. Az árjátékban feltesszük, hogy a fogyasztók kiszolgálása a hatékony adagolási szabály szerint történik, és így a vállalatok által kiszolgált kereslet a következőképpen értelmezett:

$$\Delta_i(\mathbf{p}) = s_i(p_i) \min \left\{ 1, \frac{\left(D(p_i) - \widehat{S}(\mathbf{p}, B(\mathbf{p}, i)) \right)^+}{\widehat{S}(\mathbf{p}, C(\mathbf{p}, i))} \right\} \quad (4.1)$$

bármely $i \in N_c$ és

$$\Delta_1(\mathbf{p}) = \min \left\{ s_1(p_1), \left(D(p_1) - \widehat{S}(\mathbf{p}, B(\mathbf{p}, 1) \cup C(\mathbf{p}, 1)) \right)^+ \right\} \quad (4.2)$$

az 1 vállalat esetén. A (4.1) és a (4.2) feltételezi, hogy az 1 vállalat azonos árak esetén a fogyasztókat azt követően szolgálja ki, miután a többi vállalat már értékesítette a kínálatát. Ez utóbbi technikai feltevés nem jelent lényegi megszorítást, mivel ellenkező esetben a nagyvállalattal azonos árat megállapító kisvállalatok inkább alááraznák a nagyvállalat árát. Most már definiálhatjuk

4.1. EGY NAGYVÁLLALATOS ÁRMEGHATÁROZÓ OLIGOPÓLIUM 60

a vállalatok profitfüggvényeit $\pi_i(\mathbf{p}) = p_i \Delta_i(\mathbf{p}) - c_i(\Delta_i(\mathbf{p}))$ bármely $i \in N$ vállalatra.

Nyilvánvalóan a nagyvállalat mindig biztosíthatja a maga számára a $\pi^r(p^*)$ profitszintet egy $p^* \in \Pi^*$ -beli árral. Álljon

$$L = \{p \in [0, b] \mid p \min\{D(p), s_1(p)\} - c_1(\min\{D(p), s_1(p)\}) = \pi^r(p^*)\}$$

azon árakból, amelyek esetén az 1 vállalat közömbös az egész piac kiszolgálása és a reziduális keresletet kiszolgáló Forchheimer típusú domináns vállalat helyzete között. Megjegyzendő, hogy a 2.6. és a 2.9. feltevések miatt az L halmaz nemüres, de többértékű is lehet. Legyen $p^L = \inf L$. Az 1 vállalat sohasem fog p^L alatti árat megállapítani, mivel bármely $p < p^L$ ár dominált bármely $p^* \in \Pi^*$ -beli ár által. Könnyen ellenőrizhető, hogy $p^* > p^L > p^c$ bármely $p^* \in \Pi^*$ -beli árra.

A továbbiakban az 1 vállalatot nagyvállalatnak és a többi vállalatot kisvállalatnak hívjuk. A kisvállalatok együttesen alkotják a kompetitív szegélyt. A következő feltevés alátámasztja elnevezéseink jogosságát.

4.2. feltevés. Minden $i \in N_c$ -re és minden $p \in [p^L, b]$ -re

$$D(p) - \sum_{j=2}^n s_j(p) + s_i(b) < s_1(p). \quad (4.3)$$

A 4.2. feltevés biztosítja, hogy ha egy kisvállalat kivételével — amely magasabb árat választ — az összes kisvállalat a nagyvállalattal azonos $p \in [p^L, b]$ árat választja, akkor a teljes piaci kereslet a p áron kielégíthető, és így az egyedüli magasabb árat választó kisvállalat fogyasztó nélkül marad.

Ezek után rátérünk a fő kérdésünkre, hogy érdemes-e a nagyvállalatnak a piacvezető és a többi vállalatnak a piackövető szerepkört választania. Tegyük fel, hogy a vállalatok döntéseik közzétételére két időszak közül választhatnak. Miután a vállalatok meghozták időzítési döntéseiket, amelyeket mindannyian megfigyelnek, lejátsszák a megfelelő árjátékot. Mint már korábban említettük, Deneckere és Kovenock (1988, 1992) és Hamilton és Slutsky (1990) is hasonló időzítési játékot vizsgáltak.

Bebizonyítjuk, hogy a nagyvállalat első időszaki döntéshozatala és a kisvállalatok második időszaki döntéshozatalai az időzítési játék nem részjáték-tökéletes megoldásai. Ennek érdekében két egzogén döntési sorrendű árjátékot kell megvizsgálnunk: azt a játékot, amelyben csak a nagyvállalat lép az első időszakban, valamint azt a játékot, amelyben mindannyian a második időszakban lépnek.

Nézzük előbb azt az árjátékot, amelyben a nagyvállalat lép az első időszakban és a kisvállalatok a második időszakban.

4.9. állítás (Tasnádi, 2004a). *Ha a 2.6., a 2.9., a 4.1. és a 4.2. feltevések teljesülnek, továbbá a nagyvállalat lép az első időszakban, míg a többiek a második időszakban, akkor a részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyban $p_i^* = p^* \in \Pi^*$ minden $i \in N$ -re.¹*

Bizonyítás. Mint említettük, a nagyvállalat p^L alatti árat nem állapít meg. Ezért legyen $p \in [p^L, b]$ a nagyvállalat egy akciója. A bizonyításban $\mathbf{p}$ egy olyan árprofil jelöl, amelyben az összes vállalat p árat állapít meg. A továbbiakban két esetet kell megkülönböztetnünk: (i) $S_c(p) < D(p)$ és (ii) $D(p) \leq S_c(p)$. Legyen a $\bar{p}$ az az ár, amelyre $D(\bar{p}) = S_c(\bar{p})$ teljesül.

Az (i) esetben egyik $i \in N_c$ vállalat sem ad meg p alatti árat, mert p áron a kompetitív szegélybeli vállalat értékesíteni tudja a teljes kínálatát. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{p}'$ árprofil, amelyben $p'_i \geq p$ minden $i \in N_c$ -re, $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$, és $p'_1 = p$, a részjáték egy egyensúlyi megoldása. Legyen p^H a legmagasabb ár $\mathbf{p}'$ árprofilban és $A \subset N_c$ azon vállalatok halmaza, amelyek p^H árat állapítanak meg. Az A -beli vállalatok nem tudják teljes kínálatukat értékesíteni, mert $p'_i > p^c$ bármely $i \in N$ -re. Ha az A -beli vállalatok semmit sem tudnak értékesíteni, akkor mindegyikük inkább áttérne a p^H árról a p árra, és ezért $\mathbf{p}'$ nem lehet egyensúlyi árprofil.

Belátjuk, hogy ha az A -beli vállalatok csak részben tudják a kínálatukat értékesíteni, akkor A legalább kételemű. Indirekte tegyük fel, hogy $A = \{j\} \subset$

¹Az egyensúly egyértelmű, ha Π^* egyelemű, ami például azzal biztosítható, hogy a 2.10. feltevés teljesülését is megköveteljük.

N_c . Tehát

$$\widehat{S}(\mathbf{p}', N \setminus \{j\}) \geq s_1(p) + S_c(p) - s_j(b) > D(p) > D(p^H)$$

(4.3) miatt, ami ellentmondás. Ezért A legalább kételemű. De ekkor bármelyik A -beli nyerhet árának egyoldalú csekély mértékű p^H alá csökkentésével. Ezért a részjáték egyedüli lehetséges Nash-egyensúlya a $\mathbf{p}$ árprofil. Továbbá $\mathbf{p}$ valóban a részjáték egyensúlya, mert ha bármelyik kisvállalat egyoldalúan p fölé emelné az árát, akkor a (4.3) miatt az adott vállalat semmit sem tudna értékesíteni. Megállapíthatjuk tehát, hogy p áron a nagyvállalat $D(p) - S_c(p)$ mennyiséget értékesíthet.

A (ii) esetben ($\bar{p} \leq p$) egyik $i \in N_c$ vállalat sem adna meg egy $\bar{p}$ alatti árat, mert a $\bar{p}$ áron egy kompetitív szegélybeli vállalat teljes kínálatát el tudja adni. Azt állítjuk, hogy a kisvállalatok egyike sem ad meg p feletti árat, amiből viszont következik, hogy a nagyvállalat számára nem marad kereslet, és ezért a nagyvállalat $\bar{p}$ alatti árat ad meg az első időszakban. Állításunk belátásához először is megmutatjuk, hogy a részjátéknak van kevert Nash-egyensúlya.² Tekintsük a részjáték egy olyan modifikációját, amelyben a kisvállalatok stratégiahalmazait $[p^c, p]$ -re korlátozzuk. Ekkor ennek a modifikált részjátéknak már van $\varphi = (\varphi_2, \dots, \varphi_n)$ kevert egyensúlyi stratégiaprofilja, Maskin (1986, 2. tétel) egzisztencia tételének megfelelően. Továbbá φ az eredeti részjátéknak is kevert egyensúlyi stratégiája, mivel bármely $j \in N_c$ vállalatra és bármely $\tilde{p} > p$ árra a j vállalat nulla profitot ér el, amíg a többi $i \in N_c \setminus \{j\}$ kisvállalat nem változtat a saját φ_i stratégiáján, mert

$$\widehat{S}(\mathbf{p}', N \setminus \{j\}) \geq s_1(\bar{p}) + S_c(\bar{p}) - s_j(b) > D(\bar{p}) > D(\tilde{p}) \quad (4.4)$$

minden $(p'_2, \dots, p'_n) \in \text{supp}(\varphi)$ -re a (4.3) miatt, ahol $p'_1 = p$. Még igazolandó, hogy olyan kevert egyensúlyok nem létezhetnek, amelyekben néhány vállalat p feletti árat állapít meg. Ehhez vegyük a részjáték egy olyan φ kevert

²Megjegyzendő, hogy a kevert egyensúly létezése nem következik közvetlenül Maskin (1986) 2. tételéből, mert a részjáték keresleti függvényének szakadása van a nagyvállalat által meghatározott p áron.

egyensúlyát, amelyre $\sup \text{supp}(\varphi_j) > p$ legalább egy $j \in N_c$ vállalat esetén. Nyilván $\inf \text{supp}(\varphi_i) \geq \bar{p}$ bármely $i \in N_c$ -re. Legyen p^H egy kisvállalat által választott legmagasabb ár, azaz $p^H = \max_{i \in N_c} \sup \text{supp}(\varphi_i)$. Továbbá legyen $A = \{i \in N_c \mid p^H = \sup \text{supp}(\varphi_i)\}$. Ha egyik $j \in A$ -beli vállalatnak sincsen atomja a p^H áron, akkor bármely $p'_1 = p$ és $(p'_2, \dots, p'_n) \in \text{supp}(\varphi)$ összefüggéseket kielégítő árprofilra

$$\widehat{S}(\mathbf{p}', N \setminus \{j\}) > D(\bar{p}) > D(p^H) \quad (4.5)$$

(4.4) alapján, amiből bármelyik $j \in A$ -beli vállalat profitja nulla (a $p^H \in \text{supp}(\varphi_j)$ tiszta stratégiáját játszva és a több kisvállalat pedig a kevert egyensúlybeli φ_i stratégiát játszva) és ezért, φ nem lehet egy kevert egyensúlyi árprofil. Ha csak egyik vállalatnak van atomja p^H áron, akkor az a vállalat nulla profitot ér (4.5) miatt. Különben ha több vállalatnak volna atomja p^H -n úgy, hogy közben pozitív profitot érnének el, akkor bármelyikük nyerhetne azzal, ha egyoldalúan a p^H ár játszásának valószínűségével egy $p^H - \varepsilon$ ár valószínűségét növelné meg, ahol ε egy alkalmasan választott kis pozitív érték.

Végül megállapíthatjuk, hogy a nagyvállalat a reziduális keresleti görbéje mentén maximalizálja profitját, mivel $[p^L, \bar{p}]$ intervallumbeli árat választ és ebben az ártartományban a kisvállalatok árelfogadóként viselkednek. $\square$

A 4.9. állítás szerint a Forchheimer-féle domináns vállalati árvezérlés modellje realizálódik a piacon, ha a nagyvállalat lép elsőként és a kisvállalatok őt követve a második időszakban. A 4.9. állításhoz hasonló állítás található Tasnádi (2000) cikkében, amely annyiban tér el a most ismertetett állítástól, hogy a kompetitív szegélyt kontinuum sok nullamértékű kisvállalat alkotja. Tehát a 4.9. állítás rámutat arra, hogy Forchheimer modelljének megalapozása nem igényel végtelen sok kisvállalatot még szigorúan konvex költségfüggvények esetében sem.

Térjünk rá a szimultán árjátékra, amelynek a 2.6. és a 2.9. feltevések mellett Maskin 2. tétele alapján létezik kevert Nash-egyensúlyi megoldása.³ Jeleljük $\pi_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ az $i \in N$ vállalat várható profitját a $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ kevert stratégiaprofilban. A következő tétel rámutat arra, hogy a két időszakos időzítési játék nem a Forchheimer-féle domináns vállalati árvezérlés modelljét szolgáltatja.

4.1. tétel (Tasnádi, 2004a). *Legyen $\varphi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*)$ egy kevert egyensúlyi megoldása a szimultán döntésű árjátéknak. Ekkor a 2.6., a 2.9., a 4.1. és a 4.2. feltevések esetén*

$$\pi_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*) \geq \pi_1(p^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*) > \pi^r(p^*)$$

bármely $p^ \in \Pi^*$ -ra, amiből következik, hogy a nagyvállalat a szimultán döntésű árjátékot preferálja azzal a szekvenciális döntésű árjátékkal szemben, amelyben a vezető szerepet kellene betöltenie.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan nem szolgáltatathat egyensúlyi megoldást az az árprofil, amelyben egy valószínűséggel ugyanazt $p^* \in \Pi^*$ -beli árat állapítja meg az összes $i \in N$ vállalat, mert a nagyvállalat érdekében áll a p^* ár aláárazásában, amivel egy árháborút indíthat el. Vegyük észre, hogy a nagyvállalat a p^* áron egy kevert egyensúlyban $D^r(p^*)$ mennyiségnél többet értékesíthet, még abban az esetben is, ha az összes kisvállalat p^* alatti árat állapít meg egy valószínűséggel a 2.9. feltevés miatt. Ezért $\pi_1(p^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*) > \pi^r(p^*)$. A $\pi_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*) \geq \pi_1(p^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*)$ egyenlőtlenség pedig nyilvánvalóan igaz. $\square$

Elegendően aszimmetrikus költségfüggvényű árdupólium esetén a 3.2 alfejezetben megoldottuk a két időszakos időzítési játékot. Az oligopol eset azonban jóval nehezebb feladat és egyelőre nyitott probléma.

³A szimultán árjáték esetében nem szükséges a nagyvállalat és a kisvállalatok keresleteit külön összefüggéssel értelmezni, mint a szekvenciális esetben a (4.1) és a (4.2) egyenlőségekkel.

4.2. Duopolisztikus árvezérlés

Ebben az alfejezetben egy olyan piaci helyzetet vizsgálunk, amelyben két domináns vállalat és sok kisvállalat versenyez egymással. Legyen $n \geq 3$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ és $N_c = \{3, \dots, n\}$. Az 1 és 2 vállalatokra a továbbiakban nagyvállalatokként fogunk hivatkozni. A következő feltevés a játékbeli döntések időzítési sorrendjére vonatkozik.

4.3. feltevés. Feltesszük, hogy a két nagyvállalat az első időszakban lép egyszerre, míg az összes kisvállalat a második időszakban.

Jelölje $B(\mathbf{p}, i)$ azon vállalatok halmazát, amelyek az $i \in N$ vállalatnál alacsonyabb árat adnak meg és $C(\mathbf{p}, i)$ azon kisvállalatok halmazát, amelyek az $i \in N$ vállalattal azonos árat állapítanak meg. Hatékony adagolási szabályt feltételezve az egyes kisvállalatok keresleteit (4.1) definiálja, míg az $i \in \{1, 2\}$ nagyvállalat által kiszolgált kereslet az alábbiak szerint definiált: $\Delta_i(\mathbf{p}) =$

$$\begin{cases} \min \left\{ s_i(p_i), \left(D(p_i) - \widehat{S}(\mathbf{p}, B(\mathbf{p}, i) \cup C(\mathbf{p}, i)) \right)^+ \right\}, & \text{ha } p_i \neq p_j \\ \min \left\{ s_i(p_i), \frac{s_i(p_i)}{s_i(p_i) + s_j(p_j)} \left(D(p_i) - \widehat{S}(\mathbf{p}, B(\mathbf{p}, i) \cup C(\mathbf{p}, \{i, j\})) \right)^+ \right\}, & \text{ha } p_i = p_j, \end{cases} \quad (4.6)$$

ahol $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$. A vállalatok keresletének a (4.1) és a (4.6) általi definíciója feltételezi, hogy a nagyvállalathoz egy adott áron a kompetitív szegélyt követően érkeznek a fogyasztók. Ez a technikai feltétel ismét azért szükséges, hogy a kompetitív szegélynek ne kelljen a második időszakban egy tetszőlegesen kis értékkel alááraznia a nagyvállalatok árát. Ezek után már a következőképpen definiálhatjuk a vállalatok profitfüggvényeit: legyen $\pi_i(\mathbf{p}) = p_i \Delta_i(\mathbf{p}) - c_i(\Delta_i(\mathbf{p}))$ bármely $i \in N$ vállalatra.

A kompetitív szegély kínálatát $S_c(p)$ és a nagyvállalatok kínálatait $s_1(p)$, illetve $s_2(p)$ jelöli. A 2.6., a 2.9. és 4.1. feltevések segítségével ellenőrizhető, hogy a p áron az $i \in \{1, 2\}$ nagyvállalat, ha a piacon a legmagasabb árat állapítja meg és a többi vállalat azonos árat jelent be, akkor

$$Q_i^r(p) = \min \left\{ s_i(p), \left(D(p) - S_c(p) - s_j(p) \right)^+ \right\},$$

mennyiséget fog ajánlani, ahol $j \neq i$ és $j \in \{1, 2\}$. Legyen $\pi_i^r(p) = pQ_i^r(p) - c_i(Q_i^r(p))$. A $\pi_i^r(p)$ reziduális profitfüggvényt a $[0, b]$ intervallum felett maximalizáló p_i^* ár létezése a reziduális profitfüggvény folytonossága miatt garantált.

Nyilván $\pi_1^r(p_1^*)$ és $\pi_2^r(p_2^*)$ profit a többi vállalat döntésétől függetlenül elérhető az 1 és 2 vállalatok által, ahol $p_1^* \in \Pi_1^*$ and $p_2^* \in \Pi_2^*$. Legyen

$$\begin{aligned} L_1 &= \{p \in [0, b] \mid p \min\{D(p), s_1(p)\} - c_1(\min\{D(p), s_1(p)\}) = \pi_1^r(p_1^*)\} \text{ és} \\ L_2 &= \{p \in [0, b] \mid p \min\{D(p), s_2(p)\} - c_2(\min\{D(p), s_2(p)\}) = \pi_2^r(p_2^*)\} \end{aligned}$$

azon árak halmaza, amelyek esetén az 1, illetve a 2 vállalat közömbös a teljes piac kiszolgálása és a Forchheimer-féle domináns vállalat által elérhető profit-szint között. Megjegyzendő, hogy L_1 és L_2 nemüres a 2.6. és a 2.9. feltevések miatt, de a két halmaz többértékű is lehet. Legyen $p^L = \inf L_1 \cup L_2$. Az $i \in \{1, 2\}$ vállalat sosem fog p^L alatti árat megállapítani, mivel bármely $p < p^L$ ár dominált bármely $p_i^* \in \Pi_i^*$ -beli ár által. Ellenőrizhető, hogy $p_i^* > p^L > p^c$ teljesül bármely $p_i^* \in \Pi_i^*$ -beli árra.

A kínálati függvényekkel szemben a következő feltételeket támasztjuk:

4.4. feltevés. Bármely $i \in N_c$ vállalatra és bármely $p \in [p^L, b]$ árra

$$D(p) - \sum_{j=3}^n s_j(p) + s_i(b) < s_1(p) + s_2(p), \quad (4.7)$$

ahol $j \neq i$ és $j \in \{1, 2\}$.

A 4.4. biztosítja, hogy az egyedüli kisvállalként legmagasabb árat megállapító vállalat nélkül kielégíthető a piaci kereslet azon a közös $p \in [p^L, b]$ áron, amelyet a többi vállalat megállapít.

Legyen p^u az az árszint, amelyen $D(p) = S_c(p)$. A 2.6., a 2.9. és a 4.1. feltevések alapján p^u egyértelműen meghatározott.

4.10. állítás (Tasnádi, 2010b). A 2.6., a 2.9. a 4.1., a 4.3. és a 4.4. feltevések teljesülése esetén az 1 és a 2 nagyvállalatok az első időszakban egy $D^r = D - S_c$ keresleti görbéjű Bertrand–Edgeworth duopol játékot játszanak.

Bizonyítás. Mint azt már megállapítottuk, a nagyvállalatok nem választanak p^L alatti árat. Mindketten p^u alatti árat adnak meg, mert különben semmit sem tudnak értékesíteni. Vegyük tehát a nagyvállalatok egy adott $p_1, p_2 \in [p^L, b]$ első időszaki árdöntését. Tegyük fel, hogy $p_1 \leq p_2$. A bizonyításban jelölje $\mathbf{p}$ azt az árat, amelyben a p_1 árat meghatározó 1 vállalat kivételével mindegyik vállalat p_2 árat ad meg. A továbbiakban három különböző esetet kell megvizsgálnunk: (i) $S_c(p_2) + s_1(p_1) < D(p_2)$, (ii) $S_c(p_1) < D(p_1)$ és $D(p_2) \leq S_c(p_2) + s_1(p_1)$, továbbá (iii) $D(p_1) \leq S_c(p_1)$.

Az (i) esetben egyetlen $i \in N_c$ vállalat sem állapít meg p_2 alatti árat, hiszen p_2 áron bármelyik kompetitív szegélybeli vállalat értékesíteni tudja a teljes kínálatát. Tegyük fel, hogy van a részjátéknak egy olyan $\mathbf{p}'$ egyensúlyi árprofilja, amelyre $p'_i \geq p_2$ bármely $i \in N_c$ -re, $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$, $p'_1 = p_1$ és $p'_2 = p_2$. Jelölje p^H a $\mathbf{p}'$ árprofilbeli legmagasabb árat és $A \subset N_c$ a p^H árú vállalatok halmazát. Vegyük észre, hogy az A -beli vállalatok nem képesek teljes kínálatuk értékesítésére mert $p'_i > p^c$ bármely $i \in N$ -re. Ha az A -beli vállalatok semmit sem képesek értékesíteni, akkor mindegyikük áttérne a p^H árról a p_2 árra, és ezért $\mathbf{p}'$ nem lehetne egyensúlyi árprofil. Belátjuk, hogy ha az A -beli vállalatok a kínálatukat részlegesen képesek értékesíteni, akkor A legalább kételemű. Indirekte tegyük fel, hogy $A = \{j\} \subset N_c$. Ekkor

$$\widehat{S}(\mathbf{p}', N \setminus \{j\}) \geq s_1(p_1) + s_2(p_2) + S_c(p_2) - s_j(b) > D(p_2) > D(p^H)$$

(4.7) miatt, ami ellentmondás. Tehát A valóban legalább kételemű, és ezért bármelyik A -beli vállalat érdekelt a p^H ár egyoldalú aláárazásában. Ezért a részjáték egyetlen lehetséges egyensúlya $\mathbf{p}$. Továbbá $\mathbf{p}$ valóban egyensúlya a részjátéknak, mert ha egy kisvállalat egyoldalúan p_2 fölé emelné az árát, akkor nem volna kereslet a terméke iránt, (4.7) miatt. Megállapíthatjuk, hogy a nagyvállalat p_2 áron $D(p_2) - S_c(p_2) - s_1(p_1)$ mennyiséget értékesíthet.

A (ii) esetben egyik kisvállalat sem ad meg p_1 alatti árat, mivel p_1 áron bármelyik kisvállalat az egész kínálatát értékesítheti. Azt állítjuk, hogy egyik kisvállalat sem állapít meg p_2 feletti árat, ami azt is jelenti, hogy a 2 nagyvállalat semmit sem tud értékesíteni, és ezért p_2 alatti árat kell megállapítania. Először

is megmutatjuk, hogy a részjátéknak van kevert Nash-egyensúlya. Tekintsük a részjátéknak azt a variációját, amelyben a kisvállalatok csak $[p_1, p_2]$ intervallumbeli árak közül választhatnak. Ekkor e változatnak van $\varphi = (\varphi_3, \dots, \varphi_n)$ kevert egyensúlya, Maskin egzisztenciátételének (1986, 2. tétel) bizonyítása alapján. Továbbá φ kevert egyensúlya az eredeti részjátéknak, mert bármely j kisvállalat bármely $\tilde{p} > p_2$ áron semmit sem tud értékesíteni, amíg a többi $i \in N_c \setminus \{j\}$ kisvállalat nem változtat a φ_i stratégiáján, (4.7) alapján minden $(p'_3, \dots, p'_n) \in \text{supp}(\varphi)$ -re teljesül

$$\hat{S}(\mathbf{p}', N \setminus \{j\}) \geq s_1(p_1) + s_2(p_1) + S_c(p_1) - s_j(b) > D(p_1) > D(\tilde{p}) \quad (4.8)$$

egyenlőtlenség miatt, ahol $p'_1 = p_1$ és $p'_2 = p_2$. Még meg kell mutatnunk, hogy a részjátéknak nincsen olyan kevert egyensúlya, amelyben valamely vállalat p_2 feletti árat állapít meg. Vegyük a részjáték egy olyan φ kevert egyensúlyát, amelyre $\sup \text{supp}(\varphi_j) > p_2$ legalább egy $j \in N_c$ kisvállalatra. Nyilván $\inf \text{supp}(\varphi_i) \geq p_1$ bármely $i \in N_c$ -re. Jelölje p^H a kisvállalatok által választott legmagasabb árat, azaz $p^H = \max_{i \in N_c} \sup \text{supp}(\varphi_i)$. Továbbá legyen $A = \{i \in N_c \mid p^H = \sup \text{supp}(\varphi_i)\}$. Ha egyik $j \in A$ -beli vállalatnak sincsen atomja p^H áron, akkor (4.8) alapján

$$\hat{S}(\mathbf{p}', N \setminus \{j\}) > D(p_2) > D(p^H) \quad (4.9)$$

teljesül bármely olyan árprofilra, amelyre $p'_1 = p_1$, $p'_2 = p_2$ és $(p'_3, \dots, p'_n) \in \text{supp}(\varphi)$. Ebből viszont következik, hogy bármely $j \in A$ vállalat nem realizál profitot (ha a $p^H \in \text{supp}(\varphi_j)$ tiszta stratégiát játssza és versenytársai a φ_i kevert stratégiát játsszák) és ezért, φ nem lehet kevert egyensúlyi árprofil. Ha csak egy vállalatnak van atomja a p^H áron, akkor ez a vállalat nem profitábilis (4.9) alapján. Különben, ha több mint egy kisvállalatnak van atomja p^H áron úgy, hogy közben mindegyik profitábilis, akkor bármelyikük növelheti profitját a p^H ár játszási valószínűségének $p^H - \varepsilon$ árra történő áthelyezésével, ahol ε egy kellően kicsi pozitív érték.

A (iii) eset a (ii) esethez hasonlóan igazolható. A bizonyítás kulcslépése annak belátása, hogy a kisvállalatok egyike sem választ p_2 feletti árat. A részletek

megismétlésétől itt eltekintünk.

Összegezve megállapíthatjuk, hogy az 1 és 2 vállalatok az első időszakban egy $(D - S_c)^+$ keresleti görbájú Bertrand–Edgeworth duopol játékot játszanak, amelynek Maskin (1986) 2. tétele alapján van kevert egyensúlyi megoldása. $\square$

Megjegyzendő, hogy a 4.10. állítás kiterjeszthető oligopolisztikus árvezérlésre a 4.4. feltevésben szereplő egyenlőtlenség

$$D(p) - \sum_{j=m+1}^n s_j(p) + s_i(b) < \sum_{j=1}^m s_j(p)$$

egyenlőtlenségre történő cserélésével. Nevezetesen ha m nagyvállalat az első és $n - m$ kisvállalat a második időszakban lép, akkor az m nagyvállalat az első időszakban egy $D - \sum_{i=m+1}^n s_i$ keresleti görbájú Bertrand–Edgeworth oligopol játékot játszik.

4.3. Domináns vállalati árvezérlés és egy invariancia tétel

Ebben az alfejezetben a 2.6., a 2.7., a 2.9. és az alábbi feltevéseknek eleget tevő $O = (O^n)_{i=1}^\infty$ oligopol piacokhoz kapcsolódó $O_q = (O_q^n)_{i=1}^\infty$ mennyiségi játékok sorozatát vizsgáljuk.

4.5. feltevés. A piacon nincsenek fixköltségek és a nulla kibocsátás melletti határköltségek nullák.

4.6. feltevés. Az 1 vállalat az első időszakban lép és a többi $2, \dots, n$ vállalat szimultán lép a második időszakban. Továbbá az 1 vállalat kompetitív kínálata és a többi $n - 1$ vállalat által alkotott kompetitív szegély kínálata azonos az O sorozat minden egyes oligopol piacán.

A feltevéseink alapján legyen $S_c = S_c^n = ns_i^n = \sum_{i=2}^n s_i^n$ a kompetitív szegély összkínálata (ahol $i = 2, \dots, n$), $MC_c = S_c^{-1}$ az előbbi inverze,

$s_1 = s_1^n$ a nagyvállalat kínálata és bármely $i = 2, \dots, n$ -re $s_n = s_i^n$ egy kisvállalat kompetitív kínálata az O^n oligopol piacon. A kínálati függvényekhez hasonló módon indexeljük a vállalatok költség- és határköltségfüggvényeit. Nyilván $MC_c(nq) = mc_n(q)$. Tehát az n -edik oligopol piac megadható az $O^n = \langle \{1, 2, \dots, n\}, (c_1, c_n, \dots, c_n), D \rangle$ struktúrával és a hozzátartozó n -edik oligopol játékot pedig az $O_q^n = \langle \{1, 2, \dots, n\}, [0, a]^n, (\pi_i^n)_{i=1}^n \rangle$ struktúra adja meg, ahol $\pi_1^n(q_1, \dots, q_n) = \pi_1(q_1, \dots, q_n) = P(q_1 + q_2 + \dots + q_n)q_1 - c_1(q_1)$ és $\pi_i^n(q_1, \dots, q_n) = \pi_n(q_1, \dots, q_n) = P(q_1 + q_2 + \dots + q_n)q_i - c_n(q_i)$ minden $i \in \{2, \dots, n\}$ -re.

A következő állítás kapcsolatot létesít a mennyiségi játékok sorozata és a Forchheimer-féle domináns vállalati árvezérlés modellje között. Nevezetesen a mennyiségi játékok egyensúlyi ára, a feltételeink alapján egyértelműen létező, p^* domináns vállalati árhoz és a kisvállalatok össztermelése is a Forchheimer modellbeli kompetitív össztermeléséhez tart.⁴

4.11. állítás (Tasnádi, 2010b). *Legyen $O_q = (O_q^n)_{n=1}^\infty$ egy a 2.6., a 2.9., a 2.10., a 4.5. és a 4.6. feltevéseknek eleget tevő mennyiségi oligopol játékok sorozata. Ekkor az O_q^n játékoknak minden $n \geq 2$ -re létezik részjáték-tökéletes Nash-egyensúlya, továbbá ha a $(q_i^n)_{i=1}^n$ az O_q^n játékok részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyainak sorozatát jelöli, akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sum_{i=1}^n q_i^n \right) = p^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_1^n = s_1(p^*) \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n q_i^n = S_c(p^*);$$

azaz a mennyiségi oligopol játékok egyensúlyi kimenetele a domináns vállalati árvezérlés modelljének kimeneteléhez tart.

Bizonyítás. Forchheimer modelljében a domináns vállalat a reziduális keresleti görbe menti profitmaximalizáló árat választja. Ezért a

$$\pi^r(p) = (D(p) - S_c(p))p - c_1(D(p) - S_c(p))$$

⁴A 4.11. állítás egy speciális esete Tasnádi (2010a) 1. állításának, amelyben megengedett a kisvállalatok költségfüggvényei közötti eltérés is. Az azonos költségfüggvényű kisvállalatok esetében a 4.11. állítás bizonyítása jóval egyszerűbb.

reziduális profitfüggvényt maximalizálja. A problémához tartozó elsőrendű feltétel $(\pi^r)'(p) =$

$$(D(p) - S_c(p)) + (D'(p) - S'_c(p))(p - mc_1(D(p) - S_c(p))) = 0. \quad (4.10)$$

A feltételeink alapján (4.10) egyértelműen megoldható és egyben a maximum elégséges feltétele. A kisvállalatok a domináns vállalattal azonos árat állapítanak meg és $S_c(p)$ mennyiséget kínálnak. Az állításunk igazolásához megmutatjuk, hogy az O_q^n játékok egyensúlyi árainak sorozata a (4.10) megoldásához tart.

Az n -edik mennyiségi játékot megoldhatjuk visszafele történő indukcióval. Legyen q_1 az 1 vállalat első időszaki termelése. Ekkor a második időszakban az $i \in \{2, \dots, n\}$ kisvállalatok a

$$\pi_i^n(q_i) = P(q_1 + q_2 + \dots + q_n)q_i - c_n(q_i)$$

profitfüggvényeiket maximalizálják, amelyhez megoldják a $(\pi_i^n)'(q_i) =$

$$P(q_1 + q_2 + \dots + q_n) + P'(q_1 + q_2 + \dots + q_n)q_i - mc_n(q_i) = 0,$$

elsőrendű feltételeket, amelyek feltételeinknek köszönhetően egyben a maximum elégséges feltételei is. Ellenőrizhető, hogy az n elsőrendű feltételnek, feltevéseink alapján, csak szimmetrikus megoldása lehet. Ezért a megoldandó elsőrendű feltétel

$$(\pi_i^n)'(q) = P(q_1 + nq) + P'(q_1 + nq)q - mc_n(q) = 0 \quad (4.11)$$

alakba írható, amelynek létezik egyértelmű megoldása bármely $q_1 \in [0, a]$ mennyiség esetén. Jelölje $q(q_1)$ a kisvállalat termelését a nagyvállalat első időszaki q_1 termelési döntésének függvényében. Alkalmazzuk $q(\cdot)$ -re az implicit függvény tételét:

$$\frac{dq}{dq_1}(q_1) = -\frac{P'(q_1 + nq) + P''(q_1 + nq)q}{(n+1)P'(q_1 + nq) + nP''(q_1 + nq)q - mc'_n(q)}. \quad (4.12)$$

A (4.12) nevezője a feltevéseinkből adódóan mindig negatív. Az első időszakban a nagyvállalat a

$$\pi_1^n(q_1) = P(q_1 + nq(q_1))q_1 - c_1(q_1)$$

profitfüggvényét maximalizálja. Ezért az általa megoldandó elsőrendű feltétel:

$$\begin{aligned} (\pi_1^n)'(q_1) &= P(q_1 + nq(q_1)) + \\ &P'(q_1 + nq(q_1)) \left(1 + n \frac{dq}{dq_1}(q_1)\right) q_1 - mc_1(q_1) = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy (4.13) egyértelműen megoldható és a megoldásával valóban a profitmaximalizáló első időszaki kibocsátás adódik. Jelölje q_1^n és q^n az n -edik mennyiségi oligopol játék egyensúlyi megoldását. Ellenőrizhető, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Legyen továbbá $p^n = P(q_1^n + nq^n)$, $r^n = P'(q_1^n + nq^n)$ és $s^n = P''(q_1^n + nq^n)$. Mivel a $(q_1^n, nq^n)_{n=1}^\infty$ sorozat korlátos, van torlódási pontja. Vegyük a sorozat egy tetszőleges $(q_1^{n_k}, n_k q^{n_k})_{k=1}^\infty$ konvergens részsorozatát. Jelölje $(\bar{q}_1, \bar{q}_c)$ a konvergens részsorozat határértékét, továbbá $\bar{p}$, $\bar{r}$ és $\bar{s}$ rendre a $(p^{n_k})_{k=1}^\infty$, $(r^{n_k})_{k=1}^\infty$ és $(s^{n_k})_{k=1}^\infty$ sorozatok határértékeit. Folytonossági megfontolásokból kapjuk a következő három egyenlőséget:

$$\bar{p} = P(\bar{q}_1 + \bar{q}_c) \quad (4.14)$$

$$\bar{r} = P'(\bar{q}_1 + \bar{q}_c) \quad (4.15)$$

$$\bar{s} = P''(\bar{q}_1 + \bar{q}_c). \quad (4.16)$$

(4.12), (4.15) és (4.16) adja a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k \frac{dq}{dq_1}(q_1^{n_k}) = -\frac{\bar{r}}{\bar{r} - MC'_c(\bar{q}_c)} \quad (4.17)$$

egyenlőséget. Ha határértékeket veszünk a (4.11) és a (4.13) összefüggésekben, akkor a (4.17) figyelembevételével

$$\bar{p} = MC_c(\bar{q}_c) \quad (4.18)$$

$$\bar{p} = mc_1(\bar{q}_1) - \bar{r} \left(1 - \frac{\bar{r}}{\bar{r} - MC'_c(\bar{q}_c)}\right) \bar{q}_1 \quad (4.19)$$

adódik. Most megmutatjuk, hogy ha (4.14)-(4.19) teljesül, akkor $\bar{p}$ megoldása a (4.10) egyenletnek. Először is

$$D(\bar{p}) - S_c(\bar{p}) = \bar{q}_1 + \bar{q}_c - \bar{q}_c = \bar{q}_1 \quad (4.20)$$

(4.14) és (4.18) miatt. Majd

$$D'(\bar{p}) - S'_c(\bar{p}) = \frac{1}{P'(D(\bar{p}))} - \frac{1}{MC'_c(S_c(\bar{p}))} = \frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{MC'_c(\bar{q}_c)} \quad (4.21)$$

(4.14), (4.15) és (4.18) miatt. Végül

$$\begin{aligned}\bar{p} - mc_1(D(\bar{p}) - S_c(\bar{p})) &= -\bar{r} \left(1 - \frac{\bar{r}}{\bar{r} - MC'_c(\bar{q}_c)}\right) \bar{q}_1 = \\ &= \frac{\bar{r} MC'_c(\bar{q}_c)}{\bar{r} - MC'_c(\bar{q}_c)} \bar{q}_1\end{aligned}\quad (4.22)$$

(4.19) és (4.20) alapján. Helyettesítsük be a (4.20), a (4.21) és a (4.22) egyenlőségeket (4.10)-be, és ezáltal

$$\frac{\partial \pi^r}{\partial p}(\bar{p}) = \bar{q}_1 + \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{MC'_c(\bar{q}_c)}\right) \left(\frac{\bar{r} MC'_c(\bar{q}_c)}{\bar{r} - MC'_c(\bar{q}_c)}\right) \bar{q}_1 = 0.$$

Tehát $\bar{p}$ valóban megoldása a (4.10) egyenletnek. De mivel a (4.10) egyenletnek csak egyetlen megoldása van, megállapíthatjuk, hogy a $(p^n)_{n=2}^\infty$ sorozatnak is csak egyetlen torlódási pontja van, amiből adódóan a $(q_1^n, nq^n)_{n=2}^\infty$ sorozatnak is csak egyetlen torlódási pontja van (4.14) és (4.18) alapján. $\square$

Sadanand és Sadanand (1996) hasonló eredményre jutott kellően kicsi, de nem eltűnő keresletbizonytalanság és kontinuum sok kisvállalat esetén. Tasnádi (2010a) 2. állítása megmutatja Matsumura (1999) mennyiségi játékok időzítésére vonatkozó tételének alkalmazásával, hogy a 4.11. állításban feltételezett egzogén döntési sorrend nem endogenizálható egy több időszakos időzítési játék segítségével.

Az árjátékok és mennyiségi játékok sorozata segítségével a domináns vállalati árvezérlés két különböző játékelméleti megalapozását adtuk egzogéne adott első lépő nagyvállalat feltételezése mellett.

4.2. tétel (Tasnádi, 2010b). *Ha az $O = (O^n)_{n=1}^\infty$ oligopol piacok sorozata kielégíti a 2.6., a 2.9., a 2.10., a 4.5. és a 4.6. feltevéseket, akkor bármely pozitív ε értékhez létezik olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy az O_p^n árjáték és az O_q^n mennyiségi játék egyensúlyi árai közötti különbsége kisebb ε -nál bármely $n \geq n_0$ -ra.*

Bizonyítás. A 4.9. és a 4.11. állítások egyszerű következménye. $\square$

5. fejezet

Termelési mód

Homogén termékű duopol környezetben már Shubik (1955) felvetette, hogy a szokásos ár- és mennyiségi játékok mellett egyszerre ár-mennyiségi játékok is vizsgálандók. Ennek nyilvánvaló oka, hogy a vállalatoknak jogukban áll áruk és mennyiségük megállapítása, és így a piacon nem alakul ki szükségszerűen a keresleti függvénnyel összhangban lévő megoldás, azaz fennáll a túltermelés (keletkező készletekkel) vagy a hiány (adott áron kielégítetlen fogyasztókkal) lehetősége. Bár számos esetben az ár-mennyiségi játék Nash-egyensúlyában a túltermelés és a hiány problémája sem merül fel, azonban tiszta Nash-egyensúly hiányában a kevert Nash-egyensúlyban mindkét probléma előállhat. Shubik (1955) olyan árjátékokat vizsgált, amelyben a vállalatok áraikat és a maximális kibocsátásukat (azaz az általuk maximálisan kielégítendő kereslet mértékét) állapítják meg. Megjegyzendő, hogy ebben a játékban a vállalatok mennyiségi döntése alárendelt szerepet játszik az árdöntésükhöz képest. Továbbá Shubik (1955) vizsgált egy ár-mennyiségi játékot is, amelyben a szimultán meghozott ár és mennyiségi döntések esetén a mennyiségi döntések valóban a kibocsátás értékét adják meg. A megfogalmazott ár-mennyiségi játék megoldását Shubik (1955) nem adta meg. Shubik (1955, 430. oldal) sejtésként megfogalmazta, hogy az ár-mennyiségi játék árainak az árjáték árainál alacsonyabbnak kell lennie a készletképződési kockázat miatt.

A továbbiakban lényegében Maskin (1986) terminológiáját követve, a

Shubik-féle árjátékra *rendelésre történő termelési játékként* és a Shubik-féle ár-mennyiségi játékokra *készletre történő termelési játékként* fogunk hivatkozni. A készletre történő termelés megköveteli, hogy a termelés folyamata az értékesített mennyiségek meghatározása előtt történjen. Példaként romlandó termékek piacát szokás tipikus készletre történő termelési piacokként emlegetni. Ezzel szemben rendelésre történő termelés esetén az értékesített mennyiségek a letermelt mennyiségek előtt határozódnak meg, amelyre tipikus példaként hozható fel a hajók vagy repülőgépek piaca. Phillips, Menkhaus, és Krogmeier (2001) hangsúlyozta, hogy vannak olyan termékek is, amelyek mindkét módon termelhetők és értékesíthetők. Ehhez gondoljunk a készletre történő termelésre egyfajta azonnali (spot) piaci értékesítésre és a rendelésre történő termelésre egyfajta határidős (forward) piaci értékesítésre. Így például az elektromos áram vagy a szén mindkét környezetben értékesíthető. Természetesen a valós piaci helyzetek sokkal árnyaltabbak, hiszen a termelési folyamat időigénye és a vásárló várakozási idejét tekintve sokféle átmenet lehetséges, azaz a két általunk duopol piacon vizsgálandó termelési mód két szélsőséges helyzetnek tekinthető. A két termelési mód kísérleti közgazdaságtani elemzése tekintetében Mestelman, Welland, és Welland (1987), Phillips, Menkhaus, és Krogmeier (2001) és Davis (2010) munkáira utalunk. Szigorúan növekvő és növekvő határkölségű költségfüggvények mellett Mestelman, Welland, és Welland (1987) megfigyelte, hogy a vállalatok profitja készletre történő termelés esetén alacsonyabb, ami egybeesik Shubik (1955) sejtésével. Egy kísérleti árverezési piacon Phillips, Menkhaus, és Krogmeier (2001) megfigyelte, hogy készletre történő termelés esetében az árak és profitok magasabbak, míg a mennyiségek és a fogyasztói többletek alacsonyabbak. A közelmúltban Davis (2010) kísérleti kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth oligopol piacon magasabb árakat tapasztalt készletre történő termelés esetén. Davis (2010) egy olyan dinamikus modellt is vizsgált, amelyben a készleten maradt mennyiségeket a rákövetkező időszakban is piacra lehet vinni.

Ebben a fejezetben a készletre történő termelést és a rendelésre történő

termelést hasonlítjuk össze a homogén termékű kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth duopólium keretei között,¹ amelyre a kevert Nash-egyensúly létezésén (lásd Maskin, 1986 1. tétel) túli ismereteink nagyon hiányosak. Ismertetjük Tasnádi (2004b) szimmetrikus kapacitások feltételezése melletti eredményeit. Feltesszük továbbá, hogy a duopolisták egységköltségei pozitívak, amiből következik a rendelésre történő termelés és a készletre történő termelés egyensúlyai közötti minőségi különbség. Nulla egységköltség esetén nyilván veszteség nélkül bármekkora mennyiség előre letermelhető.

5.1. A modellkeret

A D keresleti görbéről feltesszük, hogy mindkét tengelyt metssze, továbbá szigorúan monoton csökkenő és konkáv legyen abban a tartományban, amelyben D pozitív, tehát a 2.6. és a 2.10. feltevésekkel élünk. Ekkor egy c egységköltségű és k kapacitáskorlátú monopolista egyértelmű profitmaximalizáló ára $p^M = \arg \max_{p \in [0, b]} (p - c) \min \{D(p), k\}$.

A duopolistákkal kapcsolatban az alábbi feltevással élünk:

5.1. feltevés. Az 1 és 2 vállalat $c \in (0, b)$ egységköltsége azonos az egységes pozitív k kapacitáskorlátig. Mindketten ár- $(p_1, p_2 \in [0, b])$ és mennyiség meghatározók $(q_1, q_2 \in [0, k])$.

A piacon hatékony adagolást feltételezve a vállalatok keresletei

$$\Delta_i(D, p_1, q_1, p_2, q_2) = \begin{cases} D(p_i), & \text{ha } p_i < p_j \\ \frac{q_i}{q_i + q_j} D(p_i), & \text{ha } p_i = p_j \\ (D(p_i) - q_j)^+, & \text{ha } p_i > p_j \end{cases}$$

bármely $i \in \{1, 2\}$ -re.

Egy c -nél alacsonyabb ár mellett egy vállalat nyilván nem termel. Azonban, ha egy vállalat semmit sem termel, akkor árválasztása közömbös. Továbbá

¹Korlátlan kapacitások mellett Levitan és Shubik (1978) kiszámolta a készletre történő termelés kevert Nash-egyensúlyi stratégiáját.

könnyen ellenőrizhető, hogy bármely p^M feletti ár dominált. Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a duopolisták $[c, p^M]$ -beli árakat adnak meg. Legyen $\bar{\pi} = \max_{p \in [c, p^M]} \pi^r(p) = \max_{p \in [c, p^M]} (p - c)(D(p) - k)^+$ és $\bar{p} = \arg \max_{p \in [c, p^M]} \pi^r(p)$.

A 2. fejezetben említettük, hogy rendelésre történő termelés esetében a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth duopólium kevert Nash-egyensúlyát meglehetősen erős feltevések mellett meghatározta Levitan és Shubik (1972), Osborne és Pitchik (1986) és Vives (1986):

5.12. állítás. *A 2.6., a 2.10. és az 5.1. feltevések, továbbá a hatékony adagolási szabály mellett a rendelésre történő termelési játéknak egyetlen szimmetrikus Nash-egyensúlyi megoldása létezik. Három különböző esetre bontva az egyensúly az alábbiakban adott.*

1. *Ha $p^c \geq \bar{p}$, akkor a tiszta Nash-egyensúlyban mindkét vállalat a piactisztító árat választja, azaz $p_i = p^c$.*
2. *Ha $\bar{p} > \max\{p^c, c\}$, akkor a nem elfajuló kevert Nash-egyensúlyi megoldásban a vállalatok az*

$$F(p) = \frac{(p - c)k - \bar{\pi}}{(p - c)(2k - D(p))} \quad (5.1)$$

ár-eloszlásfüggvény szerint áraznak bármely $p \in [\underline{p}, \bar{p}]$ -re, ahol $\underline{p} = c + \bar{\pi}/k$.

3. *Ha $D(c) \leq k$, akkor a tiszta Nash-egyensúlyban mindkét vállalat az egységköltséggel egyező árat választ, azaz $p_i = c$.*

Az 5.12. állítás 1. esete akkor áll elő, ha a vállalatok kapacitáskorlátai élesek, míg a 3. esete akkor, ha bármelyik vállalat képes a teljes piaci kereslet kielégítésére. Emiatt az első esetre a kis kapacitású és a harmadik esetre a nagy kapacitású esetként fogunk hivatkozni. A 2. esetet — amelyben a duopóliumnak csak nem elfajuló kevert Nash-egyensúlya van — közepes kapacitású esetnek hívjuk. A készletre történő termelésű Bertrand–Edgeworth duopóliumban is e három esetben eltérő jellegű Nash-egyensúlyt kapunk.

5.2. Készletre történő termelés melletti egyensúly

Nézzük először a kis kapacitások esetet, amely az egyetlen tiszta Nash-egyensúllyal rendelkező eset.

5.13. állítás (Tasnádi, 2004b). *Teljesüljenek a 2.6., a 2.10. és az 5.1. feltételek, továbbá a fogyasztók kiszolgálása a hatékony adagolási szabály szerint történjen. Ha a készletre történő termelési játéknak van tiszta Nash-egyensúlya, akkor az a $p_i = p^c$ és $q_i = k$ ($i \in \{1, 2\}$) stratégiaprofil. Továbbá a játéknak pontosan akkor van tiszta Nash-egyensúlya, ha $p^c \geq \bar{p}$.*

Bizonyítás. Nem létezhet olyan tiszta Nash-egyensúly, amelyben $c \leq p_i < p_j$, mert ekkor,

- ha $D(p_i) > k$ vagy $p_i = c$, akkor az i vállalat érdekelt árának emelésében, és
- ha $D(p_i) \leq k$ és $p_i > c$, akkor az i vállalat termelése $q_i = D(p_i)$, amiért a j vállalat p_i alá csökkentené az árát.

Tehát egy tiszta Nash-egyensúlyban a két vállalat szükségszerűen egymással megegyező p árat állapít meg. Vegyük észre, hogy egyik vállalat sem választ p^c alatti árat. Viszont a $p_i = p_j > \max\{p^c, c\}$ feltételnek eleget tevő stratégiaprofil sem lehet tiszta Nash-egyensúlyi, mert egy ilyen stratégiaprofilban legalább az egyik vállalat nyerhet a versenytárs árának aláárazásával. Ha $p^c < c$, akkor $p_i = p_j = c$ sem adhat tiszta Nash-egyensúlyt, mert ez esetben $q_i + q_j \leq D(c)$ -nek kellene teljesülnie, és ezért legalább egyik vállalat profitot realizálhat egy megfelelő mértékű egyoldalú áremeléssel, azaz egy c fölötti ár megállapításával.

Végül ha $p^c \geq c$, akkor még meghatározandó a $p_i = p^c$ és $q_i = k$ stratégiaprofil egyensúlyi voltának szükséges és elégséges feltétele. Megjegyzendő, hogy $p^c \geq c$ -ből következik $\bar{p} > c$. Tehát ha $p^c \geq c$, akkor a

$$\frac{d\pi^r}{dp}(p^*) = (p^* - c) D'(p^*) + D(p^*) - k \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^* \geq \bar{p}$$

feltétel a $p_i = p^c$ és $q_i = k$ stratégiaprofil egyensúlyi voltának szükséges és elégséges feltétele a 2.6. és az 5.1. feltevések miatt. $\square$

Az 5.12. állítást az 5.13. állítással összehasonlítva, megfigyelhetjük, hogy rendelésre történő és készletre történő termelés mellett azonos tiszta Nash-egyensúlyi megoldást kapunk abban az esetben, ha mindkét játéknak van tiszta Nash-egyensúlya. Az 5.13. állítás a készletre történő termelés és a rendelésre történő termelés közötti lényeges különbségre is felhívja a figyelmünket, ugyanis nagy kapacitások esetén csak rendelésre történő termelés esetén létezik tiszta Nash-egyensúly. Az arányos adagolási szabály mellett Boyer és Moreaux (1987) hasonló irányba mutató eredményt kaptak azzal, hogy kimutatták a tiszta Nash-egyensúly nem létezését készletre történő termelés és korlátlan kapacitások mellett.

A szimmetrikus kevert Nash-egyensúllyal kapcsolatban az alábbi állítást fogalmazhatjuk meg közepes kapacitások, azaz $\bar{p} > \max\{p^c, c\}$, esetén.

5.14. állítás (Tasnádi, 2004b). *Teljesüljenek a 2.6., a 2.10. és az 5.1. feltevések, továbbá a fogyasztók kiszolgálása a hatékony adagolási szabály szerint történjen. Ha $\bar{p} > \max\{p^c, c\}$, akkor a készletre történő termelési duopol játék bármely (μ, μ) szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyában az egyensúlyi profit $\bar{\pi}$ és*

$$\mu^p(\underline{p}, p) = \mu(\underline{p}, p, \{k\}) = \frac{(p - c)k - \bar{\pi}}{p(2k - D(p))} \quad (5.2)$$

bármely $p \in [\underline{p}, \bar{p}]$ árra.

Az 5.14. állítás alapján a várható egyensúlyi profit készletre történő termelés és rendelésre történő termelés mellett azonos a szimmetrikus kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth duopólium bármely szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyában. Továbbá az (5.1) és az (5.2) összehasonlításából látható, hogy a készletre történő termelési játék bármely szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyának áreloszlása (elsőrendben) sztochasztikusan dominálja a rendelésre történő termelési játék egyensúlyi áreloszlását. Ebből a szempontból a két

termelési mód kifizetés-ekvivalenciája még meglepőbb, hiszen az előbbi ekvivalencia eltérő árelosztások mellett jön létre. Az 5.14. állításból arra is következtethetünk, hogy a készletre történő termelés melletti fogyasztói többlet kisebb, mint rendelésre történő termelés esetén. Ebből adódóan már hasonló irányú reláció adódik a társadalmi jólétre vonatkozóan is. Tehát jóléti megfontolásokat is figyelembe véve a rendelésre történő termelés részesítendő előnyben. Az 5.14. állítás bizonyítását a Függelék tartalmazza.

Nagy kapacitásokra pedig a következő állítás fogalmazható meg.

5.15. állítás (Tasnádi, 2004b). *Készletre történő termelés esetén bármely szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyban a duopolisták várható profitjai nullával egyenlők a $D(c) \leq k$, a 2.6., a 2.10., az 5.1. feltevések és a hatékony adagolási szabály feltételezése mellett.*

Az 5.15. állítás feltevései mellett az is észrevehető, hogy nagy kapacitások esetén is sztochasztikusan dominálják a készletre történő termelési játék árai a rendelésre történő termelési játék árait, mivel az előbbi esetben a duopolisták sosem állapítanak meg c alatti árakat, míg az utóbbi esetben pontosan c árat állapítanak meg. Továbbá az 5.15. állítás összhangban van Levitan és Shubik (1978) eredményével, amely szerint kevert egyensúlyban a duopolisták profitja nulla, korlátlan kapacitások és készletre történő termelés esetén.

Az 5.13., az 5.14. és az 5.15. állítások alapján szimmetrikus egyensúlybeli profitjukat tekintve a két termelési mód ekvivalensnek mondható szimmetrikus kapacitások és egységköltségek esetén. Az árakat tekintve az egyensúlyi árak magasabbak készletre történő termelés esetén. A három állítás fő megállapításait egy tételben fogalmazzuk meg.

5.1. tétel. *Teljesüljenek a 2.6., a 2.10. és az 5.1. feltevések, továbbá a fogyasztók kiszolgálása a hatékony adagolási szabály szerint történjen. Ekkor a készletre történő termelési és a rendelésre történő termelési játékok egyensúlyi profitjai azonosak, míg a készletre történő termelés egyensúlyi árai sztochasztikusan dominálják a rendelésre történő termelés árait, ha szimmetrikus*

egyensúlyokra szorítkozunk.

5.3. Döntés időzítés készletre történő termelésnél

Ebben az alfejezetben a 3.2. alfejezetben vizsgált időzítési játék — amelyben a vállalatok döntéseik meghozatalakor két időszak közül választhatnak — keretei között elemezzük az endogén döntési sorrendet készletre történő termelés esetén. A továbbiakban a szimmetrikus kapacitáskorlátos modellkeretet vesszük alapul és szimmetrikus egyensúlyokra szorítkozunk. A szimmetria feltevésünk miatt csak két egzogén döntési sorrendű játékot kell vizsgálnunk: a szimultánt és a szekvenciális.

Abban az esetben, amikor a vállalatok ugyanabban az időszakban hozzák meg az ár és mennyiségi döntéseiket, nyilván alkalmazhatóak az előző alfejezet eredményei. A szekvenciális játékban az $i \in \{1, 2\}$ vállalat az első időszakban határozza meg az árát és a mennyiségét, majd a $j \neq i$ ($j \in \{1, 2\}$) vállalat a második időszakban határozza meg az árát és a mennyiségét. Mivel az elemzések a 3. fejezetben elvégzett gondolatmenetek segítségével megkaphatók, itt csak informálisan közöljük az eredményeket és vázoljuk a bizonyításokat.

Először is kis kapacitások esetében nem számít a döntési sorrend, mivel a vállalatok úgyis kapacitáskorláton termelnek és piactisztító áron értékesítenek.

Közepes kapacitásokat vizsgálva az elemzés nagyon hasonlít Deneckere és Kovenock (1992)-re, illetve a 3.1. alfejezetben elvégzett számításokhoz. A fő gondolat szerint az alacsonyabb árú vállalat k kapacitáskorláton termel, míg a magasabb árú vállalat a reziduális keresletet elégíti ki. Ezért ugyanazt az eredményt kapjuk a szekvenciális játékra, mint a rendelésre történő termelés esetén. Nevezetesen ha két különböző időszakban lépnek a vállalatok, akkor az egyik lehetséges tiszta részjáték-tökéletes egyensúlyban, mindketten $\bar{p}$ árat állapítanak meg, az első lépő a reziduális keresletet szolgálja ki és a második lépő kapacitáskorláton értékesít. A másik lehetséges részjáték-tökéletes egyen-

súlyban az első lépő $\underline{p}$ árat és k mennyiséget ad meg, majd a második lépő $\bar{p}$ árat és $D(\bar{p}) - k$ mennyiséget állapít meg. Megjegyzendő, hogy az előbbi részjáték-tökéletes egyensúly hatékonyabb az utóbbinál.

Végül jelentős különbséget tapasztalunk nagy kapacitások esetén, amelyet már az 5.15. állítás sejtet. A rendelésre történő termelés esetén tiszta Nash-egyensúlya van a szimultán játéknak, míg készletre történő termelés esetén csak nem elfajult kevert egyensúllyal állunk szemben. Emlékeztetőül mindkét szimultán játék egyensúlyában nulla profitot, illetve nulla várható profitot érnek el a vállalatok. A szekvenciális rendelésre történő termelési játéknak egyensúlyi profitja Deneckere és Kovenock (1992) alapján ugyancsak nulla. Azonban a készletre történő termelés esetén nem ez a helyzet, mivel az első lépő dönthet egy olyan kapacitás korlát alatti termelési szint mellett, amelyre válaszolva a második lépő a reziduális kereslet kiszolgálása mellett dönthet. Megjegyzendő, hogy Boyer és Moreaux (1987) meghatározta a részjáték-tökéletes egyensúlyát a szekvenciális készletre történő rendelési játéknak, arányos adagolási szabály, lineáris kereslet és korlátlan kapacitás mellett.² Még ha az eredményeik részben függnék az adagolási szabály választásától, a fő eredményük — hogy az első lépő egy alacsonyabb árat állapít meg a követőnél, továbbá mindkét vállalat pozitív profitot realizál — a hatékony adagolási szabály mellett is fennáll. Emiatt készletre történő termelés esetén a szimultán játék semmiképpen sem lesz az időzítési játék részjáték-tökéletes egyensúlya. Ezért a szimmetria feltevésünk szerint bármelyik szekvenciális döntési sorrend az időzítési játék egyensúlyát adja. Az eredményünk aszimmetrikus kapacitásokra történő kiterjesztése komoly nehézségekbe ütközik, mivel az 5.14. és az 5.15. állítások kiterjesztése aszimmetrikus kapacitásokra nehéz feladat.

²A nagy kapacitások esete tulajdonképpen azonosan viselkedik a korlátlan kapacitások esetével.

6. fejezet

Döntési változók választása

Ebben a fejezetben egy olyan játékot vizsgálunk, amelyben a vállalatok szimultán módon megválaszthatják a döntési változójukat. Előbb azt az esetet elemezzük Tasnádi (2010b) nyomán, amikor a vállalatok egyszerre választják meg a döntési változóikat és azok értékeit. Ebben az esetben elkerülhetjük a Bertrand–Edgeworth típusú játékoknál tapasztalható tiszta Nash-egyensúly hiányának problematikáját, és így nem ütközünk bele a kevert Nash-egyensúly meghatározásának nehézségébe. Modellünk eredményeként megmutatjuk, hogy a kapacitások egy jelentős tartományában a Cournot és a Forchheimer megoldások adódnak.

A másik esetben Tasnádi (2006) alapján feltesszük, hogy a vállalatok egyszerre megválasztják a döntési változóikat (ár vagy mennyiség), majd ezt követően egymás döntési változóinak ismeretében határozzák meg azok értékeit. Ha az első időszakot követően legalább két árjátékos található piacon, akkor a kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth játékhoz hasonlóan kevert Nash-egyensúllyal kell számolni. Ezért ebben az esetben, technikai okokból kifolyólag, azonos kapacitású vállalatokat kell feltételeznünk. Viszont ekkor kizárólag csak a Cournot megoldás realizálódik a piacon, azaz az első periódusban az összes vállalat mennyiségi játékos kíván lenni.

6.1. Döntési változók endogén választása

A döntési változók endogén megválasztásának kérdésével homogén termékű iparágak esetén Dastidar (1996) és Qin és Stuart (1997) foglalkoztak. Dastidar (1996) egy olyan kétidőszakos duopol játékot vizsgált, amelyben a vállalatok az első időszakban kiválasztják a döntési változóikat és a második időszakban döntenek döntési változók értékeiről. Két mennyiségi játékos esetén a Cournot duopóliumot játsszák a vállalatok, két árjátékos esetében a Bertrand duopóliumot és egy-egy mennyiségi, illetve árjátékos mellett az árjátékos az ármeghatározó, és a mennyiségi játékos az árelfogadó. Dastidar (1996) a Cournot megoldást mindig egyensúlyinak találta és a Bertrand megoldás csak bizonyos paraméterértékek esetén bizonyult egyensúlyinak. Viszont a kevert duopólium, amelyben egyik vállalat árjátékosként és a másik vállalat mennyiségi játékosként viselkedik sosem megoldása a két időszakos játéknak. Qin és Stuart (1997) egy hasonló döntési változót is választó oligopol játékot vizsgált, amelynek mind a Cournot játék, mind a Bertrand játék megoldása lehet, továbbá kevert oligopólium biztosan nem adódhat. Qin és Stuart (1997) modelljében, Dastidartól (1996) eltérően, a döntési változók és azok értékeinek kiválasztása egyidejűleg történik. Tasnádi (2006) és ez a fejezet Bertrand–Edgeworth típusú árjátékosokat tételez fel Dastidar (1996) és Qin és Stuart (1997) modelljeitől eltérően, amelyek Bertrand-típusú árjátékosokból indultak ki.

Az első olyan munka, amelyben a vállalatok maguk választhatták meg a döntési változóikat Singh és Vives (1984) differenciált termékű két időszakos duopol piaca. Singh és Vives (1984) megmutatta, hogy a két időszakos játék egyensúlyaként a Cournot játékot kapjuk, ha a duopolisták termékei egymás helyettesei, viszont a Bertrand játék adódik, ha a duopolisták termékei egymás kiegészítői. Klemperer és Meyer (1986) egy szimultán döntési változót és annak értékét választó differenciált termékű duopol piacot elemzett, amely több egyensúlyi megoldást is ad. További döntési változó választását is megengedő munkák közül kiemelendő Szidarovszky és Molnár (1992), Tanaka (2001a,

2001b) és Reisinger és Rössner (2009).

6.2. Döntési változót választó játékok

Legyen n vállalat a piacon. A vállalatoknak nincsenek fixköltségei és a kapacitáskorlátjukig állandóak a határköltségeik, azaz a 2.8. feltevéssel élünk. Továbbá feltesszük, hogy a kapacitáskorlátok monoton csökkenően rendezettek.

6.1. feltevés. $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n > 0$.

Jelölje $K = \sum_{i=1}^n k_i$ a vállalatok aggregált kapacitását. A keresleti görbére vonatkozóan teljesüljenek a 2.6. és a 2.7. feltevések, amelyek szerint a $D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ keresleti görbe szigorúan monoton csökkenő a $[0, b]$ intervallumon, azonosan nulla a $[b, \infty)$ intervallumon, folytonosak b -ben, kétszer folytonosan differenciálhatóak a $(0, b)$ intervallumon és $pD(p)$ szigorúan konkáv a $[0, b]$ intervallumon. A feltevéseiből adódóan az árjátékos nem fog b feletti árat megállapítani, továbbá $p^c = P(K)$.

Jelölje $D_i^r(p) = (D(p) - (K - k_i))^+$ az i vállalat reziduális keresleti görbét és $P_i^r(q)$ az inverz reziduális keresleti görbét. Könnyen ellenőrizhető, hogy $P_i^r(q) = P(q + (K - k_i))$. Hatékony adagolási szabályt feltételezve a $\pi_i^r(p) = pD_i^r(p)$ reziduális profitfüggvény megegyezik az i vállalat abban az esetben keletkező profitjával, amikor az i vállalat az egyedüli legmagasabb árat megállapító vállalat a Bertrand–Edgeworth-játékban és $p \geq p^c$. A következő feltevés biztosítani fogja számunkra, hogy az összes vállalat aktív legyen a piacon.

6.2. feltevés. Feltesszük, hogy $K - k_n < a$.

Legyen p_i^m az egyértelmű bevétel-maximalizáló ár a D_i^r reziduális keresleti görbén és a q_i^m az egyedüli bevétel-maximalizáló kibocsátás a P_i^r inverz reziduális keresleti görbén, azaz $p_i^m = \arg \max_{p \in [0, b]} pD_i^r(p)$ és $q_i^m = \arg \max_{q \in [0, a]} qP_i^r(q)$ bármely $i \in N$ -re. Nyilván $q_i^m = D_i^r(p_i^m)$. Továbbá ellenőrizhető, hogy

$p_1^m \geq p_2^m \geq \dots \geq p_n^m$ a 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések miatt. Legyen $\bar{\pi}_i = \pi_i^r(p_i^m)$. Ekkor p^c és p_i^m jól értelmezettek a 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések teljesülése miatt. Megjegyzendő, hogy a 6.2. feltevés még azt is biztosítja, hogy $p_i^m > 0$ és $\bar{\pi}_i > 0$.

Jelölje $N = \{1, \dots, n\}$ a vállalatok halmazát, $I \subset N$ az ármeghatározó vállalatok halmazát és $J = N \setminus I$ a mennyiség meghatározó vállalatok halmazát. Legyen $p_i \in [0, b]$ az $i \in I$ vállalat árdöntése és $q_j \in [0, k_j]$ a $j \in J$ vállalat termelési döntése. Az ár és mennyiségi döntéseket tartalmazza a $\mathbf{p} \in [0, b]^n$ és a $\mathbf{q} \in \times_{j=1}^n [0, k_j]$ vektor. Megjegyzendő, hogy $j \in J$ vállalat esetén a p_j értéke nem bír jelentéssel és hasonló igaz a q_i értékre az $i \in I$ vállalat esetén. Adott $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ vállalati döntések esetén a vállalatok összkínálata p áron

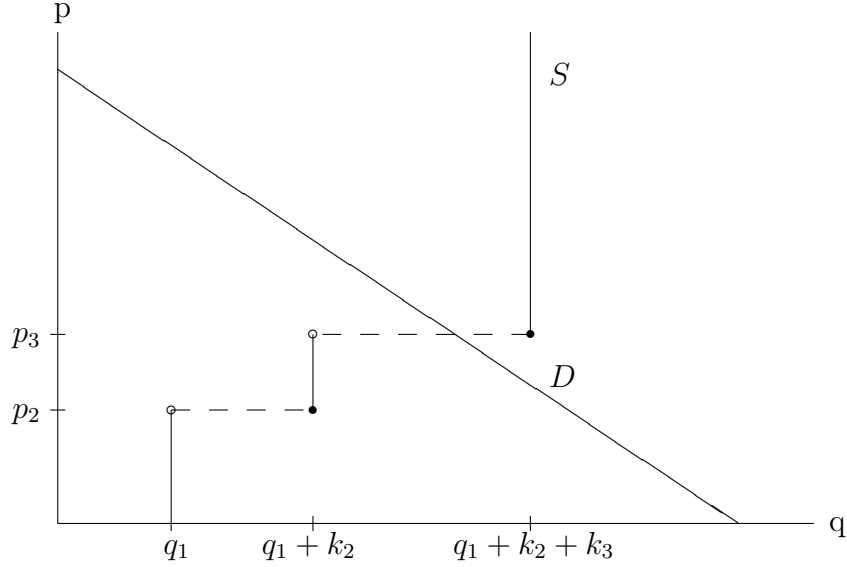
$$S_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(p) = \sum_{j \in J} q_j + \sum_{i \in I, p_i \leq p} k_i.$$

Még értelmezendő a keresletet a vállalatokhoz rendelő mechanizmus és a mennyiséget meghatározó vállalatok termékeinek eladási ára, amely az ármeghatározó és a mennyiséget meghatározó vállalatok döntéseinek függvénye. A mennyiséget meghatározó vállalatok eladási árát jelölje $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ és értéke egyezzen meg azzal a legkisebb árral, amelyen a kereslet nem haladja meg az összkínálatot. Formálisan $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) =$

$$\inf \{p \in [0, b] \mid D(p) \leq S_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(p)\} = \min \{p \in [0, b] \mid D(p) \leq S_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(p)\}.$$

Az inf helyett min írható, mivel $D(p) - S_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(p)$ monoton csökkenő és jobbról folytonos. Vegyük észre, hogy $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a csupa árjátékosokból álló esetben is értelmezett.

A $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ áron az aggregált kínálat meghaladhatja a piaci keresletet. Ez utóbbi esetet szemlélteti a 6.1 ábra, amelyben két ármeghatározó és egy mennyiség meghatározó vállalat versenyez egymással. A 6.1 ábrában látható helyzetben a mennyiséget meghatározó vállalat termékének ára p_3 . Áregyezőségeken esetén az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy előbb a mennyiség meghatározó vállalatok szolgálhatják ki a fogyasztókat és csak utána osz-



6.1. ábra. Mennyiségi játékos termékének ára

toznak az azonos árat megállapító ármeghatározó vállalatok kapacitásuk arányában a fogyasztókon. Ez utóbbi feltevésünk első része, hogy a mennyiségi játékosok prioritást élveznek a fogyasztók kiszolgálásában az árjátékosokkal szemben, megkívánja az árjátékosok mennyiségi alkalmazkodását és a mennyiségi játékosok áralkalmazkodását. A $j \in J$ mennyiségi játékos által kiszolgált kereslet

$$\Delta_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{cases} q_j, & \text{ha } p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 0, \\ \min \left\{ q_j, \frac{q_j}{\sum_{l \in J} q_l} D(0) \right\}, & \text{ha } p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0, \end{cases}$$

és ezért a profitja

$$\pi_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) q_j.$$

Az $i \in I$ árjátékos által kiszolgált kereslet

$$\Delta_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p_i > p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \\ \frac{k_i}{\sum_{p_l = p_i} k_l} \left(D(p_i) - \sum_{j \in J} q_j - \sum_{p_l < p_i} k_l \right), & \text{ha } p_i = p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \\ k_i, & \text{ha } p_i < p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \end{cases}$$

Ezért az $i \in I$ vállalat profitja

$$\pi_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_i \Delta_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

A továbbiakban O_I -vel jelöljük az I árjátékosokkal rendelkező kevert oligopóliumot.

6.3. Egzogen szereposztású játék

Ebben a szakaszban meghatározzuk az O_I kevert oligopólium egyensúlyát és megadjuk a tiszta Nash-egyensúly létezésének szükséges és elégséges feltételeit. A kevert oligopólium két szélsőséges esetének, $I = \emptyset$ és $I = N$, megoldása jól ismert, ugyanis az egyik esetben a Cournot oligopóliumról és a második esetben a Bertrand oligopóliumról van szó.

Lépésről-lépésre haladva ismerjük meg az O_I egyensúlyi viselkedését. Az alábbi lemma szerint egy tiszta Nash-egyensúlyban az ármeghatározó vállalatoknak azonos árat kell megállapítaniuk.

6.1. lemma. *A 2.6., a 2.7., a 2.8. a 6.1. és a 6.2. feltevések mellett, ha $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ egy tiszta Nash-egyensúlyi megoldás, akkor $p_i = p_j$ bármely $i, j \in I$ -re.*

Bizonyítás. Ha $|I| \leq 1$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Tehát csak az $|I| > 1$ esettel kell foglalkoznunk. Legyen a j vállalat valamelyik legkisebb árat választó vállalat, azaz $p_j \leq p_i$ bármely $i \in I$ -re. Tegyük fel, hogy $p_j < p_i$ teljesül egy $i \in I$ -beli vállalatra. Ha $\Delta_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 0$, akkor a j vállalat növelheti a profitját egy p_i -hez tetszőlegesen közeli, de az alatti árral. Ha $\Delta_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$, akkor $\pi_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$. De az i vállalat profitot realizálhat, például a $P\left(\frac{1}{2}(K - k_i + a)\right)$ ár választásával, mivel ekkor pozitív kereslettel szembesül a 6.2. feltevés miatt. Tehát az i vállalatnak mindenképpen érdemes változtatnia az árán, és ezért $p_j < p_i$ nem állhat fenn. $\square$

A következő lemma megmutatja, hogy a mennyiségi vállalatok termékének értékesítési ára bármely tiszta Nash-egyensúlyban megegyezik az előző lemma alapján az ármeghatározó vállalatok közös árával.

6.2. lemma. *Teljesüljenek a 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1., a 6.2. feltevések és legyen $|J| > 0$. Ha $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ egy tiszta Nash-egyensúly, akkor $p_i = p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ bármely $i \in I$ vállalatra.*

Bizonyítás. A lemma nyilván teljesül az $|I| = 0$ esetben, és így csak az $|I| > 0$ esettel kell foglalkoznunk. Tegyük fel, hogy $p_i \neq p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ valamely $i \in I$ -re. Emlékeztetőül bármely $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ árnál kisebb árat megállapító $i \in I$ vállalat a teljes kapacitását képes értékesíteni. Továbbá vegyük észre, hogy $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ addig nem változik, amíg a $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ alatti árak továbbra is $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ alatt maradnak. Ezért ha $p_i < p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, akkor bármelyik i vállalat növelheti a profitját magasabb, de továbbra is $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ alatti ár választásával, mivel a teljes kapacitását a megnövelt áron is értékesítheti. Ha $p_i > p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, akkor az i vállalat semmit sem értékesíthet, és ezért nem profitábilis. Azonban az i vállalat a többi vállalat döntéseitől függetlenül mindig nyereséges tud lenni egy kellően nagymértékű árcsökkentéssel a 6.2. feltevés miatt. $\square$

A következő lemma szerint, ha a piacon van legalább egy ármeghatározó vállalat, akkor egy tiszta Nash-egyensúlyban a mennyiség meghatározó vállalatok kapacitáskorláton termelnek.

6.3. lemma. *Ha a 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések, továbbá $|J| > 0$ és $|I| > 0$ teljesülnek, akkor $q_j = k_j$ bármely $j \in J$ vállalatra bármely tiszta Nash-egyensúlyban.*

Bizonyítás. A 6.2. lemma alapján tudjuk, hogy egy tiszta Nash-egyensúlyban $p_i = p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ bármely $i \in I$ vállalatra. Továbbá egyensúlyban az összes vállalat profitot realizál a 6.2. feltevés miatt, amiből következik $\Delta_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 0$. Ha $q_j < k_j$, akkor a $j \in J$ vállalat növelheti profitját a kibocsátásának növelésével, mivel ez nem eredményezné $p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ csökkenését, hiszen a j mennyiség meghatározó vállalat kibocsátásának növelése következtében csak az ármeghatározó vállalatok értékesítései csökkennének. Tehát ellentmondásra jutottunk, és így $q_j < k_j$ nem állhat fenn. $\square$

A lemmáink segítségével most már igazolni tudjuk az O_I kevert oligopólium tiszta Nash-egyensúlyára vonatkozó fő állításunkat, amely szerint legalább két árjátékos esetén csak a Bertrand megoldás lehet az egyedüli tiszta Nash-egyensúly jelölt.

6.16. állítás. *A 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1., a 6.2. feltevések és $|I| \geq 2$ teljesülése mellett, az egyetlen lehetséges tiszta Nash-egyensúlyban $q_j = k_j$ bármely $j \in J$ mennyiségi játékos és $p_i = p^c$ bármely $i \in I$ árjátékos esetén.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|J| = 0$. Ekkor a 6.1. lemma szerint egy lehetséges tiszta Nash-egyensúlyban az összes vállalat azonos árat állapít meg. De ha ez a közös árszint meghaladja p^c -t, akkor a vállalatok nem tudnak kapacitáskorláton értékesíteni, és ezért bármelyikük nyerhet a közös árszint egyoldalú aláárazása által.

Térjünk rá a $|J| > 0$ esetre. A 6.3. lemmában már megmutattuk, hogy tiszta egyensúlyban $q_j = k_j$ -nak kell teljesülnie minden $j \in J$ -re. Továbbá a 6.2. lemma alapján $p_i = p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ minden $i \in I$ -re. Nyilván $p^c \leq p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. De ha $p^c < p^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, akkor bármely ármeghatározó i vállalat k_i kapacitáskorlátjánál kevesebbet értékesíthet. Ezért a $p^c(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ árat egyoldalúan aláárazva, egy ármeghatározó vállalat ugrásszerűen növelheti értékesítéseit, és ezáltal növelheti profitját. $\square$

Ha $k_i \leq q_i^m$, akkor azt mondjuk, hogy $i \in N$ vállalatnak a *kapacitása szűkös*, különben pedig *elégséges kapacitásról* beszélünk. Vegyük észre, hogy szűkös kapacitású vállalatok mindig kapacitáskorláton igyekeznek termelni. Jelölje H a szűkös kapacitású vállalatok halmazát, azaz $H = \{i \in N \mid k_i \leq q_i^m\}$. Ellenőrizhető, hogy a $k_i \leq q_i^m$ feltétel ekvivalens a $p^c \geq p_i^m$ egyenlőtlenséggel. Ezért $H = \{i \in N \mid h \leq i \leq n\}$ valamely $h \in \{1, \dots, n+1\}$ vállalatra, mivel a p_i^m sorozat nem növekvő.

A következő állításban megmutatjuk, hogy a Bertrand megoldás az egyértelmű megoldása a kevert O_I oligopóliumnak, ha az összes vállalat kapacitása

szűkös.

6.17. állítás (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések mellett, ha $H = N$, akkor az O_I oligopólium egyértelmű tiszta Nash-egyensúlya a Bertrand megoldás, azaz az egyensúlyi ár megegyezik a piactisztító árral.*

Bizonyítás. Ellenőrizhető, hogy a Bertrand megoldás valóban tiszta Nash-egyensúlya az O_I oligopóliumnak bármely $I \subset N$ -re, mivel $k_i \leq q_i^m$ bármely $i \in N$ -re. A $I = \emptyset$ esetben pedig ellenőrizhető, hogy bármely i vállalat számára $q_i = k_i$ egy szigorúan domináns stratégia, amiből már az egyensúly egyértelműsége következik. Az $I = \{i\}$ esetre az egyértelműség a 6.3. lemmából és a p_i^m definíciójából következik. Végül ha $|I| \geq 2$, akkor a 6.16. állítás biztosítja az egyértelműséget. $\square$

6.1. következmény (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések, továbbá $|I| \geq 2$ teljesülése mellett, az O_I oligopóliumnak pontosan akkor van tiszta Nash-egyensúlya, ha az összes vállalatnak szűkös a kapacitása.*

Jelölje p_i^d azt az árat, amelyre $p_i^d \min\{k_i, D(p_i^d)\} = p_i^m D_i^r(p_i^m)$. Tegyük fel, hogy az i vállalat kapacitása elégséges (amiből adódóan $p_i^d < p_i^m$), akkor az i vállalat számára közömbös, hogy a reziduális keresletet szolgálja ki p_i^m áron vagy $\min\{k_i, D(p_i^d)\}$ mennyiséget értékesíti az alacsonyabb p_i^d áron.

6.4. lemma. *Tegyük fel, hogy az i és a j vállalatok kapacitása elégséges, továbbá a 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések teljesülnek. Ha $i < j$, akkor $p_i^d \geq p_j^d$. Továbbá ha $k_i > k_j$, akkor $p_i^d > p_j^d$.*

Bizonyítás. A lemma nyilván teljesül, ha $k_i = k_j$. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $k_i > k_j$. Jelölje $\tilde{p}(k)$ ár a $p(D(p) - K + k)$ kifejezést maximalizáló egyetlen árat, ahol K a piaci összkapacitást jelöli. Nyilván $\tilde{p}(k_i) = p_i^m$.

Továbbá ellenőrizhető, hogy $\tilde{p}(k)$ differenciálható bármely $k \in (0, K)$ helyen és $\tilde{p}(k)$ szigorúan növekedő. Mivel az i és a j vállalatok kapacitásai elégségesek, $\tilde{p}(k) > p^c$ bármely $k \in [k_j, k_i]$ -ra. Értelmezzük a $p^*(k)$ árat az alábbi egyenlettel:

$$p^*(k) \min\{k, D(p^*(k))\} = \tilde{p}(k) (D(\tilde{p}(k)) - K + k).$$

Vegyük észre, hogy $p^*(k_i) = p_i^d$. A lemma igazolásához már csak azt kell megmutatnunk, hogy $p^*(k)$ deriváltja pozitív a $[k_j, k_i]$ intervallumon. A $\min\{k, D(p^*(k))\}$ kifejezést véve a derivált pozitivitását külön-külön mutatjuk meg a két esetre a hozzátartozó intervallumokon. Először vizsgáljuk meg a $k \leq D(p^*(k))$ tartományt. Figyelembe véve, hogy $\tilde{p}(k)$ maximalizálja a $p(D(p) - K + k)$ kifejezést, egyszerű számításokkal adódik

$$\begin{aligned} \frac{dp^*}{dk}(k) &= \frac{\{\tilde{p}'(k) [D(\tilde{p}(k)) - K + k] + \tilde{p}(k) [D'(\tilde{p}(k)) \tilde{p}'(k) + 1]\} k - \tilde{p}(k) [D(\tilde{p}(k)) - K + k]}{k^2} \\ &= \frac{\tilde{p}'(k) \{[D(\tilde{p}(k)) - K + k] + \tilde{p}(k) D'(\tilde{p}(k))\} k + \tilde{p}(k) k - \tilde{p}(k) [D(\tilde{p}(k)) - K + k]}{k^2} \\ &= \frac{\tilde{p}(k) [K - D(\tilde{p}(k))]}{k^2} > 0, \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség azért teljesül, mert $\tilde{p}(k) > p^c$ miatt $K > D(\tilde{p}(k))$.

Rátérve a $k > D(p^*(k))$ esetre, az implicit függvény tétele alapján

$$F(p^*, k) = p^* D(p^*) - \tilde{p}(k) (D(\tilde{p}(k)) - K + k),$$

amiből

$$\begin{aligned} \frac{dp^*}{dk}(k) &= - \frac{-\tilde{p}'(k) [D(\tilde{p}(k)) - K + k] - \tilde{p}(k) [D'(\tilde{p}(k)) \tilde{p}'(k) + 1]}{p^* D'(p^*) + D(p^*)} \\ &= \frac{\tilde{p}'(k) \{[D(\tilde{p}(k)) - K + k] + D'(\tilde{p}(k)) \tilde{p}(k)\} + \tilde{p}(k)}{p^* D'(p^*) + D(p^*)} \\ &= \frac{\tilde{p}(k)}{p^* D'(p^*) + D(p^*)} > 0, \end{aligned}$$

adódik, mivel $\tilde{p}(k)$ maximalizálja a $p(D(p) - K + k)$ kifejezést, $pD(p)$ szigorúan konkáv és $p^* < \tilde{p}(k)$. $\square$

A következő részben megvizsgáljuk azt az esetet, amikor a piacon csak egy ármeghatározó vállalat van jelen. A 6.17. állítás miatt a továbbiakban feltesszük, hogy van legalább egy elégséges kapacitású vállalat.

6.18. állítás (Tasnádi, 2010b). *Legyen $I = \{i\} \subset N \setminus H = \{1, \dots, h-1\}$. Ekkor a 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések mellett pontosan akkor létezik tiszta Nash-egyensúly, ha $p_1^d \leq p_i^m$. Az egyensúly az alábbi kifejezésekkel adott:*

$$\forall j \in J : q_j = k_j \text{ és } p_i = p_i^m = \arg \max_{p \in [0, b]} p D_i^r(p). \quad (6.1)$$

Bizonyítás. Először is belátjuk, hogy ha $p_1^d \leq p_i^m$, akkor a (6.1) egy egyensúlyi stratégia profil. A mennyiség meghatározó vállalatok nyilván nem tudnak kapacitáskorláton túl termelni. A kibocsátás egyoldalú csökkentése legfeljebb a $k_i - q_i^m$ szintig pedig nem változtat a mennyiség meghatározó vállalatok termékének értékesítési árán, csak az ármeghatározó vállalatok értékesítéseit növeli. Ha a $j \in J$ vállalat a $k_i - q_i^m$ szint alá csökkenti a termelését, akkor a mennyiségi játékosok eladási ára $P_j^r(q_j + \sum_{l \neq j} k_l)$ -re növekszik. Ezért a termelés ilyen mértékű egyoldalú csökkentése a $j \in J$ és $j > i$ vállalat által szükségszerűen csökkenti a profit szintjét a 2.6. és a 2.7. feltevések alapján, továbbá $p_j^m \leq p_i^m$ miatt. A $j < i$ esetben a j mennyiség meghatározó vállalat akkor és csak akkor növelheti a profitját, ha $p_j^d > p_i^m$, mert ekkor a kibocsátás q_j^m értékre történő csökkentése $p_j^d k_j$ profitot eredményezne, ami nagyobb mint $p_i^m k_j$. Figyelembe véve a p_j^d sorozat nem növekvő voltát, igazoltuk, hogy a mennyiség megállapító vállalatok egyoldalúan nem térnek el a $q_j = k_j$ kibocsátástól. Az i ármeghatározó vállalat viszont nyilván nem fog a p_i^m ártól egyoldalúan eltérni. Tehát a (6.1) egyenlet egy tiszta Nash-egyensúlyt határoz meg, amely a 6.2. és a 6.3. lemmák alapján egyértelmű.

Másodjára bebizonyítjuk, hogy $p_1^d > p_i^m$ esetén nincsen tiszta Nash-egyensúly. A 6.2. és a 6.3. lemmából már tudjuk, hogy egy tiszta Nash-egyensúlyban szükségszerűen $q_j = k_j$ minden $j \in J$ -re és $p_i = p^c(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Ezért az i ármeghatározó vállalat a p_i^m árat állapítja meg és q_i^m mennyiséget értékesít. Ez azt jelenti, hogy $p_i = p^c(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ árnak tiszta Nash-egyensúlyban meg kell egyeznie p_i^m -mel. De ekkor az 1 vállalat egyoldalúan csökkenteni fogja a kibocsátását, mert

$$p_1^m q_1^m = p_1^d k_1 > p_i^m k_1,$$

és megállapíthatjuk, hogy tiszta Nash-egyensúly biztosan nem létezhet. $\square$

Érdemes hangsúlyozni, hogy a 6.18. állítás szerint a kevert O_I oligopólium egy ármeghatározó elégséges kapacitású i vállalattal a $p_1^d \leq p_i^m$ feltétel teljesülése mellett a domináns vállalati árvezérlés modelljének egy játékelméleti megalapozását is adja, mivel az árjátékos az árát a reziduális keresleti görbe menti profitmaximalizációs feladat megoldásaként határozza meg, és a többi vállalat árelfogadóként viselkedik. Megjegyzendő, hogy nem csak a legnagyobb kapacitású vállalat léphet föl domináns vállalatként a piacon, amennyiben a 6.18. állítás feltételei teljesülnek.

Még hátra maradt a Cournot játéknak, amelyben mindegyik vállalat mennyiség meghatározó, a vizsgálata. A tiszta Nash-egyensúly létezését behatóan vizsgálta a szakirodalom (lásd például Szidarovszky és Yakowitz, 1977; Novshek, 1985a; Amir, 1996). A feltevéseinket illetően az ismert eredmények közvetlenül nem alkalmazhatóak. Nevezetesen a $pD(p)$ szigorú konkavítása nem implikálja a $qP(q)$ függvény szigorú konkavitását. Ennek ellenőrzéséhez tekintsük a $D(p) = 1 - \frac{4}{3}p^{3/4}$ keresleti függvényt, amely kielégíti a 2.6. és a 2.7. feltevéseket, és amelyre $qP(q)$ konvex a $(6/7, 1)$ intervallumon. Azonban a tiszta Nash-egyensúly létezése igazolható Debreu (1952) egzisztencia tételének segítségével.

6.19. állítás (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések mellett, ha $|I| = 0$, akkor létezik a Cournot oligopóliumnak tiszta Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás. Az i vállalat $[0, k_i]$ stratégiahalmaza kompakt és a profitfüggvénye $q_i P\left(\sum_{j \in N} q_j\right)$ folytonos. Debreu (1952) tételének alkalmazásához igazolandó, hogy a vállalatok profitfüggvényei kvázikonkávak a saját változóikban. Megmutatjuk, hogy $\Pi_i(q_i, Q_{-i}) = q_i P(q_i + Q_{-i})$ egycsúcsú q_i -ben bármely rögzített $Q_{-i} \in [0, K - k_i]$ mellett, amiből már következik a kvázikonkavitás.

Rögzítsünk egy tetszőleges $[0, K - k_i]$ intervallumbeli Q_{-i} értéket. Értelmezzük az $F : [0, K - Q_{-i}] \rightarrow [0, c]$ függvényt az $F(q) = P(q + Q_{-i})$ kifejezés-

sel, ahol $c = P(Q_{-i})$. Jelölje G az F függvény inverzét. Ellenőrizhető, hogy $G(p) = D(p) - Q_{-i}$. Legyen

$$\Pi_i^*(p) = p(D(p) - Q_{-i})^+.$$

Nyilván $\Pi_i^*(0) = 0$, $\Pi_i^*(p) = 0$ bármely $p \geq c$ árra, és Π_i^* szigorúan konkáv a $(0, c)$ intervallumon. Tehát létezik egyértelmű maximumhely, amelyet $p^* \in (0, c)$ jelöl. A p^* ár az alábbi egyenlettel határozható meg:

$$\frac{d}{dp} \Pi_i^*(p) = G(p) + pG'(p) = 0. \quad (6.2)$$

A $\max_{q_i} \Pi_i(q_i, Q_{-i})$ feltételhez tartozó elsőrendű feltétel:

$$\frac{d}{dq} \Pi_i(q, Q_{-i}) = F(q) + qF'(q) = 0. \quad (6.3)$$

Ellenőrizhető, hogy a $q^* = G(p^*)$ érték kielégíti a (6.3) egyenletet:

$$\frac{d}{dq} \Pi_i(q^*, Q_{-i}) = F(q^*) + q^*F'(q^*) = p^* + G(p^*) \frac{1}{G'(p^*)} = 0,$$

ahol az utóbbi egyenlőség azért teljesül, mert p^* megoldása a (6.2) egyenletnek és $G'(p^*) \neq 0$. Továbbá q^* egyértelmű megoldása a (6.3) egyenletnek, mert különben a (6.2) egyenletnek nem lesz egyértelmű megoldása. Végül q^* maximumhely, mert $\Pi_i(q^*, Q_{-i}) > 0$ és $\Pi_i(0, Q_{-i}) = \Pi_i(a - Q_{-i}, Q_{-i}) = 0$. $\square$

A következő tétel összegezi az O_I kevert oligopólium tiszta Nash-egyensúlyára vonatkozó eredményeinket.

6.1. tétel (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések teljesülése esetén az alábbiak érvényesek az O_I kevert oligopóliumra.*

1. *Ha $q_i^m \geq k_i$ bármely $i \in N$ vállalatra, akkor a Bertrand-megoldás az egyértelmű tiszta Nash-egyensúly.*
2. *Ha $I = \{i\}$, $i < h$ és $p_1^d \leq p_i^m$, akkor az egyensúlyi megoldás a domináns vállalati árvezérlés modelljét adja.*
3. *Ha $|I| = 0$, akkor a Cournot-megoldás az egyedüli tiszta Nash-egyensúly.*
4. *Minden egyéb esetben nem létezik tiszta Nash-egyensúly.*

6.4. Kevert Nash-egyensúly

Kevert Nash-egyensúlyra csak tiszta Nash-egyensúly hiányában lesz szükségünk, ezért ebben az alfejezetben csak az elégséges kapacitások esetével foglalkozunk. Mint már korábban is említettük a Bertrand–Edgeworth oligopólium kevert Nash-egyensúlyának meghatározása komoly kihívás és a számítások csak az ebben a fejezetben eddig alkalmazott erősebb feltevések mellett végezhetőek el. A költségfüggvényeknél a szimmetrikus kapacitások esetére korlátozzuk magunkat (a 2.11. feltevés). A keresleti függvény tekintetében a konkáv bevételi függvény helyett az ennél erősebb konkáv keresleti függvény feltételével fogunk élni (2.10. feltevés).

A szimmetrikus kapacitáskorlátos Bertrand–Edgeworth oligopólium kevert szimmetrikus Nash-egyensúlyát Vives (1986) határozta meg. Mivel az O_I kevert oligopóliumban a döntési változót tekintve két különböző típusú játékosunk van, ezért szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyra nem szorítkozhatunk, de helyette olyan kváziszimmetrikus egyensúlyt keresünk, amelyben külön-külön az ármeghatározó és mennyiség meghatározó vállalatok azonos stratégiát választanak.

6.1. definíció. A $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ stratégiaprofil *kváziszimmetrikus Nash-egyensúlya* az O_I kevert oligopóliumnak, ha $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ Nash-egyensúlya az O_I játéknak, $p_i = p_j$ bármely $i, j \in I$ -re és $q_i = q_j$ bármely $i, j \in J$ -re.

A kváziszimmetrikus Nash-egyensúly fogalmát értelemszerűen ki lehet terjeszteni kevert stratégiákra is.

Az első kevert kváziszimmetrikus Nash-egyensúlyra vonatkozó állításunk megadja a elégséges kapacitások mellett az egyértelmű kevert kváziszimmetrikus Nash-egyensúlyt.

6.20. állítás (Tasnádi, 2006). A 2.10., a 2.11., a 6.1. feltevések, elégséges kapacitások ($q^m < k$) és legalább két ármeghatározó vállalat ($|I| \geq 2$) mellett, az O_I kevert oligopóliumnak létezik egyértelmű kevert kváziszimmetrikus

Nash egyensúlya, amelyben az ármeghatározó vállalatok árainak atommentes egyensúlyi eloszlásfüggvénye

$$F_{|I|}(p) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \in [0, \underline{p}), \\ \left(\frac{k - \bar{p}/p}{nk - D(p)} \right)^{\frac{1}{|I|-1}}, & \text{ha } p \in [\underline{p}, \bar{p}], \\ 1, & \text{ha } p \in (\bar{p}, b], \end{cases} \quad (6.4)$$

és az összes mennyiség meghatározó vállalat egy valószínűséggel k mennyiséget termel. Továbbá az így adott egyensúlyban a mennyiség meghatározó vállalatok értékesítési ára az

$$G_{|I|}(p) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \in [0, \underline{p}), \\ \left(\frac{k - \bar{p}/p}{nk - D(p)} \right)^{\frac{|I|}{|I|-1}}, & \text{ha } p \in [\underline{p}, \bar{p}], \\ 1, & \text{ha } p \in (\bar{p}, b]. \end{cases} \quad (6.5)$$

eloszlásfüggvény szerint alakul.

Technikai jellege és terjedelme miatt a 6.20. állítás bizonyítását nem közöljük. A bizonyítást Tasnádi (2006) függeléke tartalmazza.

A kevert oligopólium, akkor viselkedik intuíciónkkal összhangban, ha rögzített számú n vállalat esetében az ármeghatározó vállalatok számának növekedésével a piacon alacsonyabb árakat tapasztalhatunk. Mivel elégséges kapacitások esetén kevert egyensúly valósul meg a piacon, ezért csak az várható, hogy a több árjátékos melletti kváziszimmetrikus egyensúlyi áreloszlás sztochasztikusan dominálja a kevesebb árjátékos melletti kváziszimmetrikus egyensúlyi áreloszlást. A következő tétel megmutatja, hogy a kevert oligopólium kváziszimmetrikus egyensúlya valóban megfelel a megfogalmazott elvárásunknak.

6.2. tétel (Tasnádi, 2006). *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 2.10., a 2.11., a 6.1. feltevések, a vállalatok kapacitása elégséges ($q^m < k$) és a piacon egy kevert kváziszimmetrikus egyensúlyi megoldás valósul meg. Ekkor az elsőrendű sztochasztikus dominanciát tekintve, az O_I oligopólium árai dominálják az $O_{I'}$ oligopóliumbeli árakat, ha $|I| > |I'|$.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $I' = \{1, \dots, i\}$ és $I = \{1, \dots, i, i+1\}$, mivel a vállalatok kváziszimmetrikus kevert egyensúlyt játszanak. A bizonyításunkat három alesetre bontjuk.

Először tekintsük az $I' = \emptyset$ és $I = \{1\}$ esetet. Ebben az esetben a Cournot oligopólium egyensúlyi árait kell összehasonlítanunk a domináns vállalati árvezérlés áraival (6.18. állítás). Mindkét játéknak van tiszta Nash-egyensúlya. A 2.11. feltevés és $q^m < k$ alapján a domináns vállalati ár alacsonyabb a Cournot egyensúlyi árnál, mivel

$$D(p) - (n-1)k < D(p) - (n-1)q^c,$$

ahol q^c az $O_{I'}$ Cournot oligopólium egyértelmű egyensúlyi kibocsátást jelöli.¹

Ezek után térjünk rá az $i = 1$ esetre. Ekkor a domináns vállalati árvezérlés modelljének egyensúlyi árát kell összehasonlítanunk a két ármeghatározó vállalattal rendelkező kevert oligopólium kváziszimmetrikus kevert egyensúlyi árával. A domináns vállalat egy valószínűséggel a $\bar{p}$ árat állapítja meg, míg a két árjátékos által a kevert kváziszimmetrikus egyensúlyban megállapított legmagasabb ár $\bar{p}$. Továbbá vegyük észre, hogy a két ármeghatározó vállalat egy valószínűséggel $\bar{p}$ alatti árat állapít meg.

Végül legyen $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Tekintsünk előbb egy $j \in \{1, \dots, i\}$ ármeghatározó vállalatot. Mivel

$$0 < \sqrt[i-1]{\left(\frac{k - \bar{\pi}/p}{nk - D(p)}\right)} < \sqrt[i]{\left(\frac{k - \bar{\pi}/p}{nk - D(p)}\right)} < 1$$

bármely $p \in (\underline{p}, \bar{p})$ árra a j vállalat nagyobb valószínűségekkel állapít meg alacsonyabb árakat az O_I kevert oligopóliumban, mint az $O_{I'}$ -ben. Most vegyünk egy $j \in \{i+2, \dots, n\}$ mennyiség meghatározó vállalatot (ez az eset nem áll elő, ha $i = n-1$). A (6.5) egyenletet alkalmazva

$$\left(\frac{k - \bar{\pi}/p}{nk - D(p)}\right)^{\frac{i}{i-1}} < \left(\frac{k - \bar{\pi}/p}{nk - D(p)}\right)^{\frac{i+1}{i}}$$

adódik bármely $p \in (\underline{p}, \bar{p})$ árprofilra, mert $1 < \frac{i+1}{i} < \frac{i}{i-1}$. Még hátra maradt annak az $i+1$ vállalatnak az esete, amely $O_{I'}$ -ben mennyiség meghatározó és az

¹Ellenőrizhető, hogy $q^m < k$ -ből következik $q^c < k$.

O_I -ben ármeghatározó. Az i ármeghatározó vállalatra érvényes (6.5) kifejezést összehasonlítva az $i + 1$ vállalatra $i + 1$ ármeghatározó vállalat piaci jelenléte mellett érvényes (6.4) kifejezéssel

$$\left(\frac{k - \bar{\pi}/p}{nk - D(p)} \right)^{\frac{i}{i-1}} < \left(\frac{k - \bar{\pi}/p}{nk - D(p)} \right)^{\frac{1}{i}}$$

adódik bármely $p \in (\underline{p}, \bar{p})$ árra. $\square$

6.5. Döntési változók endogén meghatározása

Az előző alfejezetben megvizsgáltuk az adott döntési változójú kevert oligopóliumok egyensúlyi viselkedését. Ezt követően azt a kérdést vizsgáljuk, hogy ha a vállalatok maguk választhatják meg a döntési változójukat, akkor inkább mennyiség- vagy ármeghatározást választanak. Vajon a Cournot oligopólium, a Bertrand–Edgeworth oligopólium vagy egy köztes oligopólium alakul ki a piacon? A kérdés eldöntéséhez egy olyan bővített játékot elemzünk, amelyben a vállalatok a döntési változójukat is maguk választhatják meg.

Jelölje C és BE rendre azt, hogy egy vállalat a mennyiségét vagy az árát kívánja meghatározni. Legyen $V = \{C, BE\}$ a döntési változók halmaza. Ekkor az $i \in N$ vállalat döntését, illetve akciósorozatát $s = (v, x) \in V \times \mathbb{R}_+$ jelöli, ahol v megadja a kiválasztott döntési változót és az x annak értékét.

6.5.1. Szimultán szerep és érték választás

Ebben a szakaszban előbb azt az esetet vizsgáljuk, amikor a vállalatok a döntési változóik megválasztásával egyidejűleg meghatározzák az általuk választott döntési változók értékeit. Ezt a játékot *szimultán szerep és érték választási játéknak* hívjuk.

6.3. tétel (Tasnádi, 2010b). *A 2.6., a 2.7., a 2.8., a 6.1. és a 6.2. feltevések teljesülése esetén a szimultán szerep és érték választási játéknak az alábbi tiszta Nash-egyensúlya van:*

1. Ha $q_i^m \geq k_i$ minden $i \in N$ vállalatra, akkor sok tiszta Nash-egyensúly létezik, amelyek az egyensúlyi kimenetelüket tekintve a Bertrand-megoldással ekvivalensek. Részletesebben kifejtve mindegyik vállalat számára közömbös, hogy ár- vagy mennyiség meghatározóként viselkedik, továbbá a vállalatok kapacitáskorláton termelnek és a piaci ár megegyezik a piactisztító árral.
2. Ha $q_i^m < k_i$ valamely $i \in N$ vállalatra, akkor két tiszta Nash egyensúly lehetséges. Az egyik a Cournot megoldást eredményezi, azaz a vállalatok egyensúlyi stratégiái (C, y_i) minden $i \in N$ vállalatra, ahol $\mathbf{y}$ a Cournot megoldást jelöli. A másik a domináns vállalati árvezérlés modelljét adja, amelyben egy az $i < h$ és $p_1^d \leq p_i^m$ feltételeknek megfelelő árjátékos a (BE, p_i^m) tiszta stratégiáját választja, míg a többi vállalat (C, k_j) -t.

Bizonyítás. Mivel a 6.1. tétel 1. pontjából következik a tételünk 1. pontja, ezért csak a 2. pont szorul bizonyításra.

Először megmutatjuk, hogy az összes $i \in N$ vállalat (C, y_i) akciója Nash-egyensúlyt alkot. Tegyük fel, hogy i az árat választja a mennyiséggel szemben. Legyen $p^* = P(\sum_{i=1}^n y_i)$. Nyilvánvalóan a (BE, p^*) akcióra történő áttérés nem változtat az i vállalat profitján és a piaci kimenetelen. A $p^c(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ár az i vállalat p_i árával együtt mozog amíg $p_i \geq p'$, ahol $p' = P(k_i + \sum_{j \neq i} y_j)$. Azonban az i vállalat sosem fog p' alatti árat választani. Ebből adódóan az i vállalat a $p(D(p) - \sum_{j=1, j \neq i}^n y_j)$ függvényt a $[p', b]$ intervallum felett maximalizálja. A Cournot egyensúly definícióját tekintve, az i vállalat profitmaximalizáló ára p^* . Ezért nem profitál a döntési változójának egyoldalú megváltoztatásából és megállapítható, hogy (C, y_i) bármely $i \in N$ -re egy Nash-egyensúlyi profil. Azonban nem egy szigorú Nash-egyensúllyal állunk szemben.

Ezek után megmutatjuk, hogy

$$((C, k_1), \dots, (C, k_{i-1}), (BE, p_i^m), (C, k_{i+1}), \dots, (C, k_n))$$

a játék egy másik egyensúlya. A 6.1. tétel 2. pontját tekintve még igazolandó, hogy egyik vállalat sem képes profitját a döntési változójának egyoldalú meg-

változtatásával növelni. Ha az i vállalat mennyiség meghatározó kíván lenni, akkor q_i^m mennyiséget termel. Ezért az i profitja semmit sem változik és a piaci egyensúlyi kimenetel sem. Ha bármelyik $j \in N \setminus \{i\}$ vállalat ármeghatározóvá válik, akkor valamivel p_i^m alatti árat fog megállapítani, mivel p_i^m árat választva az értékesítései ugrásszerűen csökkennének és egy p_i^m feletti ár megállapítása profitsökkenést eredményezne. Ez utóbbi megállapítás bármelyik $j \in N \setminus (H \cup \{i\})$ vállalatra igaz, mert $p_j^d \leq p_i^m$, és bármely $j \in H$ vállalatra $p_j^m \leq p^c < p_i^m$ miatt. Megmutattuk, hogy egyik $j \in N \setminus \{i\}$ vállalatnak sem áll egyoldalúan érdekében a (C, k_j) stratégiáján változtatni.

Végül a 6.1. tétel 4. pontja miatt további Nash-egyensúly nem létezhet. $\square$

Megjegyzendő, hogy a $p_1^d > p_{h-1}^m$ esetben az egyedüli árvezérlést megvalósító egyensúly, megegyezik a hagyományos domináns vállalati árvezérlés modelljével, amelyben a legnagyobb vállalat kerül a piacon ármeghatározó szerepbe.

A tételben szereplő két esetet érdemes részletesebben megvilágítani. Az első esetben, ha mindegyik vállalat szűkös kapacitású, azaz mindegyik vállalat reziduális keresleti függvény menti — kapacitáskorlátot figyelmen kívül hagyó — profitmaximalizáló kibocsátása meghaladja a vállalat kapacitáskorlátját, akkor az összes vállalat kapacitáskorlátot fog termelni. Tehát a piacon a Bertrand-megoldás adódik abban az értelemben, hogy mindenki piactisztító áron értékesít. A másik esetben, amikor létezik a piacon elégséges kapacitású vállalat, akkor a Cournot oligopólium vagy a Forchheimer-féle domináns vállalati árvezérlés modellje alakul ki.

A szimultán szerep és értékválasztás előnye, hogy nem kellett kevert Nash-egyensúlyi megoldással foglalkozni, amely komoly technikai akadályokba ütközik. Emlékeztetőül a több árjátékos melletti kevert oligopólium kevert Nash-egyensúlyi megoldását csak szigorúbb feltételek mellett tudtuk meghatározni, nevezetesen szimmetrikus kapacitásokra és kváziszimmetrikus Nash-egyensúlyi megoldásokra kellett korlátozni magunkat.

6.5.2. Szekvenciális szerep és érték választás

Ebben a szakaszban azt az esetet vizsgáljuk, amikor a vállalatok a döntési változók szimultán megválasztása után határozzák meg döntési változóik értékeit. Ezt a játékot *szekvenciális szerep és érték választási játéknak* hívjuk.

6.4. tétel (Tasnádi, 2006). *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 2.10., a 2.11., a 6.1. feltevések, a vállalatok kapacitása elégséges ($q^m < k$) és a piacon egy kevert kváziszimmetrikus Nash-egyensúly valósul meg. Ekkor a szekvenciális szerep és érték választási játéknak az alábbi tiszta Nash-egyensúlya van:*

1. *Ha $q^m \geq k$ minden $i \in N$ vállalatra, akkor sok tiszta Nash-egyensúly létezik, amelyek egyensúlyi kimenetelüket tekintve a Bertrand-megoldással ekvivalensek. Nevezetesen mindegyik vállalat számára közömbös, hogy ár- vagy mennyiség meghatározóként viselkedik, továbbá a vállalatok kapacitáskorláton termelnek és a piaci ár megegyezik a piactisztító árral.*
2. *Ha $q^m < k$, akkor az egyetlen tiszta részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyban bármelyik $i \in N$ vállalat a (C, q^c) akciósorozatot választja, ahol q^c a Cournot-részjáték egyértelmű egyensúlyi kibocsátása.*

Bizonyítás. A 6.1. tétel 1. pontjából nyilvánvalóan következik a tételünk 1. pontja. Ezért csak a 2. pont szorul bizonyításra. Ehhez megmutatjuk, hogy a mennyiség meghatározó szerep választása az első időszak szigorúan domináns stratégiája. Először is vegyük észre, hogy az ármeghatározó vállalatok profitja bármelyik O_I kevert oligopóliumban $\bar{\pi} = \underline{p}k$.

Induljunk ki először abból az esetből, hogy az első időszakban több ármeghatározó vállalat lenne a piacon. Ekkor, ha egy árjátékos mennyiségi játékosává válik, akkor a teljes kapacitását egy valószínűséggel $\underline{p}$ -nél magasabb áron értékesítheti. Tehát az első időszaki C akció választása előnyösebb a BE akció választásánál.

Ha pedig csak egy árjátékos van jelen a piacon, akkor az ármeghatározó vállalat profitja $\bar{\pi} = \pi^r(\bar{p}) = \underline{p}k$. Ezzel szemben ha a mennyiség meghatározó

szerepet választaná, akkor a $D(p) - (n - 1)q^c$ kereslettel szembesülne, ami kedvezőbb a Forchheimer-féle domináns vállalat reziduális keresleti függvényénél $q^c < k$ miatt.² Tehát ebben az esetben is dominálja az első időszaki C akció a BE akciót. $\square$

Összehasonlítva a 6.4. és a 6.3. tételek 2. pontjait megállapítható, hogy a piacon az előbbi esetben egyértelműen a Cournot-oligopólium valósul meg, míg az utóbbi esetben ez csak a két lehetséges kimenetel egyike.

²Lásd a 6.2. tétel bizonyításának második bekezdését is.

7. fejezet

Bérijáték az inputpiacon

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a Bertrand–Edgeworth típusú árverseny lehetőségét a munkaerőpiacon, és egyben a munkanélküliségre egyfajta részleges magyarázatot is adunk. Egy parciális mikroökonómia modellel a munkanélküliséghez bizonyos mértékben szerepet játszó tényezőt azonosítunk, amelynek figyelembe vételével elképzelhető lenne a munkanélküliség kisebb mértékű csökkentése.

A szakirodalomban számos munkanélküliséget magyarázó mikromodell ismeretes, lásd például Weiss (1980), Shapiro és Stiglitz (1984), Ma és Weiss (1993), Rebitzer és Taylor (1995) munkáit, amelyek közös vonása, hogy figyelmen kívül hagyják a munkaerőért versenyző bérmegállapító vállalatok közötti stratégiai interakciót. Újabb eredményeket tekintve Hamilton, Thisse, és Zenou (2000), Thisse és Zenou (2000) és Wauthy és Zenou (2002) megmutatta, hogy a munkanélküliség egy oligopszonisztikus bérijáték egyensúlyaként is adódhat. Hamilton, Thisse, és Zenou (2000) és Thisse és Zenou (2000) elemzéseikben Salop (1979) körkörös városmodelljét vették alapul. Wauthy és Zenou (2002) egy olyan duopszonisztikus bérijátékot vizsgáltak, amelyben a munkaerő tanulási költsége differenciált, és a csúcstechnológiát alkalmazó vállalat képzetebb munkaerőt keres. Ebben a fejezetben egy olyan bérijátékot vizsgálunk, amelyben a vállalatok a munkaerőpiacon Bertrand–Edgeworth jellegű bérversenyben vesznek részt.

Annak érdekében, hogy a modellünk a lehető legegyszerűbb legyen csak két, rezervációs béreikben különböző, munkaerő típust engedünk meg. Ilyen értelemben a munkaerő vertikálisan és nem horizontálisan differenciált. Továbbá feltesszük, hogy munkások száma mindkét munkaerőtípusból véges, a két vállalat termelékenysége eltérő és a vállalatok indifferensek a munkások típusát illetően (azaz a munkások termelékenysége az egyes vállalatoknál azonos). A munkahelyek száma a vállalatoknál adott. Megmutatjuk, hogy a felvázolt piacon bizonyos körülmények között munkanélküliség áll elő.

Érdemes megjegyezni, hogy a valóságban is adódnak olyan helyzetek, amelyekben egy adott helyen a különböző típusú munkások lényegében egyformán termelékenyek, de a munkások rezervációs bére eltérő. Egy lehetséges példa a két típusra a férfi és a női munkaerő. Feltéve, hogy azonosan képzettek, számos munkahelyen azonos termelékenységűeknek tekinthetők. Ennek ellenére a nők rezervációs bére alacsonyabb lehet a lehetséges diszkrimináció vagy az eltérő használdozati költség miatt. Hasonló helyzet állhat elő helyi és letelepedett munkások között, például etnikai kisebbséghez tartozó munkások rezervációs bére az esetleges negatív diszkrimináció miatt alacsonyabb lehet, azonos képzettségük ellenére.

Modellünk és Harris és Todaro (1970) modellje között is felfedezhető néhány közös vonás. Többek között Harris és Todaro (1970) példája egy harmadik példaként szolgálhat a feltételeinket kielégítő két munkástípusra, amelyek egyike legyen a városi és a másik a vidéki munkás. Az alacsonyabb termelékenységű vállalat vidéken üzemel, míg a magasabb termelékenységű vállalat a városban. Mind a vidéki, mind a városi munkások egyformán megfelelőek a két vállalat számára, de a városi munkások rezervációs bére magasabb a nagyobb megélhetési költségek vagy magasabb munkanélküli segélyek miatt. A modelljünkben az egyensúlyi munkanélküliség a vidékről a városba beáramló munkásokkal magyarázható.¹ Modellünk és Harris és Todaro (1970) modellje

¹A rezervációs bérek közötti különbségek hosszabb távon való fennállásához, gondoljunk egy olyan dinamikus környezetre, amelyben a vidéki munkások ingázóként dolgoznak a vá-

közötti alapvető különbség, hogy felruházzuk a vállalatokat a bérmeghatározás stratégiai erejével.

A bérjáték tiszta Nash-egyensúlya megadja számunkra, hogy az egyes munkástípusok közül hányan kerülnek az egyes vállalatokhoz. Ebből a szempontból a modellünk egy hozzárendelési modell, amely a következő érdekes tulajdonsággal bír: a piacon akkor is fennállhat a munkanélküliség, ha a munkások termelékenységéje azonos és a munkahelyek száma megegyezik a munkások számával. Munkaerőpiaci hozzárendelési modelleket tekintve lásd például Sattinger (1993) áttekintő munkáját.

Az első alfejezetben megadjuk a modell formális leírását, a második alfejezet elemzi a kapacitáskorlátos duopszonisztikus bérjátékot és meghatározza azokat az eseteket, amikor egyensúlyi munkanélküliség merül fel. A harmadik alfejezet a bérjáték kevert Nash-egyensúlyát adja meg. A negyedik alfejezet néhány összegző megjegyzést tartalmaz. A kevert egyensúly meghatározására irányuló technikai részletek megtalálhatóak a függelékben.

7.1. A modellkeret

Egy egyszerű munkaerőpiacon az α -val és β -val jelölt két munkaerőtípus van jelen. Feltesszük, hogy azonos típusú munkások rezervációs bére megegyezik, amelyeket rendre r_α -val és r_β -val jelölünk, ahol legyen $r_\alpha < r_\beta$. Az α -típusú munkások száma m_α és a β -típusúaké m_β . Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy csak két vállalat van a piacon, amelyeket A -val és B -vel jelölünk. Feltesszük, hogy a munkástípustól függetlenül egy munkás az A vállalatnál ρ_A és a B vállalatnál ρ_B bevételt generál. Ez utóbbi feltevés azt is jelenti, hogy a vállalatok nem foglalkoznak a náluk alkalmazott munkások típusával. Legyen a B vállalat termelékenysége nagyobb, azaz $\rho_B > \rho_A$. Továbbá feltesszük, hogy $r_\alpha \leq \rho_A$ és $r_\beta \leq \rho_B$, ami azt biztosítja, hogy mindkét munkaerőtípus többletet tud termelni valamely vállalatnál. Az A és B vállalatok rendre n_A és n_B rosban.

munkahellyel rendelkeznek, és az általuk megállapított bérek pedig rendre w_A és w_B . Azt mondjuk, hogy *munkanélküliség* van a piacon, ha vannak olyan munkások, akiknek a rezervációs bére eléri vagy meghaladja a magasabb bér ajánlatot ($\max\{w_A, w_B\}$) és nem kaptak állást egyik vállalatnál sem. Mivel „strukturális” munkanélküliséggel nem kívánunk foglalkozni, ezért feltesszük, hogy $m_\alpha = n_A$ és $m_\beta = n_B$. Az adott feltételek mellett egy hatékony mechanizmus az összes α -típusú munkást az A vállalatához rendelné r_α béren és az összes β -típusú munkást a B vállalatához az r_β béren.

Tekintsük a következő bérjátékot: először a vállalatok megteszik a bér ajánlataikat, majd a munkások jelentkezhetnek a magasabb bér ajánlatú vállalatnál, végül az állás nélkül maradt munkások az alacsonyabb bér ajánlatú vállalatnál jelentkezhetnek. Rátérve a piaci helyzetet leíró stratégiai játékra, legyenek $W_A = [0, \infty)$ és $W_B = [0, \infty)$ a vállalatok stratégiahalmazai. A feltevéseink alapján egyik vállalat sem fog r_α alatti bért ajánlani. Az is világos, hogy r_β béren egy vállalat az összes munkahelyét képes betölteni, mivel ha a másik vállalat magasabb árat állapít meg, akkor is lesz kellő számú jelentkező a második körben.

Ha legalább egy vállalat $[r_\alpha, r_\beta)$ intervallumbeli bért állapít meg és a másik vállalat $[0, r_\beta)$ intervallumbeli, akkor csak α -típusú munkások jelentkeznek. Továbbá ha azonos bért adnak meg, akkor azzal a feltevéssel élünk, hogy a két vállalat várható értékben az α -típusú munkásokon munkahelyeik arányában osztozik. Ha az A vállalat tesz magasabb bér ajánlatot, akkor az összes α -típusú munkást alkalmazza, míg ha a B vállalat bére a magasabb, akkor $\min\{m_\alpha, m_\beta\}$ munkást fog alkalmazni.

Nézzük azt az esetet, amikor a B vállalat bére legalább r_β és az A vállalat bére $[r_\alpha, r_\beta)$ intervallumbeli. Ekkor feltesszük, hogy a B vállalat által alkalmazott α -típusú munkásokat egy visszatevés nélküli véletlen mintavétellel határozzuk meg vagy másképpen a B vállalatnál jelentkező munkások bármely érkezési sorrendje azonosan valószínű. Ez megvalósítható úgy is, hogy mindegyik munkás húz egy sorsjegyet, amelyek közül m_β jegyet húznak ki

visszatevés nélkül egy $m_\alpha + m_\beta$ jegyet tartalmazó urnából. Ezek szerint a B vállalat által alkalmazott α -típusú munkások száma, amelyet X -szel jelölünk, hipergeometriai eloszlású. Tehát annak valószínűsége, hogy $k \in \{0, 1, \dots, m_\beta\}$ α -típusú munkást alkalmazunk

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{m_\alpha}{k} \binom{m_\beta}{m_\beta - k}}{\binom{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta}}.$$

Ezek után elfogadható feltevés, hogy a B vállalatnál alkalmazott α -típusú munkások száma hipergeometriai eloszlású, ha mindkét munkástípus azonos erőfeszítéssel próbál álláshoz jutni a magasabb árajánlatú B vállalatnál. Megjegyzendő, hogy munkanélküliséggel nézünk szembe, az $X = 0$ kis valószínűségű eseménytől eltekintve, mert a β -típusú munkások nem jelentkeznek az A vállalatnál. A várható munkanélküliség $m_\beta \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}$.

Az előző bekezdésben leírt lépéseket követve meghatározhatjuk a vállalatok várható profitjait arra az esetre, amikor az A vállalat r_β -nál nagyobb vagy egyenlő és a B vállalat $[r_\alpha, r_\beta)$ intervallumbeli bért állapít meg. Tegyük fel, hogy az Y -t, az A vállalat által alkalmazott α -típusú munkások számát, egy $m_\alpha + m_\beta$ elemű urnából kivett m_α elemű visszatevés nélküli minta határozza meg. Ekkor Y szintén hipergeometriai eloszlású, azaz annak valószínűsége, hogy $k \in \{0, 1, \dots, m_\alpha\}$ α -típusú munkást alkalmaz az A vállalat

$$\Pr(Y = k) = \frac{\binom{m_\alpha}{k} \binom{m_\beta}{m_\alpha - k}}{\binom{m_\alpha + m_\beta}{m_\alpha}}.$$

Így a piacon munkanélküliség lesz (az $m_\alpha - Y = m_\beta$ kis valószínűségű eseménytől eltekintve), mert a β -típusú munkások nem fognak a B vállalatnál állásért jelentkezni. Megjegyzendő, hogy $\Pr(m_\alpha - Y > m_\beta) = 0$ és a várható munkanélküliség $m_\beta - (m_\alpha - EY) = m_\beta \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$.

Összegezve az előző bekezdésekben tárgyalt eseteket, az A vállalat várható profitfüggvénye $E\pi_A(w_A, w_B) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\rho_A - w_A) m_\alpha, & \text{ha } w_A \geq r_\beta; \\ (\rho_A - w_A) m_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}, & \text{ha } w_A \in [r_\alpha, r_\beta) \text{ és } w_B \geq r_\beta; \\ (\rho_A - w_A) \max \{m_\alpha - m_\beta, 0\}, & \text{ha } w_A, w_B \in [r_\alpha, r_\beta) \text{ és } w_A < w_B; \\ (\rho_A - w_A) m_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}, & \text{ha } w_A, w_B \in [r_\alpha, r_\beta) \text{ és } w_A = w_B; \\ (\rho_A - w_A) m_\alpha, & \text{ha } w_A \in [r_\alpha, r_\beta) \text{ és } w_A > w_B; \\ 0, & \text{ha } w_A < r_\alpha. \end{array} \right.$$

és a B vállalat várható profitfüggvénye $E\pi_B(w_A, w_B) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\rho_B - w_B) m_\beta, & \text{ha } w_B \geq r_\beta; \\ (\rho_B - w_B) m_\alpha \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, & \text{ha } w_B \in [r_\alpha, r_\beta) \text{ és } w_A \geq r_\beta; \\ 0, & \text{ha } w_A, w_B \in [r_\alpha, r_\beta) \text{ és } w_A > w_B; \\ (\rho_B - w_B) m_\alpha \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, & \text{ha } w_A, w_B \in [r_\alpha, r_\beta) \text{ és } w_A = w_B; \\ (\rho_B - w_B) \min \{m_\alpha, m_\beta\}, & \text{ha } w_B \in [r_\alpha, r_\beta) \text{ és } w_A < w_B; \\ 0, & \text{ha } w_B < r_\alpha. \end{array} \right.$$

Kockázatmentes vállalatokat feltételezve a bérjátékunk a következő:

$$\Gamma = \langle \{A, B\}, (W_A, W_B), (E\pi_A, E\pi_B) \rangle.$$

Vegyük észre, hogy a munkásokat a Γ játékban szereplőként nem vettük figyelembe, de a viselkedésüket az $(E\pi_A, E\pi_B)$ specifikációjában viszont igen.

7.2. A bérjáték Nash-egyensúlya

Célunk a Γ játék Nash-egyensúlyának meghatározása és azon feltételek megadása, amelyek mellett egyensúlyban munkanélküliség jelentkezik a piacon. Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor az A vállalat termelékenységére lehetővé teszi az A vállalat számára β -típusú munkások profitábilis alkalmazását, azaz a továbbiakban teljesüljön $\rho_A > r_\beta$. Állapítson meg a B vállalat r_β bért, és jelölje w_A^* azt az árat, amelyen az A vállalat közömbös az r_β bér és a

$w_A^* \in (-\infty, r_\beta)$ bér megállapítása tekintetében, azaz w_A^* a

$$(\rho_A - r_\beta) m_\alpha = (\rho_A - w_A^*) m_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}$$

egyenlet megoldása, amelyből $w_A^* = \frac{1}{m_\alpha} (r_\beta (m_\alpha + m_\beta) - \rho_A m_\beta)$ adódik. Nyilván a w_A^* érték r_α -nál kisebb is lehet, w_A -val ellentétben, amit meg is engedünk az egyszerűbb tárgyalás érdekében. Hasonlóan értelmezzük a $w_B^* \in (-\infty, r_\beta)$ értéket a

$$(\rho_B - r_\beta) m_\beta = (\rho_B - w_B^*) m_\alpha \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$$

egyenlet megoldásaként, amely a $w_B^* = \frac{1}{m_\alpha} (r_\beta (m_\alpha + m_\beta) - \rho_B m_\beta)$ értéket adja. Nyilván $\rho_B > \rho_A > r_\beta$ miatt $r_\beta > w_A^* > w_B^*$.

A következő állítás megadja a Γ játék egyensúlyát a $\rho_A > r_\beta$ esetben.

7.21. állítás (Tasnádi, 2005). *Tegyük fel, hogy $\rho_A > r_\beta$. Ekkor a Γ bérjáték az alábbi egyensúlyi eseteket adja.*

1. *Ha $w_A^* < r_\alpha$, akkor $(w_A, w_B) = (r_\beta, r_\beta)$ az egyetlen egyensúly és nincsen munkanélküliség.*
2. *Ha $w_A^* > r_\alpha$ és $w_B^* \leq r_\alpha$, akkor $(w_A, w_B) = (r_\alpha, r_\beta)$ az egyetlen egyensúly és a várható munkanélküliség $m_\beta \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}$.*
3. *Ha $w_A^* = r_\alpha$, akkor $(w_A, w_B) = (r_\alpha, r_\beta)$ és $(w_A, w_B) = (r_\beta, r_\beta)$ a két tiszta Nash-egyensúly.*
4. *Ha $w_B^* > r_\alpha$, akkor a játéknak nincsen tiszta Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy egyik vállalat sem állapít meg r_β feletti bért. Továbbá r_β dominálja az összes r_α alatti bért. A $(w_A, w_B) \in [r_\alpha, r_\beta) \times [r_\alpha, r_\beta)$ stratégiaprofil nem lehet Nash-egyensúlyi, mert

- ha $w_A = w_B$, akkor mindkét vállalatnak érdekében állna a csekély mértékű egyoldalú béremelés,
- továbbá ha $w_A \neq w_B$, akkor a magasabb bért ajánló vállalat növelheti profitját bérének csekély mértékű csökkentésével.

Tehát egyensúlyban legalább az egyik vállalat bére r_β .

(1) eset. Tegyük fel, hogy $w_A^* < r_\alpha$. Már tudjuk, hogy legalább az egyik vállalat bére r_β , legyen ez az A vállalat. Ekkor $w_B^* < r_\alpha$ -ból következik, hogy bármely $w_B \in [r_\alpha, r_\beta)$ intervallumbeli bér dominált az r_β bér által. Hasonlóan érvelhetünk abban az esetben is, ha abból indulunk ki, hogy a B vállalat bére r_β .

(2) és (3) esetek. A bizonyítást két alesetre bontjuk: (i) $w_B^* < r_\alpha$ és (ii) $w_B^* = r_\alpha$.

Kezdjük az (i) alesett. Tegyük fel, hogy $w_A^* \geq r_\alpha$ és $w_B^* < r_\alpha$. Mint ismeretes egy esetleges egyensúlyban legalább egyik vállalat r_β bért állapít meg. Ha $w_A = r_\beta$, akkor $w_B = r_\beta$ adódik, mivel a B vállalat kevesebb profitot realizálna egy r_β alatti bérrel, mint az r_β bérrel. De ha $w_B = r_\beta$, akkor az r_α bér az A vállalat legjobb válasza, mert $E\pi_A(r_\alpha, r_\beta) \geq E\pi_A(w_A^*, r_\beta) = E\pi_A(r_\beta, r_\beta)$. Továbbá $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) = E\pi_B(r_\beta, r_\beta) > E\pi_B(r_\beta, r_\alpha) = E\pi_B(r_\alpha, r_\alpha)$. Ezért $(w_A, w_B) = (r_\alpha, r_\beta)$ egy tiszta Nash-egyensúly. Vegyük észre, hogy $(w_A, w_B) = (r_\beta, r_\beta)$ egy másik tiszta Nash-egyensúly, ha $w_A^* = r_\alpha$.

Ezek után térjünk rá a (ii) alesetre. Tegyük fel, hogy $w_B = r_\beta$. De ekkor az A vállalat r_α bért ajánl, mivel $E\pi_A(r_\beta, r_\beta) = E\pi_A(w_A^*, r_\beta) < E\pi_A(r_\alpha, r_\beta)$, mert $w_B^* = r_\alpha$ -ból $w_A^* > r_\alpha$ következik. Azt kaptuk, hogy (r_α, r_β) egy tiszta Nash-egyensúly, mert $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) = E\pi_B(r_\beta, r_\beta) = E\pi_B(r_\beta, r_\alpha) = E\pi_B(r_\alpha, r_\alpha)$. Most tegyük fel, hogy $w_A = r_\beta$. De ekkor a B vállalatnak a két legjobb válasza: $w_B = r_\beta$ és $w_B = r_\alpha$, ahol az első esetben (r_β, r_β) nem lehet egyensúlyi, mert az A vállalat inkább áttérne az r_α bérre. Tekintsük a $w_B = r_\alpha$ második esetet. Azonban ez ellentmond annak, hogy $w_A = r_\beta$ az A vállalat egyensúlyi stratégiája, mert $E\pi_A(r_\beta, r_\alpha) = E\pi_A(r_\beta, r_\beta) = E\pi_A(w_A^*, r_\beta) < E\pi_A(w_A^*, r_\alpha)$. Tehát (r_α, r_β) a (ii) aleset egyedüli tiszta Nash-egyensúlya.

(4) eset. Tegyük fel, hogy $w_B^* > r_\alpha$. Mint a bizonyítás első bekezdéséből kiderült, egy esetleges tiszta Nash-egyensúlyban legalább az egyik vállalat bére r_β . Tegyük fel, hogy $w_A = r_\beta$. De ekkor a B vállalat r_α bért állapít meg, mivel $E\pi_B(r_\beta, r_\beta) = E\pi_B(r_\beta, w_B^*) < E\pi_B(r_\beta, r_\alpha)$. Azonban

ez ellentmond annak, hogy $w_A = r_\beta$ az A vállalat egyensúlyi stratégiája, mivel $E\pi_A(r_\beta, r_\alpha) = E\pi_A(r_\beta, r_\beta) = E\pi_A(w_A^*, r_\beta) < E\pi_A(w_A^*, r_\alpha)$. Hasonlóan $w_B = r_\beta$ -ből kiindulva is ellentmondásra jutunk a profilunk tiszta Nash-egyensúlyi voltaival. Tehát megállapíthatjuk, hogy tiszta Nash-egyensúlyi megoldás nem létezik. $\square$

A 7.21. állítás (1) pontjában az r_α bér elegendően nagynak bizonyul ahhoz, hogy megakadályozza a vállalatok túl alacsony bérajánlatait. Ezért ebben az esetben teljes a foglalkoztatás. Megjegyzendő, hogy teljes foglalkoztatottság mellett az α -típusú munkásokat a B vállalat is foglalkoztat és hasonlóan β -típusú munkásokat az A vállalat is alkalmazhat.

A 7.21. állítás (2) pontja, akkor áll elő, ha csak a B az, amely nem részesíti előnyben az r_α bért az r_β bérrel szemben, amikor az ellenfele r_β bért állapít meg. Ebben az esetben a B vállalatnak nincsen betöltetlen állása, de az A vállalat nem talál elegendő munkást, mert a β -típusú munkások nem jelentkeznek az A vállalatnál és csak azok az α -típusú munkások jelentkeznek, akik nem kaptak állást a B vállalatnál. Tehát az összes α -típusú munkást alkalmaznak és vannak β -típusú B vállalatnál még állást kereső munkások. A piacon várhatóan $m_\beta \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}$ számú β -típusú munkás lesz munka nélkül. Tehát munkanélküliség jelentkezik a munkások nem hatékony hozzárendeléséből adódóan, mivel az összes munkás először a B vállalatnál jelentkezik és azok felvétele érkezési sorrend szerint történik, ahol az egyes érkezési sorrendek azonosan valószínűek.² A munkások nem hatékony hozzárendelése a vállalatokhoz aggasztó, mivel bár a magasabb bért ajánló vállalat a limitált számú munkahelye miatt nem tudja az összes munkást alkalmazni, az általa alkalmazott munkások közül többen az alacsonyabb bérajánlatú vállalatnál is hajlandóak lennének munkát vállalni, viszont kizorítanak magasabb rezervációs bérű munkásokat. A helyzet hasonlatos a diplomás munkanélküliséghez, amikor a diplomások nem vállalják el

²Ez a mechanizmus eredményezi az α -típusú munkások B vállalatnál történő elhelyezkedését a 2. alfejezetben leírtak szerint.

a kvalifikációjuknak nem megfelelő alacsonyabb bérű munkát. Vegyük észre a modellünk Bertrand–Edgeworth jellegét a kapacitáskorlátok, az adagolás (sorbanállás) jelentkezése és a vállalatok stratégiai bérmegállapítása tekintetében. Többek között ezen okok miatt is eltérően viselkedik modellünk Wauthy és Zenou (2002) modelljével szemben.

A munkanélküliség a vállalatok közötti koordináció hiányával is magyarázható, ugyanis a B vállalat felvételi eljárásával megelőzhető volna a munkanélküliség kialakulása. Egy ilyen jellegű felvételi eljárás életbe léptetése nyilván költségekkel járna, amelynek alkalmazásában a B vállalatot érdekeltté kellene tenni. Ki viselné ezeket a költségeket? Nyilván az A vállalat, amely a nála betöltetlen állások miatt haszontól esik el, így elméletileg a B vállalatnak jutatott transzferkifizetéseken keresztül érdekelté tehetné a B vállalatot egy megfelelő felvételi eljárás alkalmazásában. Ellenkező esetben a modellben jelentkező munkanélküliség típusa a játék egy dinamikus kiterjesztésében sem tűnne el.

A (3) esetben, megállapíthatjuk, hogy lényegében az (1) vagy (2) eset áll elő. Végül a 7.21. állítás (4) pontjában leírt helyzet akkor következik be, ha mindkét vállalat abból kiindulva, hogy az ellenfele r_β bért állapítana meg, r_α bért ajánlana. Sajnos ebben az esetben nincsen tiszta Nash-egyensúly, mivel (r_α, r_α) sem egyensúlyi. Ráadásul egy kevert Nash egyensúlyi megoldás 1 valószínűséggel nem hatékony, mivel lesznek β -típusú munkanélküliek vagy a β -típusú munkások nem is jelentkeznek egyik vállalatnál sem, mivel (r_β, r_β) nem lehet egyensúlyi és (r_β, r_β) az egyedüli nem dominált hatékony hozzárendelést jelentő stratégiaprofil. A kevert Nash-egyensúly vizsgálatára a következő alfejezetben térünk vissza.

Hátra van még a $\rho_A \leq r_\beta$ eset vizsgálata. Nyilván ha még $\rho_A < r_\beta$ is teljesül, akkor a munkások nem hatékonyan rendelődnek a vállalatokhoz, mivel $w_B = r_\beta$ esetén is lesznek B vállalatnál alkalmazott α -típusú munkások a kis valószínűségű $X = 0$ eseménytől eltekintve.

A következő állítás meghatározza a kapacitáskorlátos Γ bérjáték tiszta Nash-egyensúlyát a $\rho_A \leq r_\beta$ esetben.

7.22. állítás (Tasnádi, 2005). *Tegyük fel, hogy $\rho_A \leq r_\beta$. Ekkor a Γ játékot egyensúlyát tekintve az alábbi esetek szerint osztályozhatjuk:*

1. *Ha $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) \geq E\pi_B(0, r_\alpha)$, akkor (r_α, r_β) az egyetlen Nash-egyensúly és a várható munkanélküliség $m_\beta \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}$.*
2. *Ha $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) < E\pi_B(0, r_\alpha)$, akkor nem létezik a játéknak tiszta Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás. Nyilván az A vállalat sosem fog ρ_A feletti bért megállapítani, míg a B vállalat sosem ad meg r_β feletti bér. Továbbá bármely r_α alatti bér dominált az r_β bér által a B vállalat esetén és legalább gyengén dominált az r_α bér által az A vállalat esetén.

Először tegyük fel, hogy $\rho_A < r_\beta$. Ekkor a $(w_A, w_B) \in [r_\alpha, \rho_A] \times [r_\alpha, \rho_A]$ stratégiaprofil nem lehet egyensúlyi, mert ha $w_A = w_B$, akkor legalább a B vállalat érdekelt egy kellően kismértékű béremelésben, és ha $w_A \neq w_B$, akkor a magasabb bérajánlatot tevő vállalat érdekelt bérének kismértékű csökkenésében. Ezek alapján egy lehetséges tiszta Nash-egyensúlyban a B vállalat $(\rho_A, r_\beta]$ intervallumbeli bért állapít meg. De a $w_B \in (\rho_A, r_\beta)$ stratégia nem lehet a B vállalat számára egyensúlyi, mert $E\pi_B(w_A, w_B)$ szigorúan monoton csökkenő a (ρ_A, r_β) intervallumon w_B -ben bármely rögzített $w_A \in [0, \rho_A]$ bérre. Ezért egy lehetséges tiszta Nash-egyensúlyban a B vállalat r_β bér állapít meg, amiből viszont következik, hogy az A vállalat r_α bért ad meg.

Másodszor a $\rho_A = r_\beta$ esetben az (r_β, r_β) stratégiaprofil nem lehet egyensúlyi mert $E\pi_A(r_\beta, r_\beta) = 0$, míg $E\pi_A(r_\alpha, r_\beta) > 0$. Az előző bekezdésben alkalmazott érvelés alapján megmutatható, hogy $(w_A, w_B) \in [r_\alpha, \rho_A] \times [r_\alpha, \rho_A]$ nem lehet tiszta Nash-egyensúly. Ezért (r_α, r_β) az egyetlen lehetséges tiszta Nash-egyensúly.

Végül meghatározandók azok a feltételek, amelyek mellett (r_α, r_β) egy tiszta Nash-egyensúly. Először is könnyen ellenőrizhető, hogy $E\pi_A(r_\alpha, r_\beta) \geq E\pi_A(w_A, r_\beta)$ bármely $w_A \in W_A$ -ra. Másodjára $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) \geq E\pi_B(r_\alpha, w_B)$ bármely $w_B \in W_B$ -re. Figyelembe véve, hogy $E\pi_B(r_\alpha, w_B)$ szigorúan monoton

csökkenő w_B -ben az (r_α, r_β) helyen adódik az

$$E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) \geq \lim_{w_B \searrow r_\alpha} E\pi_B(r_\alpha, w_B) = E\pi_B(0, r_\alpha)$$

elégéses feltétel az (r_α, r_β) tiszta Nash-egyensúlyi voltára. Továbbá ha $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) < E\pi_B(0, r_\alpha)$, akkor létezik olyan kellően kicsi $\varepsilon > 0$, hogy $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) < E\pi_B(r_\alpha, r_\alpha + \varepsilon)$. Tehát $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) \geq E\pi_B(0, r_\alpha)$ szükséges és elégéses feltétele az (r_α, r_β) stratégiaprofil tiszta Nash-egyensúlyi voltának.

□

Az $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) \geq E\pi_B(0, r_\alpha)$ feltétel ekvivalens az

$$m_\beta(\rho_B - r_\beta) \geq \min\{m_\alpha, m_\beta\}(\rho_B - r_\alpha).$$

egyenlőtlenséggel. Ezért nyilván $m_\beta > m_\alpha$ szükséges feltétele az $E\pi_B(r_\alpha, r_\beta) \geq E\pi_B(0, r_\alpha)$ egyenlőtlenségnek. Továbbá ha m_β -t kellően megnöveljük, míg m_α , r_α , r_β , ρ_A és ρ_B változatlanok, akkor (r_α, r_β) tiszta Nash-egyensúly.

Bár a 7.22. állítás (2) pontjában nem határoztuk meg a Γ játék kimeneteletét, teljes foglalkoztatottság legfeljebb nulla valószínűséggel állhat elő egy kevert Nash-egyensúlyban, mivel az A vállalat soha nem állapít meg ρ_A feletti bért. Ezért ha $\rho_A < r_\beta$, akkor egyidejűleg jelentkezik munkaerőhiány munkánélküli β -típusú munkások mellett vagy munkaerőhiány nem aktív β -típusú munkásokkal.

7.3. Kevert Nash-egyensúly

Ebben az alfejezetben részletesen megvizsgáljuk a 7.21. állítás (4) pontját. Azt már tudjuk, hogy ebben az esetben a játéknak nincsen tiszta Nash-egyensúlya, sőt a nem folytonos kifizetőfüggvényű játékok kevert Nash-egyensúlyát biztosító Dasgupta és Maskin (1986a), Simon (1987) és Reny (1999) egzisztencia tételek sem alkalmazhatók minden paraméterértékre. Ennek ellenőrzéséhez megvizsgáljuk Reny (1999) 5.2. következményét, mivel ebből következik az összes korábbi nem folytonos kifizetőfüggvényekre vonatkozó egzisztencia tétel. Nevezetesen ha $m_\alpha \leq m_\beta$, akkor megmutatjuk, hogy a $\Gamma' =$

$\langle \{A, B\}, [0, \rho_B]^2, (E\pi_A, E\pi_B) \rangle$ játék kevert bővítése nem legjobb-válasz biztos az (r_β, r_β) helyen.³ Könnyen ellenőrizhető, hogy Γ' nem legjobb-válasz biztos az (r_β, r_β) helyen, mivel az $i \in \{A, B\}$ vállalat csak w_i^* alatti árak megállapításával növelheti profitját. Ha i versenytársa kismértékben csökkenti a bérét, akkor az i vállalat nem realizál profitot. Ezért az i vállalat nem tud $E\pi_i(r_\beta, r_\beta)$ nagyobb mértékű profitot biztosítani magának. Azonban azt kell megmutatnunk, hogy a Γ' kevert bővítése nem legjobb-válasz biztos egy olyan profilban, amelyben mindkét vállalat egy valószínűséggel r_β bért állapít meg. Tegyük fel, hogy az i vállalat úgy változtat a stratégiáján, hogy az $E\pi_i(r_\beta, r_\beta)$ értéknél több profitot ér el. Ha a versenytársa egy valószínűséggel az $r_\beta - \varepsilon$ bért ajánlja, ahol ε egy kellően kis pozitív érték, akkor az i vállalat az $E\pi_i(r_\beta, r_\beta)$ értéknél kevesebb profitot realizál, mivel csak nagyon kis valószínűséggel érhet el több profitot, miközben nagy valószínűséggel nem realizál profitot.

A következőkben egy kevert stratégia alatt a $[0, r_\beta]$ intervallum feletti Borel-mérhető halmazokon értelmezett valószínűségi mértéket értjük. Egy (μ_A, μ_B) kevert Nash-egyensúlyi stratégiaprofil az alábbi két feltétellel meghatározott:

$$E\pi_A(w_A, \mu_B) \leq \pi_A^*, \quad E\pi_B(\mu_A, w_B) \leq \pi_B^* \quad (7.1)$$

bármely $w_A, w_B \in [0, r_\beta]$ -ra, és

$$E\pi_A(w_A, \mu_B) = \pi_A^*, \quad E\pi_B(\mu_A, w_B) = \pi_B^* \quad (7.2)$$

μ_A majdnem mindenütt és μ_B majdnem mindenütt, ahol π_A^*, π_B^* a (μ_A, μ_B) egyensúlyi stratégiaprofilhoz tartozó egyensúlyi kifizetések. Jelölje rendre F_A és F_B a μ_A és μ_B -hez tartozó eloszlásfüggvényeket.

Az $m_\alpha \leq m_\beta$ esettel kezdünk. A bizonyítás során hasznosnak bizonyulnak a $w_B^* > r_\alpha$ feltétel $r_\beta(m_\alpha + m_\beta) > \rho_B m_\beta + r_\alpha m_\alpha$ vagy

$$m_\alpha(r_\beta - r_\alpha) > m_\beta(\rho_B - r_\beta) \quad (7.3)$$

³Azt mondjuk, hogy a Γ' játék *legjobb-válasz biztos*, ha bármely olyan $(w^*, E\pi^*)$ helyhez, amely a vektorértékű kifizetőfüggvény-gráf lezártjának eleme és w^* nem egy egyensúlyi profil, létezik olyan $\varepsilon > 0$, olyan $i \in \{A, B\}$ vállalat és $w_i \in [0, \rho_B]$ stratégia, melyre $E\pi_i(w_i, w'_{-i}) \geq E\pi_i^* + \varepsilon$ bármely $w'_{-i} \in N(w_{-i}^*)$ hiányos profilra w_{-i}^* valamely nyílt $N(w_{-i}^*)$ környezetében.

ekvivalens alakjai. Az $m_\alpha \leq m_\beta$ esetben két különböző típusú egyensúlyunk van. Az elsőt a következő állítás írja le.

7.23. állítás (Tasnádi, 2005). *Ha $\rho_A > r_\beta$, $w_B^* > r_\alpha$, $m_\alpha \leq m_\beta$ és*

$$\frac{(\rho_B - r_\beta) m_\beta}{\left(\rho_B - \rho_A + \frac{(\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta) m_\alpha}{(\rho_A - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_A - r_\beta) m_\beta} \right) m_\alpha} < 1, \quad (7.4)$$

akkor a (μ_A, μ_B) kevert egyensúlyra

$$\begin{aligned} \mu_B(\{r_\beta\}) &= \frac{\rho_A - r_\beta}{\rho_A - r_\alpha} \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\alpha}, \quad \bar{w} = \rho_A - \frac{(\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta) m_\alpha}{(\rho_A - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_A - r_\beta) m_\beta}, \\ \mu_A([\bar{w}, r_\beta)) &= 0, \quad \mu_B([\bar{w}, r_\beta)) = 0, \quad \mu_B(\{r_\alpha\}) = 0, \\ \mu_A(\{r_\beta\}) &= \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\alpha} \left(1 - \frac{(\rho_B - r_\beta) m_\beta}{(\rho_B - \bar{w}) m_\alpha} \right), \\ \mu_A(\{r_\alpha\}) &= \frac{\rho_B - r_\beta}{\rho_B - r_\alpha} \frac{m_\beta}{m_\alpha} - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mu_A(\{r_\beta\}), \\ F_A(w) &= \frac{\rho_B - r_\beta}{\rho_B - w} \frac{m_\beta}{m_\alpha} - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mu_A(\{r_\beta\}) \quad \text{minden } w \in (r_\alpha, \bar{w}] \text{-ra, és} \\ F_B(w) &= \frac{\rho_A - r_\beta}{\rho_A - w} - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mu_B(\{r_\beta\}) \quad \text{minden } w \in (r_\alpha, \bar{w}] \text{-ra,} \end{aligned}$$

továbbá a hozzátartozó egyensúlyi profitok értékei $\pi_A^ = (\rho_A - r_\beta) m_\alpha$ és $\pi_B^* = (\rho_B - r_\beta) m_\beta$.*

Bizonyítás. Közvetlenül belátható, hogy $\bar{w} > r_\alpha$ következik $w_B^* > r_\alpha$ -ból, míg $\bar{w} < r_\beta$ a $\rho_A > r_\beta$ -ból. Ezért $\bar{w} \in (r_\alpha, r_\beta)$. Továbbá $w_B^* > r_\alpha$ -ból következik $\mu_B(\{r_\beta\}) < 1$. Nyilván $0 < \mu_B(\{r_\beta\})$. Vegyük észre, hogy a (7.4) feltétel ekvivalens a $\mu_A(\{r_\beta\}) > 0$ egyenlőtlenséggel. F_A és F_B monoton növekednek w -ben az $(r_\alpha, \bar{w}]$ intervallumon, valamint ellenőrizhető, hogy $\mu_A(\{r_\beta\}) = 1 - F_A(\bar{w})$, $\mu_B(\{r_\beta\}) = 1 - F_B(\bar{w})$, $\mu_A(\{r_\alpha\}) = \lim_{w \searrow r_\alpha} F_A(w)$, $\lim_{w \searrow r_\alpha} F_B(w) = 0$,

$$\pi_A^* = (\rho_A - w) m_\alpha F_B(w) + (\rho_A - w) m_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mu_B(\{r_\beta\}) \quad (7.5)$$

és

$$\pi_B^* = (\rho_B - w) m_\alpha F_A(w) + (\rho_B - w) m_\alpha \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mu_A(\{r_\beta\}) \quad (7.6)$$

bármely $w \in (r_\alpha, \bar{w}]$ bérre. A fenti egyenlőtlenségekből azonnal látható, hogy $w \in (\bar{w}, r_\beta)$ intervallumbeli bérek alacsonyabb profitszinteket eredményeznek,

mert

$$\pi_A^* > (\rho_A - w) m_\alpha F_B(\bar{w}) + (\rho_A - w) m_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mu_B(\{r_\beta\})$$

és

$$\pi_B^* > (\rho_B - w) m_\alpha F_A(\bar{w}) + (\rho_B - w) m_\alpha \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mu_A(\{r_\beta\})$$

bármely $w \in (\bar{w}, r_\beta)$ -ra.

Még ellenőrizendő $0 < \mu_A(\{r_\alpha\}) < 1$ és $\mu_A(\{r_\beta\}) < 1$ teljesülése. Vegyük észre, hogy $\mu_A(\{r_\alpha\}) + \mu_A(\{r_\beta\}) < 1$ a $\mu_A(\{r_\alpha\}) = \lim_{w \searrow r_\alpha} F_A(w) < F_A(\bar{w}) = 1 - \mu_A(\{r_\beta\})$ összefüggések miatt. Ezért elegendő $0 < \mu_A(\{r_\alpha\})$ -t belátni, amely a legkevésbé nyilvánvaló eset, és emiatt a számítások néhány lépését is közöljük. A $\mu_A(\{r_\alpha\})$ pozitivitásával ekvivalens

$$\begin{aligned} \frac{(\rho_B - r_\beta) m_\beta}{(r_\beta - r_\alpha) m_\alpha} &> \frac{\rho_B - \bar{w}}{\rho_B - r_\alpha} = \frac{\rho_B - r_\beta - (\rho_A - r_\beta) + \frac{(\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta) m_\alpha}{(\rho_A - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_A - r_\beta) m_\beta}}{\rho_B - r_\alpha} = \\ &= \frac{\rho_B - r_\beta + \frac{(\rho_A - r_\beta)^2 m_\beta}{(\rho_A - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_A - r_\beta) m_\beta}}{\rho_B - r_\alpha} = \\ &= \frac{(\rho_B - r_\beta)(\rho_A - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_B - r_\beta)(\rho_A - r_\beta) m_\beta + (\rho_A - r_\beta)^2 m_\beta}{(\rho_B - r_\alpha)((\rho_A - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_A - r_\beta) m_\beta)}. \end{aligned}$$

Egyszerű átrendezésekkel adódik

$$\begin{aligned} (\rho_B - r_\alpha)(\rho_B - r_\beta)((\rho_A - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_A - r_\beta) m_\beta) m_\beta &> (r_\beta - r_\alpha)(\rho_B - r_\beta)(\rho_A - r_\alpha) m_\alpha^2 - \\ &\quad (\rho_B - \rho_A)(\rho_A - r_\beta)(r_\beta - r_\alpha) m_\alpha m_\beta. \end{aligned}$$

Növeljük a jobb oldalt a (7.3) alkalmazásával, és megmutatjuk, hogy az így megnövelt kifejezés még mindig kisebb a bal oldalnál. Nevezetesen igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned} (\rho_B - r_\alpha)(\rho_B - r_\beta)((\rho_A - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_A - r_\beta) m_\beta) m_\beta &> (r_\beta - r_\alpha)(\rho_B - r_\beta)(\rho_A - r_\alpha) m_\alpha^2 - \\ &\quad (\rho_B - \rho_A)(\rho_A - r_\beta)(\rho_B - r_\beta) m_\beta^2. \end{aligned}$$

A szükséges egyszerűsítések és átalakítások után

$$(\rho_B - r_\alpha) m_\alpha m_\beta - (r_\beta - r_\alpha) m_\alpha^2 > (\rho_A - r_\beta) m_\beta^2. \quad (7.7)$$

Ahhoz, hogy belássuk a (7.7) összefüggést, előbb leellenőrizzük, hogy még ha $m_\alpha(r_\beta - r_\alpha) = m_\beta(\rho_B - r_\beta)$, akkor is teljesül (7.7). Másodjára meggyőződünk arról, hogy r_β növelése nem csökkenti a (7.7) két oldala közötti különbséget, mivel

$$\frac{\partial}{\partial r_\beta} ((\rho_B - r_\alpha) m_\alpha m_\beta - (r_\beta - r_\alpha) m_\alpha^2) = -m_\alpha^2 \geq -m_\beta^2 = \frac{\partial}{\partial r_\beta} (\rho_A - r_\beta) m_\beta^2.$$

Tehát μ_A és μ_B valóban valószínűségi mértékek, és ezért a vállalatok profitjai $\pi_A^* = (\rho_A - r_\beta) m_\alpha$ és $\pi_B^* = (\rho_B - r_\beta) m_\beta$. Ezek után megkaphatjuk a (7.6) és a (7.5) egyenletek egyszerű átrendezésével az F_A -ra és F_B -re az állításban szereplő kifejezéseket. $\square$

A következő állítás a másik lehetséges kevert egyensúlyt tárgyalja, amely $m_\alpha \leq m_\beta$ esetén áll elő.

7.24. állítás (Tasnádi, 2005). *Tegyük fel, hogy $\rho_A > r_\beta$, $w_B^* > r_\alpha$, $m_\alpha \leq m_\beta$ és*

$$\frac{(\rho_B - r_\beta) m_\beta}{\left(\rho_B - \rho_A + \frac{(\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta) m_\alpha}{(\rho_A - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_A - r_\beta) m_\beta} \right) m_\alpha} \geq 1. \quad (7.8)$$

Ekkor a következő kifejezésekkel adott (μ_A, μ_B) stratégiaprofil

$$\begin{aligned} \mu_B(\{r_\alpha\}) &= 0, \quad \bar{w} = \frac{1}{m_\alpha} (\rho_B m_\alpha - \rho_B m_\beta + r_\beta m_\beta) \in (r_\alpha, r_\beta], \\ \mu_A([\bar{w}, r_\beta]) &= 0, \quad \mu_B([\bar{w}, r_\beta]) = 0, \\ \mu_A(\{r_\alpha\}) &= \frac{(\rho_B - r_\beta) m_\beta}{(\rho_B - r_\alpha) m_\alpha}, \quad \mu_B(\{r_\beta\}) = \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta + \frac{\rho_A - r_\alpha}{\rho_A - \bar{w}} m_\alpha}, \\ F_A(w) &= \frac{(\rho_B - r_\beta) m_\beta}{(\rho_B - w) m_\alpha} \quad \text{minden } w \in (r_\alpha, \bar{w}] \text{-ra, és} \\ F_B(w) &= \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \left(\frac{\rho_A - r_\alpha}{\rho_A - w} - 1 \right) \mu_B(\{r_\beta\}) \quad \text{minden } w \in (r_\alpha, \bar{w}] \text{-ra} \end{aligned}$$

egy kevert Nash-egyensúly, amely mellett $\pi_A^ = (\rho_A - r_\alpha) m_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mu_B(\{r_\beta\})$ és $\pi_B^* = (\rho_B - r_\beta) m_\beta$.*

Bizonyítás. Nyilván $0 < \mu_A(\{r_\alpha\})$, és könnyen ellenőrizhető $\mu_A(\{r_\alpha\}) < 1$ teljesülése $w_B^* > r_\alpha$ és $\rho_B > r_\beta$ miatt. Továbbá $\bar{w} > r_\alpha$ következik $w_B^* > r_\alpha$ -ból

és $\bar{w} \leq r_\beta$ következik $\rho_B > r_\beta$ -ból. Vegyük észre, hogy $\bar{w} = r_\beta$ csak akkor teljesülhet, ha $m_\alpha = m_\beta$. Ezért a $0 < \mu_B(\{r_\beta\}) < 1$ egyenlőtlenségnek is fenn kell állnia. Nyilván F_A és F_B monoton növekvő w -ben az $(r_\alpha, \bar{w}]$ intervallumon. Továbbá egyszerű számításokkal adódik $F_A(\bar{w}) = 1$, $\mu_B(\{r_\beta\}) = 1 - F_B(\bar{w})$, $\mu_A(\{r_\alpha\}) = \lim_{w \searrow r_\alpha} F_A(w)$, $\lim_{w \searrow r_\alpha} F_B(w) = 0$,

$$\pi_A^* = (\rho_A - w) m_\alpha F_B(w) + (\rho_A - w) m_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mu_B(\{r_\beta\}) \quad (7.9)$$

és

$$\pi_B^* = (\rho_B - w) m_\alpha F_A(w) \quad (7.10)$$

bármely $w \in (r_\alpha, \bar{w}]$ -ra. Látható, hogy $w \in (\bar{w}, r_\beta)$ bérek választása kevesebb profitot eredményez. Mivel μ_A és μ_B valószínűségi mértékek, a vállalatok profitjai $\pi_A^* = (\rho_A - r_\alpha) m_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mu_B(\{r_\beta\})$ és $\pi_B^* = (\rho_B - r_\beta) m_\beta$. Ebből és a (7.9), illetve a (7.10) egyenlőségekből meghatározható F_B és F_A .

Még megvizsgálandó, hogy vajon az A vállalat nyerhet-e az r_β bérrel. A válasz nemleges, mint arról könnyen meggyőződhetünk, mivel a (7.8) feltétel ekvivalens a $\pi_A^* \geq (\rho_A - r_\beta) m_\alpha$ egyenlőtlenséggel. $\square$

Térjünk rá az $m_\alpha > m_\beta$ eset elemzésére, amely eset szintén két különböző egyensúlytípust ad.

7.25. állítás (Tasnádi, 2005). Ha $\rho_A > r_\beta$, $w_B^* > r_\alpha$, $m_\alpha > m_\beta$ és

$$(\rho_A - r_\alpha) m_\beta > (r_\beta - r_\alpha) m_\alpha, \quad (7.11)$$

akkor a (μ_A, μ_B) kevert Nash-egyensúly a

$$\begin{aligned}\mu_B(\{r_\beta\}) &= \frac{\rho_A - r_\beta}{\rho_A - r_\alpha} \frac{m_\alpha(m_\alpha + m_\beta)}{m_\beta^2} - \frac{m_\alpha^2}{m_\beta^2} + 1, \\ \mu_B(\{r_\alpha\}) &= 0, \quad \bar{w} = \rho_A - \frac{(\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta)m_\beta}{(r_\beta - r_\alpha)m_\alpha}, \quad \mu_B([\bar{w}, r_\beta)) = 0, \\ \mu_A(\{r_\beta\}) &= \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \left(1 - \frac{\rho_B - r_\beta}{\rho_B - \bar{w}}\right), \quad \mu_A([\bar{w}, r_\beta)) = 0, \\ \mu_A(\{r_\alpha\}) &= \frac{\rho_B - r_\beta}{\rho_B - r_\alpha} - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mu_A(\{r_\beta\}), \\ F_A(w) &= \frac{\rho_B - r_\beta}{\rho_B - w} - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mu_A(\{r_\beta\}) \quad \text{minden } w \in (r_\alpha, \bar{w}] \text{-ra, és} \\ F_B(w) &= \frac{(\rho_A - r_\beta)m_\alpha}{(\rho_A - w)m_\beta} - \frac{(\rho_A - r_\beta)m_\alpha}{(\rho_A - r_\alpha)m_\beta} \quad \text{minden } w \in (r_\alpha, \bar{w}] \text{-ra}\end{aligned}$$

összefüggésekkel adott, ahol $\pi_A^* = (\rho_A - r_\beta)m_\alpha$ és $\pi_B^* = (\rho_B - r_\beta)m_\beta$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $r_\alpha < \bar{w}$ következik $w_B^* > r_\alpha$ -ból és $\rho_A > r_\beta$ -ből, míg $\bar{w} < r_\beta$ következik a (7.11) összefüggésből. Ezért $\mu_A(\{r_\beta\}) > 0$. A szükséges átalakítások elvégzésével meggyőződhetünk arról, hogy $\mu_B(\{r_\beta\}) > 0$ ekvivalens a (7.11) feltétellel. Továbbá $\mu_B(\{r_\beta\}) < 1$ egyszerűen $w_B^* > r_\alpha$ -ból adódik. Nyilván F_A és F_B mindketten monoton növekvők w -ben az $(r_\alpha, \bar{w}]$ intervallumon. Majd ellenőrizhető, hogy $\mu_A(\{r_\beta\}) = 1 - F_A(\bar{w})$, $\mu_B(\{r_\beta\}) = 1 - F_B(\bar{w})$, $\mu_A(\{r_\alpha\}) = \lim_{w \searrow r_\alpha} F_A(w)$, $\lim_{w \searrow r_\alpha} F_B(w) = 0$,

$$\pi_A^* = (\rho_A - w) \left(m_\beta F_B(w) + m_\alpha - m_\beta + \frac{m_\beta^2}{m_\alpha + m_\beta} \mu_B(\{r_\beta\}) \right) \quad (7.12)$$

és

$$\pi_B^* = (\rho_B - w) \left(m_\beta F_A(w) + m_\alpha \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mu_A(\{r_\beta\}) \right) \quad (7.13)$$

minden $w \in (r_\alpha, \bar{w}]$ -ra. $\mu_A([\bar{w}, r_\beta)) = 0$, $\mu_B([\bar{w}, r_\beta)) = 0$, (7.12) és (7.13) alapján $(\bar{w}, r_\beta)$ intervallumbeli bérek alacsonyabb profitokat eredményeznek.

Ellenőrizendő továbbá, hogy $\mu_A(\{r_\beta\}) < 1$ és $0 < \mu_A(\{r_\alpha\}) < 1$. Vegyük észre, hogy $\mu_A(\{r_\alpha\}) = \lim_{w \searrow r_\alpha} F_A(w) < F_A(\bar{w}) = 1 - \mu_A(\{r_\beta\})$ -ból adódóan $\mu_A(\{r_\alpha\}) + \mu_A(\{r_\beta\}) < 1$, és ezért elegendő $\mu_A(\{r_\alpha\}) > 0$ -át igazolni. Mivel azonban ez utóbbi egyenlőtlenség közelről sem nyilvánvaló, a szükséges számítások egyes részlépéseit is közöljük. Újra érdemes a $w_B^* > r_\alpha$ -val ekvivalens (7.3) alakból kiindulni. Most $0 < \mu_A(\{r_\alpha\})$ -val ekvivalens

$$\begin{aligned} \frac{(\rho_B - r_\alpha) m_\alpha}{(\rho_B - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_B - r_\beta) m_\beta} &> \frac{\rho_B - \bar{w}}{\rho_B - r_\beta} = \frac{\rho_B - r_\beta - (\rho_A - r_\beta) + \frac{(\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta) m_\beta}{(r_\beta - r_\alpha) m_\alpha}}{\rho_B - r_\beta} = \\ &= 1 - \frac{(\rho_A - r_\beta)(r_\beta - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta) m_\beta}{(\rho_B - r_\beta)(r_\beta - r_\alpha) m_\alpha}. \end{aligned}$$

A fenti egyenlőtlenség pedig ekvivalens a

$$\frac{(\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta) m_\beta - (\rho_A - r_\beta)(r_\beta - r_\alpha) m_\alpha}{(\rho_B - r_\beta)(r_\beta - r_\alpha) m_\alpha} < \frac{(\rho_B - r_\beta) m_\beta}{(\rho_B - r_\alpha) m_\alpha - (\rho_B - r_\beta) m_\beta}$$

egyenlőtlenséggel. Egyszerű átalakítások után adódik

$$\begin{aligned} (\rho_B - \rho_A)(\rho_B - r_\beta)(r_\beta - r_\alpha) m_\alpha m_\beta &> (\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta)(\rho_B - r_\alpha) m_\alpha m_\beta - \\ &(\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta)(\rho_B - r_\beta) m_\beta^2 - \\ &(\rho_A - r_\beta)(r_\beta - r_\alpha)(\rho_B - r_\alpha) m_\alpha^2. \end{aligned}$$

A bal oldal értékét csökkentjük (7.3) és $\rho_B > \rho_A$ felhasználásával, és megmutatjuk, hogy az így csökkenetett kifejezés értéke még mindig kisebb a jobb oldalnál. Nevezetesen

$$\begin{aligned} (\rho_B - \rho_A)(\rho_B - r_\beta)(\rho_A - r_\beta) m_\beta^2 &> (\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta)(\rho_B - r_\alpha) m_\alpha m_\beta - \\ &(\rho_A - r_\alpha)(\rho_A - r_\beta)(\rho_B - r_\beta) m_\beta^2 - \\ &(\rho_A - r_\beta)(r_\beta - r_\alpha)(\rho_B - r_\alpha) m_\alpha^2. \end{aligned}$$

Ezek után a szükséges egyszerűsítések és átalakítások elvégzése után

$$(\rho_A - r_\alpha) m_\alpha m_\beta - (r_\beta - r_\alpha) m_\alpha^2 < (\rho_B - r_\beta) m_\beta^2. \quad (7.14)$$

(7.14) ellenőrzéséhez előbb felhasználjuk, hogy még $m_\alpha(r_\beta - r_\alpha) = m_\beta(\rho_B - r_\beta)$ mellett is teljesül (7.14). Majd meggyőződünk arról, hogy r_β növelése nem csökkenti a (7.14) két oldala közti különbséget, mivel

$$\frac{\partial}{\partial r_\beta} ((\rho_A - r_\alpha) m_\alpha m_\beta - (r_\beta - r_\alpha) m_\alpha^2) = -m_\alpha^2 < -m_\beta^2 = \frac{\partial}{\partial r_\beta} (\rho_B - r_\beta) m_\beta^2.$$

Ezért μ_A és μ_B valóban valószínűségi mértékek, és így $\pi_A^* = (\rho_A - r_\beta) m_\alpha$ és $\pi_B^* = (\rho_B - r_\beta) m_\beta$. Végül az F_B és F_A állításban szereplő kifejezéseit megkapjuk rendre a (7.12) és a (7.13) átalakításával. $\square$

Hátra maradt még a másik lehetséges egyensúly, amely $m_\alpha > m_\beta$ esetén merülhet fel.

7.26. állítás (Tasnádi, 2005). *Tegyük fel, hogy $\rho_A > r_\beta$, $w_B^* > r_\alpha$, $m_\alpha > m_\beta$ és*

$$(\rho_A - r_\alpha) m_\beta \leq (r_\beta - r_\alpha) m_\alpha. \quad (7.15)$$

Ekkor a

$$\begin{aligned} \mu_B(\{r_\alpha\}) &= 0, \quad \bar{w} = \frac{1}{m_\alpha} (\rho_A m_\beta + r_\alpha m_\alpha - r_\alpha m_\beta), \\ \mu_A([\bar{w}, r_\beta]) &= 0, \quad \mu_B([\bar{w}, r_\beta]) = 0, \quad \mu_A(\{r_\alpha\}) = \frac{\rho_B - \bar{w}}{\rho_B - r_\alpha}, \\ F_A(w) &= \frac{\rho_B - \bar{w}}{\rho_B - w} \quad \text{minden } w \in (r_\alpha, \bar{w}] \text{-ra és} \\ F_B(w) &= \frac{\rho_A - \bar{w}}{\rho_A - w} \frac{m_\alpha}{m_\beta} - \frac{m_\alpha}{m_\beta} + 1 \quad \text{minden } w \in (r_\alpha, \bar{w}] \text{-ra} \end{aligned}$$

összefüggésekkel adott (μ_A, μ_B) stratégiaprofil egy kevert Nash-egyensúly, amelyben a vállalatok profitjai $\pi_A^ = (\rho_A - \bar{w}) m_\alpha$ és $\pi_B^* = (\rho_B - \bar{w}) m_\beta$.*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\rho_A > r_\alpha$ -ból következik $\bar{w} > r_\alpha$, míg a (7.15) feltétel ekvivalens a $\bar{w} \leq r_\beta$ egyenlőtlenséggel. Ezért $0 < \mu_A(\{r_\alpha\}) < 1$. Nyilván F_A és F_B növekvők w -ben az $(r_\alpha, \bar{w}]$ intervallumon, amiből azonnal látható, hogy $\lim_{w \nearrow \bar{w}} F_A(w) = 1$, $\lim_{w \nearrow \bar{w}} F_B(w) = 1$ és $\mu_A(\{r_\alpha\}) = \lim_{w \searrow r_\alpha} F_A(w)$. Továbbá egyszerű átalakításokkal adódik $\lim_{w \searrow r_\alpha} F_B(w) = 0$,

$$\pi_A^* = (\rho_A - w) (m_\alpha F_B(w) + (m_\alpha - m_\beta) (1 - F_B(w))) \quad (7.16)$$

és

$$\pi_B^* = (\rho_B - w) m_\beta F_A(w) \quad (7.17)$$

bármely $w \in (r_\alpha, \bar{w}]$ -ra. A fenti egyenlőtlenségek miatt $(\bar{w}, r_\beta)$ intervallumbeli bérék alacsonyabb profitokhoz vezetnek. A vállalatok profitjai $\pi_A^* =$

$(\rho_A - \bar{w}) m_\alpha$ és $\pi_B^* = (\rho_B - \bar{w}) m_\beta$. Tehát F_A és F_B kifejezhető a (7.17) és a (7.16) kifejezésekből.

Még mindig előfordulhatna, hogy az A vállalat jobban járna az r_β bérrel. Azonban, mint ellenőrizhető, ez nem fordulhat elő, mert a (7.15) feltétel ekvivalens $\pi_A^* \geq (\rho_A - r_\beta) m_\alpha$ -val. $\square$

A 7.23., a 7.24., a 7.25. és a 7.26. állítások a 7.21. állítás (4) pontjának kevert Nash-egyensúlyát adja meg. Továbbá a levezetett kevert Nash-egyensúly egyértelműsége is igazolható, amely igazolásával kapcsolatos lépések megtalálhatók a függelékben.

Megjegyezzük, hogy a kevésbé érdekes 7.22. állítás (2) pontjának kevert Nash-egyensúlya az ebben az alfejezetben követett gondolatmenet segítségével meghatározható.

7.4. Eredmények interpretációja

Ebben a fejezetben egy olyan bérjátékot vizsgáltunk, amelyben a vállalatok eltérő termelékenységéből és különböző rezervációs bérű munkástípusokból indultunk ki. Az egyszerűség kedvéért a piacon két vállalatot és két, rezervációs béreiket tekintve, különböző munkástípust engedtünk meg. Az elemzésekből látható, hogy a vállalatok számának, illetve a lehetséges munkástípusok számának növelésével jelentősen megnövekedne a vizsgálandó esetek száma, és ezzel az ilyen irányú általánosításokkal járó elemzés terjedelmét is nagymértékben megnövelné. A kevert Nash-egyensúly meghatározása egy meglehetősen nehéz feladattá válna.

Bizonyos feltételek teljesülése esetén a piacon munkanélküliség alakul ki (a 7.21. és 7.22. állítások), amelynek oka, hogy az alacsonyabb rezervációs bérű munkások kiszorítják, a magasabb bérű állások megszerzése révén, a magasabb rezervációs bérű munkások egy részét, akik az alacsonyabb bérű vállalatnál viszont már nem vállalnak munkát. Tehát a munkanélküliség a munkások nem

hatékony allokációja révén alakul ki. A modell érdekessége, hogy a munkások azonos termelékenységére ellenére munkanélküliség alakul ki. Továbbá a munkanélküliséggel együtt a piacon betöltetlen állásokat figyelhetünk meg. A munkanélküliség és a betöltetlen állások egyidejű jelentkezését mutatta ki többek között Gottfries és McCormick (1995) modellje is, eltérő keretek között.

A munkanélküliség kimutatásakor a munkaerőpiacon az arányos adagolási szabályt alkalmaztuk.

Eltérő termelékenységű munkásokat például Wauthy és Zenou (2002) modellje szerint vezethetnénk be, amelyben az α -típusú munkások az alacsony képzettségű munkásoknak és a β -típusú munkások a magasan képzett munkásoknak feleltethetők meg. Tegyük fel, hogy az α -típusú munkások képzési költsége E_α^A , illetve E_α^B , attól függően, hogy az A vagy a B vállalatnál helyezkednek el. Hasonlóan értelmezhető az E_β^A és E_β^B értékek β -típusú munkások esetén. Abból kiindulva, hogy az α -típusú munkások az alacsony típusúak és az A vállalat az alacsony termelékenységű vállalat, legyen $E_\alpha^A > E_\beta^A$, $E_\alpha^B > E_\beta^B$, $E_\alpha^A < E_\beta^A$ és $E_\beta^A < E_\beta^B$. Még a fejezetben alkalmazott $m_\alpha = n_A$ és $m_\beta = n_B$ feltevés mellett is található a paraméterek egy olyan tartománya, amelyben a foglalkoztatottság teljes és a vállalatok eltérő béreket állapítanak meg a 7.21. állításunkkal ellentétben. Ez utóbbi modellkeret további jövőbeli kutatások tárgya lehet.

Végül érdemes megjegyezni, hogy a modellünk a munkanélküliség egy részleges magyarázatát adja, azaz egy munkanélküliséghez hozzájáruló tényezőt azonosítottunk, amely például a munkások közötti munkahelycsere ügyletekkel megszüntethető lenne.

Záró gondolatok

Az értekezésem homogén termékű oligopol piacokon vizsgálta a döntések időzítésének és a döntési változó megválasztásának a kérdéseit, továbbá a Bertrand–Edgeworth modell munkaerőpiaci alkalmazásának lehetőségét. A kapcsolódó irodalmat a bevezetés és az egyes fejezetek bevezető részei tartalmazták. Mivel az előszóban és a bevezetésben részletesen ismertettem elért eredményeimet, ezért az értekezésem záró részében az eredményeim bemutatásának megismétlésétől eltekintek, helyette inkább az általam 2003-tól 2010-ig elért saját eredményeimre épülő 3.-tól a 7.-ig fejezetekhez kapcsolódó, a szakirodalomban található, újabb eredményeket ismertetem röviden.

A 3. fejezet második alfejezetéhez kapcsolódóan születtek újabb eredmények. Furth és Dastidar (2005) a 3.2. tételhez hasonlóan megmutatták, hogy a hatékony vállalat lép később. Az általuk vizsgált időzítési játékban a döntések lehetséges közzétételi időpontja a $(-\infty, 0]$ intervallum. A több időzítést vizsgáló munka közül még Hirata és Matsumura (2011) legfrissebb két időszakos duopol időzítési árjátékot vizsgáló cikke emelendő ki. Hirata és Matsumura (2011) megmutatják a 3.2. tételhez hasonlóan, hogy a kevésbé hatékony vállalat nyilvánítja ki előbb az árát. Az eredményük az értekezésben közölnél abból a szempontból „általánosabb”, hogy nem követeli meg a hatékonyabb vállalat jelentős költségelőnyét, azaz bármilyen kis költségelőny biztosítja a hatékonyabb vállalat követő magatartását. Az általánosításuknak azonban ára is van, mivel egyrészt pótlólagosan megkövetelik a keresleti görbe konkavitását, másrészt kisebb mértékű költségelőny esetében mindkét sorrend az időzítési játék egyensúlya lehet. Ez utóbbi esetben a hatékony vállalat általi vezérlés-

hez tartozó sorrend annak Pareto-hatékony és kevésbé kockázatos volta miatt kitüntetett.

A domináns vállalati árvezérlést vizsgáló 4. fejezet tekintetében újabb elméleti eredményekről nincsen tudomásom. Ez a 4.1. tétel ismeretében nem is meglepő, hiszen az a döntések időzítését tekintve, a domináns vállalati árvezérlés modelljének tisztán árjátékkal történő megalapozásának lehetetlenségére utal. Ettől függetlenül egy összetettebb, nemcsak az ár- és mennyiség döntési változókat megengedő, modell segítségével elképzelhető a domináns vállalati árvezérlés modelljének megalapozása konvex, illetve nem lineáris költségfüggvények mellett. Ez utóbbi kérdés további kutatások tárgya lehet.

Az 5. fejezetben két termelési módot (rendelésre történő és készletre történő termelés) hasonlítottunk össze. Davis (2010) a kísérleti közgazdaságtan eszközeivel összehasonlítja a két termelési módot egy olyan több időszakos modellben, amelyben a megmaradt készletek a következő időszakban értékesíthetők. Megfigyelései szerint a két termelési mód közel azonos árakat eredményez, míg a profitok tekintetében a rendelésre történő termelés jár magasabb profitokkal. Érdekes feladat a kiterjesztett modelljének elméleti vizsgálata is, amely azonban bizonyosan nehéz feladat. Casaburi és Minerva (2011) differenciált termékű piacon megengedi a vállalatoknak a termelési mód megválasztását. Empirikus kutatásuk szerint a termékek differenciáltságának fokozása egyre inkább a rendelésre történő termelést teszi előnyösebbé. Egy végtelenszer ismételt játék keretein belül van den Berg és Bos (2011) összehasonlítják a két termelési mód melletti kartellalakítási lehetőséget, illetve annak jellegzetességét termelési kvóták tekintetében.

A 6. fejezetben vizsgált döntési változók endogén meghatározásának kérdésével sokan foglalkoztak, amelyek többsége differenciált termékű piacokat vett alapul. Differenciált termékű duopol piacon Chen és Yang (2010) továbbfejlesztése figyelemre méltó, mivel egyszerre engedi meg a döntési időpont és a döntési változó megválasztását. Modelljünkben lineáris keresleti görbék és konstans egységköltségek mellett mindig valamilyen sorrendű mennyiségi játék adódik. Wu

és Musacchio (2009) pedig az oligopolistáknak az árak és a mennyiségek közötti affin függvénykapcsolat megadását engedik meg. Modelljünkben az oligopolisták szintén mennyiségi játékosokká válnak.

Végül a 7. fejezettel kapcsolatban Zenou (2009) monográfiájára utalok, mely számos munkanélküliséget magyarázó mikromodellt tartalmaz.

dc_233_11

Függelék

A. Függelék

Bizonyítások

A.1. Készletre történő termelési játék egyensúlya

Az 5. fejezetben meghatároztuk a készletre történő termelési játék tiszta Nash-egyensúly létezésének feltételeit. Továbbá az 5. fejezet a kevert egyensúlyra vonatkozó eredményeket is tartalmazta bizonyítás nélkül. Ebben függelékben pótoljuk a hiányzó bizonyításokat. Kis kapacitások esetén beláttuk már a tiszta Nash-egyensúly létezését, hátramaradt a nagy és közepes kapacitások esete.

A.1.1. Nagy kapacitások esete

Ebben a szakaszban a nagy kapacitásokkal kezdünk, mivel ennek eredményeire szükségünk lesz a közepes kapacitások tárgyalása során is, amelyre a következő szakaszban térünk rá.

Maskin (1986) 1. tételéből tudjuk, hogy a készletre történő termelési játéknak van kevert Nash-egyensúlya. A továbbiakban egy kevert stratégia egy $S = [c, p^M] \times [0, k]$ feletti Borel σ -algebrán értelmezett valószínűségi mérték. Egy (μ_1^*, μ_2^*) kevert Nash-egyensúlyt a következő két feltétel határoz meg:

$$\pi_1((p_1, q_1), \mu_2^*) \leq \pi_1^*, \quad \pi_2(\mu_1^*, (p_2, q_2)) \leq \pi_2^* \quad (\text{A.1})$$

minden $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in S$ stratégiaprofilra, és

$$\pi_1((p_1^*, q_1^*), \mu_2^*) = \pi_1^*, \quad \pi_2(\mu_1^*, (p_2^*, q_2^*)) = \pi_2^* \quad (\text{A.2})$$

teljesül μ_1^* és μ_2^* majdnem mindenütt, ahol π_1^*, π_2^* a (μ_1^*, μ_2^*) egyensúlyhoz tartozó profitokat jelölik. A kevert egyensúlyt az (A.1) és az (A.2) feltételek segítségével általában nagyon nehéz zárt alakban előállítani. Ezért csak néhány kvalitatív állítás levezetését célozzuk meg. Nevezetesen összehasonlítjuk a készletre és a rendelésre történő termelési játékok egyensúlyi profitjait és árait. Az elemzésünkben a szimmetria feltevések (azonos kapacitások és egységköltségek) miatt szimmetrikus egyensúlyi megoldásokra szorítkozunk. A szimmetrikus kevert egyensúly létezése Dasgupta és Maskin (1986a) 6* tétele segítségével bizonyítható. Maskin (1986) megmutatta, hogy $\pi_1 + \pi_2$ felülről félig-folytonos készletre történő termelés mellett, továbbá az (α^*) tulajdonság a rendelésre történő termelés esetéhez hasonlóan igazolható készletre történő termelés esetén (lásd Dasgupta és Maskin, 1986b).

A továbbiakban szükségünk lesz még néhány jelölésre. Legyen μ a készletre történő termelési játék egy szimmetrikus kevert egyensúlyi stratégiája. Jelölje $\tilde{\pi}_\mu$ a μ -höz tartozó egyensúlyi profitot. A μ szimmetrikus egyensúlyi stratégia tartóját a következőképpen értelmezzük:

$$\text{supp}(\mu) = \{(p, q) \in S \mid \pi_1((p, q), \mu) = \tilde{\pi}_\mu\}.$$

Jelölje $s_\mu(p) \subseteq [0, k]$ azon $q \in [0, k]$ mennyiségek halmazát, amelyekre $(p, q) \in \text{supp}(\mu)$ adott $p \in [c, p^M]$ ár mellett. Az s_μ halmazértékű leképezést kínálati leképezésnek hívjuk. Legyen μ^p a μ valószínűségi mértéknek az árakra vett projekciója, azaz $\mu^p(B) = \mu(B \times [0, k])$ bármely $B \subseteq [c, p^M]$ Borel-halmazra. Jelöljék továbbá a $\tilde{p}_\mu$ és a $\hat{p}_\mu$ szimbólumok rendre a $\sup \{p \in [c, p^M] \mid \mu^p([c, p]) = 0\}$ és $\inf \{p \in [c, p^M] \mid \mu^p((p, p^M]) = 0\}$ értékeket. Ezért $\mu^p([\tilde{p}_\mu, \hat{p}_\mu]) = 1$. A továbbiakban elhagyjuk a μ alsó indexet, ha világos, hogy melyik szimmetrikus egyensúlyi stratégiáról van szó, és egyszerűen csak $\tilde{\pi}$ -t, s -et, $\tilde{p}$ -t és $\hat{p}$ -t írunk röviden $\tilde{\pi}_\mu$, s_μ , $\tilde{p}_\mu$ és $\hat{p}_\mu$ helyett.

A továbbiakban a készletre történő termelési játék elemzésében arra az esetre korlátozzuk magunkat, amikor a játéknak nincsen tiszta Nash-egyensúlya, azaz legyen $p^c < \bar{p}$ az 5.13. tétel szerint. Nyilván $\tilde{\pi}_\mu \geq 0$ teljesül, mivel mindkét vállalat elkerülheti a veszteséges termelést nulla kibocsátással. Ezért $\tilde{\pi}_\mu = 0$, ha $\tilde{p}_\mu = c$. A következő két lemma a $\tilde{p}_\mu > c$ esetet vizsgálja.

A.5. lemma. *Ha (μ, μ) egy szimmetrikus kevert egyensúlya a készletre történő termelési játéknak, akkor a 2.6., a 2.10., az 5.1., a $p^c < \bar{p}$ és a $\tilde{p}_\mu > c$ feltevések teljesülése esetén, továbbá a hatékony adagolási szabály feltételezése mellett $s_\mu(\tilde{p}_\mu) = \{\min\{k, D(\tilde{p}_\mu)\}\}$ és $\mu^p(\{\tilde{p}_\mu\}) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen (μ, μ) a készletre történő termelési játék egy tetszőleges kevert szimmetrikus egyensúlya. Tegyük fel, hogy $s(\tilde{p}) = \emptyset$. Nyilván léteznek olyan p_n és q_n sorozatok, amelyekre $p_n \geq \tilde{p}$, $(p_n, q_n) \in \text{supp}(\mu)$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \tilde{p}$. Erre a sorozatra $\tilde{\pi} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_1((p_n, q_n), \mu) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n - c) \min\{k, D(p_n)\} = (\tilde{p} - c) \min\{k, D(\tilde{p})\}.$$

Ezért $\tilde{\pi} = \pi_1((\tilde{p}, \min\{k, D(\tilde{p})\}), \mu)$, ami ellentmondásban áll az $s(\tilde{p}) = \emptyset$ összefüggéssel. Tehát $s(\tilde{p}) \neq \emptyset$. Ha létezik olyan $q \in s(\tilde{p})$, amelyre $q < \min\{k, D(\tilde{p})\}$, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$ is, amelyre

$$\pi_1((\tilde{p}, q), \mu) \leq (\tilde{p} - c) q < (\tilde{p} - \varepsilon - c) \min\{k, D(\tilde{p} - \varepsilon)\},$$

és ezért (μ, μ) nem lehet egy kevert egyensúly. Ez azt is jelenti, hogy $s(\tilde{p}) = \{\min\{k, D(\tilde{p})\}\}$.

Ha μ^p -nek atomja van a $\tilde{p}$ áron, akkor a $(\tilde{p}, \min\{k, D(\tilde{p})\}) \in \text{supp}(\mu)$ tiszta stratégia alkalmazása esetén a vállalatok pozitív valószínűséggel osztotznak a keresleten. De ekkor mindkét vállalat növelhetné a profitját, ha egyoldalúan áttérne a $(\tilde{p} - \varepsilon, \min\{k, D(\tilde{p} - \varepsilon)\})$ tiszta stratégiájára, ahol ε egy elegendően kis pozitív érték. Azonban ez lehetetlen, mert (μ, μ) egy kevert egyensúly, és ezért $\tilde{p}$ áron μ^p -nek nem lehet atomja. $\square$

Az A.5. lemmából látható, hogy $\tilde{\pi}_\mu = (\tilde{p}_\mu - c) \min \{k, D(\tilde{p}_\mu)\}$. Az A.6. lemma és az A.8. lemma kiterjesztik az A.5. lemma eredményeit az árelosztás tartójának alsó tartományára. Az A.6. lemma azt az esetet vizsgálja, amelyben a legkisebb lehetséges ár $\tilde{p}_\mu$ értéke mellett a vállalatok keresletkorlátoltak és nem kapacitáskorlátoltak, azaz $s_\mu(\tilde{p}_\mu) = \{D(\tilde{p}_\mu)\}$.

A.6. lemma. *Ha (μ, μ) egy szimmetrikus kevert egyensúlya a készletre történő termelési játéknak, akkor a 2.6., a 2.10., az 5.1., a $p^c < \bar{p}$, a $\tilde{p}_\mu > c$, az $s_\mu(\tilde{p}_\mu) = \{D(\tilde{p}_\mu)\}$ feltevések és a hatékony adagolási szabály mellett, létezik olyan $p' \in (\tilde{p}_\mu, p^M]$ ár, amely esetén $s(p) = \{D(p)\}$ és $\mu^p(\{p\}) = 0$ bármely $p \in [\tilde{p}, p']$ árra.*

Bizonyítás. Legyen (μ, μ) a készletre történő termelési játék egy tetszőleges szimmetrikus kevert egyensúlya. Először vegyük észre, hogy $D(p^M) < k$, mivel különben $D(p^M) = k$ volna, amiből $p^M \leq \tilde{p} < \hat{p}$ következne $s(\tilde{p}) = \{D(\tilde{p})\}$ miatt, és ellentmondásra jutnánk. Nyilván $\tilde{p} < p^M$, mivel máskülönben $\tilde{p} = p^M = \hat{p}$ következne, ami lehetetlen, hiszen $\mu^p(\{\tilde{p}\}) = 0$. Ezek a megállapítások hasznosnak bizonyulnak a bizonyítás hátralevő részében.

Az 1 vállalat profitja a 2 vállalat egyensúlyi μ stratégiáját adottnak véve

$$\begin{aligned} \pi_1((p, q), \mu) &= p \int_{[\tilde{p}, p] \times [0, k]} \min \{(D(p) - q_2)^+, q\} d\mu(p_2, q_2) + \\ &\quad p \int_{\{p\} \times [0, k]} \min \left\{ \frac{q}{q + q_2} D(p), q \right\} d\mu(p_2, q_2) + \quad (A.3) \\ &\quad pq\mu^p((p, \tilde{p}]) - cq, \end{aligned}$$

ahol $(p, q) \in \text{supp}(\mu)$. Megállapíthatjuk, hogy $(p, q) \in \text{supp}(\mu)$ maga után vonja a $q \leq D(p)$ egyenlőtlenséget. Nyilván a fenti két integrál mindegyike monoton növekvő q -ban. Ezért $p\mu^p((p, \tilde{p}]) - c > 0$ -ból következik, hogy π_1 szigorúan monoton növekvő q -ban, ha p -t és μ -t adottnak vesszük. Ezért $\tilde{p} < p^M$ és az A.5. lemma miatt létezik olyan $p' \in (\tilde{p}, p^M]$, hogy $s(p') = \{D(p')\}$, és $s(p) = \{D(p)\}$ vagy $s(p) = \emptyset$ bármely $p \in [\tilde{p}, p']$ -re.

Az A.5. lemma alapján μ^p -nek nincsen atomja $\tilde{p}$ áron. Tegyük fel, hogy μ^p -nek atomja van a $p \in (\tilde{p}, p']$ áron. Mivel μ^p -nek legfeljebb megszámlálható

sok atomja lehet, választható olyan kellően kis pozitív $\varepsilon > 0$, hogy $p - \varepsilon > \tilde{p}$, $\mu^p(\{p - \varepsilon\}) = 0$ és

$$\begin{aligned} \pi_1((p - \varepsilon, D(p - \varepsilon)), \mu) &= (p - \varepsilon) D(p - \varepsilon) \mu^p((p - \varepsilon, \tilde{p}]) - cD(p - \varepsilon) \\ &\geq (p - \varepsilon) D(p - \varepsilon) \mu^p([p, \tilde{p}]) - cD(p - \varepsilon) \\ &> p \frac{1}{2} D(p) \mu^p(\{p\}) + pD(p) \mu^p((p, \tilde{p}]) - cD(p) \\ &= \pi_1((p, D(p)), \mu). \end{aligned}$$

Ezért $(p, D(p)) \notin \text{supp}(\mu)$. Ez utóbbi azonban ellentmond annak a kiindulási feltevésünknek, hogy μ^p -nek nincsen atomja p áron.

Megmutatjuk, hogy $s(p) = \{D(p)\}$ bármely $p \in [\tilde{p}, p']$ -re. Tegyük fel, hogy az $[\alpha, \beta] \subset (\tilde{p}, p')$ intervallum $(\alpha \leq \beta)$ egy „árrés”, azaz bármely $p \in [\alpha, \beta]$ árra $s(p) = \emptyset$ teljesül, továbbá található olyan p_n és p_n^* ársorozatok, amelyekre $p_n \in [\tilde{p}, \alpha)$, $s(p_n) = \{D(p_n)\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \alpha$, $p_n^* \in (\beta, p']$, $s(p_n^*) = \{D(p_n^*)\}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^* = \beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} \pi_1((\alpha, D(\alpha)), \mu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_1((p_n, D(p_n)), \mu) = \tilde{\pi} \quad \text{és} \\ \pi_1((\beta, D(\beta)), \mu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_1((p_n^*, D(p_n^*)), \mu) = \tilde{\pi}, \end{aligned}$$

mivel μ^p atommentes a $[\tilde{p}, p']$ intervallumon. Ebből azonban $s(\alpha) = \{D(\alpha)\}$ és $s(\beta) = \{D(\beta)\}$ következne, ami ellentmondás. Hasonlóan kizárhatóak az $[\alpha, \beta) \subset (\tilde{p}, p')$ és $(\alpha, \beta] \subset (\tilde{p}, p')$ típusú árrések. Végül tegyük fel, hogy az $(\alpha, \beta) \subseteq (\tilde{p}, p')$ egy árrés, azaz $s(\alpha) = \{D(\alpha)\}$, $s(\beta) = \{D(\beta)\}$ és $s(p) = \emptyset$ bármely $p \in (\alpha, \beta)$ árra. Ekkor $\pi_1((\gamma, D(\gamma)), \mu) = \gamma D(\gamma) \mu^p([\beta, \tilde{p}]) - cD(\gamma)$ szigorúan monoton növekvő γ -ban az (α, β) intervallumon $\beta \leq p^M$ és a 2.6. feltevés miatt, de ez lehetetlen, hiszen $\lim_{\gamma \rightarrow \alpha+0} \pi_1((\gamma, D(\gamma)), \mu) = \pi_1((\alpha, D(\alpha)), \mu) = \tilde{\pi}$, mivel μ^p atommentes a $[\tilde{p}, p']$ intervallumon. $\square$

Legyen (μ, μ) egy szimmetrikus kevert egyensúly és a továbbiakban legyen $p^k =$

$$\sup \{p' \in [\tilde{p}, p^M] \mid \forall p \in [\tilde{p}, p') : s(p) = \{\min\{k, D(p)\}\} \text{ and } \mu^p(\{p\}) = 0\}.$$

Az A.6. lemmából következik $p^k > \tilde{p}$, ha teljesülnek a 2.6., a 2.10., az 5.1., a $p^c < \bar{p}$, a $\tilde{p} > c$, az $s(\tilde{p}) = \{D(\tilde{p})\}$ feltételek és a fogyasztókat a hatékony adagolási szabály szerint szolgálják ki.

A.7. lemma. *Ha (μ, μ) a készletre történő termelési játék egy szimmetrikus kevert egyensúlya és teljesülnek a 2.6., a 2.10., az 5.1., a $p^c < \bar{p}$ és az $s_\mu(\tilde{p}_\mu) = \{D(\tilde{p}_\mu)\}$ feltevések, akkor a fogyasztók hatékony adagolása esetén $\tilde{\pi}_\mu = 0$.*

Bizonyítás. Vegyük a készletre történő termelési játék egy tetszőleges (μ, μ) szimmetrikus kevert egyensúlyát. Az A.7. lemma állítása nyilván teljesül, ha $\tilde{p} = c$. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\tilde{p} > c$. Ha $s(p^k) = \emptyset$, akkor μ^p atommentes a $[\tilde{p}, p^k]$ intervallumon, és emiatt $\pi_1((p^k, D(p^k)), \mu) = \lim_{p \rightarrow p^k-0} \pi_1((p, D(p)), \mu) = \tilde{\pi}$, ami ellentmondás. Tehát $s(p^k) \neq \emptyset$. A p^k értelmezése és az A.6. lemma alapján $p\mu^p((p, \tilde{p})) - c \geq 0$ teljesül bármely $p \in [\tilde{p}, p^k)$ árra. Ezért

$$p^k \mu^p([p^k, \tilde{p}]) - c = \lim_{p \rightarrow p^k-0} p\mu^p((p, \tilde{p})) - c \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

Legyen $H(q) = p^k q \mu^p([p^k, \tilde{p}]) - cq$. Nyilván $\pi_1((p^k, q), \mu) \leq H(q)$ bármely $q \in [0, k]$ mennyiségre. A p^k definíciója és az A.6. lemma alapján bármely $p \in [\tilde{p}, p^k)$ árra $\tilde{\pi} = \pi_1((p, D(p)), \mu)$ teljesül. (A.4) első részének alkalmazásával meggyőződhetünk a

$$\tilde{\pi} = \lim_{p \rightarrow p^k-0} \pi_1((p, D(p)), \mu) = H(D(p^k)) \quad (\text{A.5})$$

összefüggésről.

Figyelembe véve az (A.4) összefüggést, két esetet kell vizsgálnunk. Először induljunk ki abból, hogy $p^k \mu^p([p^k, \tilde{p}]) - c = 0$. Ekkor $0 = H(q) = H(D(p^k)) = \tilde{\pi}$ bármely $q \in [0, D(p^k)]$ mennyiségre (A.5) miatt. Ezért ellentmondásra jutottunk a $\tilde{p} > c$ egyenlőtlenséggel, és így $\tilde{p} = c$ adódik, amiből $\tilde{\pi} = 0$ következik.

Másodszor tegyük fel, hogy $p^k \mu^p([p^k, \tilde{p}]) - c > 0$. Ekkor $\mu^p([p^k, \tilde{p}]) > 0$ és $\tilde{\pi} = H(D(p^k)) > H(q) \geq \pi_1((p^k, q), \mu)$ bármely $q \in [0, D(p^k))$ mennyiségre, amiért $s(p^k) = \{D(p^k)\}$. A p^k definíciójából és a $p^k \mu^p([p^k, \tilde{p}]) - c > 0$

egyenlőtlenségből következik $\mu^p(\{p^k\}) > 0$. Ezért

$$\pi_1((p^k, D(p^k)), \mu) < \pi_1((p^k - \varepsilon, D(p^k - \varepsilon)), \mu) = \tilde{\pi}$$

bármely kellően kis pozitív ε értékre, ami ellentmond az $s(p^k) = \{D(p^k)\}$ egyenlőségnek. Ezért a második eset nem állhat elő. $\square$

Az A.5., az A.6. és az A.7. lemmák akkor érvényesek, ha a játéknak nincsen tiszta Nash-egyensúlya, azaz a vállalatok kapacitáskorlátai nagyok vagy közepesek. Megjegyzendő, hogy az A.5. és az A.7. lemmákat a függelék következő, közepes kapacitásokat tárgyaló alfejezetében is alkalmazni fogjuk. Az elemzésünket két esetre bontjuk: a $D(c) \leq k$ (nagy kapacitások) és a $\bar{p} > \max\{p^c, c\}$ (közepes kapacitások) esetére. Az 5.13. állítás tartalmazza a $p^c \geq \bar{p}$ esetben a játék a tiszta Nash-egyensúlyát. A következő állításunk a $D(c) \leq k$ esetre vonatkozó eredményt tartalmazza.

A.27. állítás. *Ha (μ, μ) a készletre történő termelési játék egy szimmetrikus kevert Nash-egyensúlya, akkor a 2.6., a 2.10., az 5.1., a $D(c) \leq k$ feltevések és hatékony adagolás mellett $\tilde{\pi}_\mu = \bar{\pi} = 0$.*

Bizonyítás. Az 5.12. állításból már ismert, hogy a rendelésre történő termelési játéknak létezik $\bar{\pi} = 0$ tulajdonságú tiszta Nash-egyensúlya, amelyben mindkét vállalat c árat állapít meg.

Térjünk most rá a készletre történő termelési játéokra. Nyilván ha $\tilde{p} = c$, akkor $\tilde{\pi} = 0$, és készen volnánk. Ha $\tilde{p} > c$, akkor alkalmazzuk az A.5. lemmát. Megjegyzendő, hogy $D(c) \leq k$ -ből következik $s(\tilde{p}) = \{D(\tilde{p})\}$. Ezért alkalmazható az A.7. lemma, amiből már $\tilde{\pi} = 0$ adódik. $\square$

Az A.27. állításból az is kiderül, hogy az adott feltételek teljesülése esetén a készletre történő termelési játék árai (elsőrendben) dominálják a rendelésre történő termelési játék árait, mert készletre történő termelés esetén az árak nem lehetnek c -nél alacsonyabbak, míg rendelésre történő termelésnél az egyensúlyi ár c . Továbbá az A.27. állítás összhangban van Levitan és Shubik (1978)

tételével, amelyben megállapították, hogy készletre történő termelés esetén a vállalatok egyensúlyi profitjai nullával egyenlők. Megjegyzendő, hogy Levitan és Shubik (1978) nem számoltak kapacitáskorlátokkal, modellünkben azonban a nagy kapacitások esete gyakorlatilag megegyezik a korlátlan kapacitások esetével.

A.1.2. Közepes kapacitások esete

Ebben a fejezetben a fennmaradó, $\bar{p} > \max \{p^c, c\}$ esetet vizsgáljuk. Vegyük először is észre, hogy ebben az esetben mindkét vállalat profitot realizál a készletre történő termelési játékban, azaz $\bar{\pi} > 0$, mégpedig a $\bar{p}$ ár és a $D(\bar{p}) - k$ mennyiség megállapításával. Ezért $\bar{\pi} \leq \tilde{\pi}$. Ez a megfigyelés azt is jelenti, hogy $\tilde{p} \geq \underline{p} > \max \{p^c, c\} \geq c$.

Mielőtt rátérnénk a $\bar{p} > \max \{p^c, c\}$ esetre vonatkozó fő eredményünkre, szükségünk lesz még egy lemmára, amely az A.6. lemmához hasonlítható, abban az értelemben, hogy az A.5. lemma eredményét terjeszti ki a szimmetrikus egyensúlyi stratégia tartójának alsó ártartományára.

A.8. lemma. *Ha (μ, μ) a készletre történő termelési játék egy szimmetrikus kevert egyensúlya, akkor a 2.6., a 2.10., 5.1., a $\bar{p} > \max \{p^c, c\}$ feltevések és a hatékony adagolási szabály alkalmazása mellett $k < D(\tilde{p}_\mu)$ teljesül és létezik olyan $p' \in (\tilde{p}_\mu, p^M]$ ár, amelyre $s(p) = \{k\}$ és $\mu^p(\{p\}) = 0$ bármely $p \in [\tilde{p}_\mu, p']$ árra.*

Bizonyítás. Legyen (μ, μ) a készletre történő termelési játék egy tetszőleges szimmetrikus kevert egyensúlya. Először is vegyük észre, hogy $k < D(\tilde{p})$ és $s(\tilde{p}) = \{k\}$, mert különben $s(\tilde{p}) = \{D(\tilde{p})\}$ az A.7. lemma felhasználásával maga után vonná a $\tilde{\pi} = 0$ egyenlőtlenséget, ami lehetetlen, hiszen $0 < \bar{\pi} \leq \tilde{\pi}$.

Az (A.3) egyenlőségben szereplő mindkét integrál monoton növekedő q -ban. Tehát $p\mu^p((p, \hat{p}]) - c > 0$ egyenlőtlenségből következik π_1 szigorú monoton növekedése q -ban, ha p és μ rögzített. Ekkor ellenőrizhető, hogy az A.5. lemma

alapján létezik olyan $p' \in [\tilde{p}, p^M]$ ár, amelyre $s(p') = \{k\}$, és $s(p) = \{k\}$ vagy $s(p) = \emptyset$ bármely $p \in [\tilde{p}, p']$ árra.

Mint ismeretes az A.5. lemma alapján μ^p atommentes a $\tilde{p}$ áron. Tegyük fel, hogy μ^p -nek atomja volna $p \in (\tilde{p}, p']$ áron. Ekkor

$$k\mu^p(\{p\}) > \frac{1}{2}D(p)\mu^p(\{p\}). \quad (\text{A.6})$$

Mivel μ^p -nek legfeljebb megszámlálható sok atomja lehet, létezik olyan elegendően kis pozitív $\varepsilon > 0$ érték, amelyre $p - \varepsilon > \tilde{p}$, $\mu^p(\{p - \varepsilon\}) = 0$ és

$$\begin{aligned} \pi_1((p - \varepsilon, k), \mu) &= (p - \varepsilon) \min\{(D(p - \varepsilon) - k)^+, k\} \mu^p([\tilde{p}, p - \varepsilon]) + \\ &\quad (p - \varepsilon) k\mu^p((p - \varepsilon, \tilde{p}]) - ck \\ &\geq (p - \varepsilon) \min\{(D(p) - k)^+, k\} \mu^p([\tilde{p}, p - \varepsilon]) + \\ &\quad (p - \varepsilon) k\mu^p([p - \varepsilon, p]) + (p - \varepsilon) k\mu^p(\{p\}) + \\ &\quad (p - \varepsilon) k\mu^p((p, \tilde{p}]) - ck \\ &\geq (p - \varepsilon) \min\{(D(p) - k)^+, k\} \mu^p([\tilde{p}, p]) + \\ &\quad (p - \varepsilon) k\mu^p(\{p\}) + (p - \varepsilon) k\mu^p((p, \tilde{p}]) - ck \\ &> p \min\{(D(p) - k)^+, k\} \mu^p([\tilde{p}, p]) + \\ &\quad p \frac{1}{2}D(p)\mu^p(\{p\}) + pk\mu^p((p, \tilde{p}]) - ck \\ &= \pi_1((p, k), \mu), \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségben az (A.6) összefüggést alkalmaztuk. Tehát $(p, k) \notin \text{supp}(\mu)$, ami ellentmondás.

Végül megmutatjuk, hogy $s(p) = \{k\}$ teljesül bármely $p \in [\tilde{p}, p']$ árra. Ez utóbbi állításunk speciálisan az A.5. lemma miatt teljesül a $\tilde{p}$ áron. Tegyük fel, hogy az $[\alpha, \beta] \subset (\tilde{p}, p')$ ($\alpha \leq \beta$) intervallum egy „árrés”, azaz bármely $p \in [\alpha, \beta]$ árra $s(p) = \emptyset$ és választhatók olyan p_n and p_n^* ársorozatok, amelyekre $p_n \in [\tilde{p}, \alpha)$, $s(p_n) = \{k\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \alpha$, $p_n^* \in (\beta, p')$, $s(p_n^*) = \{k\}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^* = \beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} \pi_1((\alpha, k), \mu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_1((p_n, k), \mu) = \tilde{\pi} \quad \text{és} \\ \pi_1((\beta, k), \mu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_1((p_n^*, k), \mu) = \tilde{\pi}, \end{aligned}$$

mivel μ^p atommentes a $[\tilde{p}, p']$ intervallumon, amiből viszont $s(\alpha) = \{k\}$ és $s(\beta) = \{k\}$ következne, ami lehetetlen. Hasonlóan igazolható, hogy $[\alpha, \beta) \subset (\tilde{p}, p')$ és $(\alpha, \beta] \subset (\tilde{p}, p')$ alakú árresek sem fordulhatnak elő. Ezt követően tegyük fel, hogy az $(\alpha, \beta) \subseteq (\tilde{p}, p')$ intervallum egy árres, azaz $s(\alpha) = \{k\}$, $s(\beta) = \{k\}$ és $s(p) = \emptyset$ bármely $p \in (\alpha, \beta)$ árra. Nyilván $\lim_{\gamma \rightarrow \alpha+0} \pi_1((\gamma, k), \mu) = \pi_1((\alpha, k), \mu)$, mert $\mu^p(\{\alpha\}) = 0$ és $\lim_{\gamma \rightarrow \beta-0} \pi_1((\gamma, k), \mu) = \pi_1((\beta, k), \mu)$ teljesülnek $\mu^p(\{\beta\}) = 0$ miatt. A $\tilde{p}$ értelmezése miatt $\mu^p([\tilde{p}, \alpha]) > 0$. Ezért ellenőrizhetően $\mu^p([\tilde{p}, \alpha]) > 0$, amiből következik $\pi_1((\gamma, k), \mu)$ szigorú konkavitása γ az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, a 2.6. feltevés alapján. Ebből adódóan $\pi_1((\gamma, k), \mu)$ -nek van egyértelmű maximumhelye az $[\alpha, \beta]$ intervallumon. Megállapíthatjuk, hogy $s(\alpha) = \emptyset$ vagy $s(\beta) = \emptyset$, és ezzel ellentmondásra jutottunk. $\square$

Az A.8. lemma biztosítja $p^k > \tilde{p}$ teljesülését, ha a $\bar{p} > \max\{p^c, c\}$, a 2.6., az 5.1. feltevések teljesülnek és a hatékony adagolási szabályt alkalmazzuk.

Most kimondjuk a szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyra vonatkozó eredményünket a $\bar{p} > \max\{p^c, c\}$ esetre:

A.28. állítás. *Teljesüljenek a 2.6., a 2.10., és az 5.1. feltevések, továbbá történjen a fogyasztók kiszolgálása a hatékony adagolási szabály szerint. Ekkor $\bar{p} > \max\{p^c, c\}$ esetén a készletre történő termelési játék bármely (μ, μ) szimmetrikus kevert egyensúlyában $\tilde{p}_\mu = \underline{p}$, $p^k = \bar{p}$, $\tilde{\pi}_\mu = \bar{\pi}$ és*

$$\mu^p([\underline{p}, p]) = \mu([\underline{p}, p], \{k\}) = \frac{(p - c)k - \bar{\pi}}{p(2k - D(p))} \quad (\text{A.7})$$

minden $p \in [\underline{p}, \bar{p}]$ árra.

Bizonyítás. Vegyük a készletre történő termelési játék egy tetszőleges (μ, μ) szimmetrikus kevert egyensúlyát. Ha $s(p^k) = \emptyset$, akkor μ^p atommentes a $[\tilde{p}, p^k]$ intervallumon, és ezért

$$\pi_1((p^k, \min\{k, D(p^k)\}), \mu) = \lim_{p \rightarrow p^k-0} \pi_1((p, \min\{k, D(p)\}), \mu) = \tilde{\pi},$$

ami ellentmondás. Tehát $s(p^k) \neq \emptyset$. A p^k definíciója és az A.8. lemma alapján $p\mu^p((p, \widehat{p})) - c \geq 0$ bármely $p \in [\widetilde{p}, p^k]$ árra. Legyen

$$G(q) = p^k q \mu^p([p^k, \widehat{p}]) + p^k (D(p^k) - k)^+ \mu^p([\widetilde{p}, p^k]) - cq.$$

Nyilván $\pi_1((p^k, q), \mu) \leq G(q)$ bármely $q \in [0, \min\{k, D(p^k)\}]$ mennyiségre. A.8. lemma alapján bármely $p \in [\widetilde{p}, p^k]$ árra $\widetilde{\pi} = \pi_1((p, \min\{k, D(p)\}), \mu)$. Továbbá (A.4) első részének alkalmazásával ellenőrizhető, hogy

$$\widetilde{\pi} = \lim_{p \rightarrow p^k - 0} \pi_1((p, \min\{k, D(p)\}), \mu) = G(\min\{k, D(p^k)\}). \quad (\text{A.8})$$

A $p^k = \bar{p}$ egyenlőség igazolásához két esetre bontjuk az (A.4) összefüggést. Tegyük előbb fel, hogy $p^k \mu^p([p^k, \widehat{p}]) - c = 0$. Ekkor $G(q) = G(\min\{k, D(p^k)\}) = \widetilde{\pi}$ bármely $q \in [0, \min\{k, D(p^k)\}]$ mennyiségre (A.8) alapján. Speciálisan ha $k < D(p^k)$, akkor $\widetilde{\pi} = G(D(p^k) - k) = \pi_1((p^k, D(p^k) - k), \mu) \leq \bar{\pi}$, amelyből $\widetilde{\pi} = \bar{\pi}$, $\widetilde{p} = \underline{p}$ és $p^k = \bar{p}$ következik. Ha $k \geq D(p^k)$, akkor $\widetilde{\pi} = G(0) = 0$. Ezért $k \geq D(p^k)$ nem állhat fenn, mivel $\bar{p} > \max\{p^c, c\}$ -ből $\widetilde{\pi} > 0$ következne.

Másodjára tegyük fel, hogy $p^k \mu^p([p^k, \widehat{p}]) - c > 0$. Ekkor

$$\widetilde{\pi} = G(\min\{k, D(p^k)\}) > G(q) \geq \pi_1((p^k, q), \mu)$$

bármely $q \in [0, \min\{k, D(p^k)\}]$ mennyiségre. Ezért $s(p^k) = \{\min\{k, D(p^k)\}\}$. Nyilván $\mu^p([p^k, \widehat{p}]) > 0$. Ellenőrizhető, hogy p^k definíciójából és $p^k \mu^p([p^k, \widehat{p}]) - c > 0$ -ból következik $\mu^p(\{p^k\}) > 0$. Tehát

$$\pi_1((p^k, \min\{k, D(p^k)\}), \mu) < G(\min\{k, D(p^k)\}) = \widetilde{\pi}$$

(A.8) felhasználásával, ami viszont ellentmond az $s(p^k) = \{\min\{k, D(p^k)\}\}$ egyenlőségnek. Ezért a második eset nem állhat elő.

Ezek után az A.8. lemmából az 1 vállalat profitja — feltéve, hogy a 2 vállalat μ egyensúlyi stratégiáját játssza —

$$\pi_1((p, k), \mu) = pk\mu^p((p, \widehat{p})) + p(D(p) - k)\mu^p([\widetilde{p}, p]) - ck, \quad (\text{A.9})$$

ha $p \in [\widetilde{p}, p^k]$. Az (A.9) átrendezéséből adódik az (A.7), a már igazolt $\widetilde{p} = \underline{p}$ és $p^k = \bar{p}$ összefüggések felhasználásával. $\square$

A.2. A bérjáték egyensúlyának egyértelműsége

A következő állítás megmutatja a bérjáték kevert egyensúlyának módját és választ ad az egyensúly egyértelműségére. Pontosabban, ennek létezését feltételezve, az alábbi állítás fogalmazható meg a kevert egyensúly alakjára.

A.29. állítás. *Tegyük fel, hogy $\rho_A > r_\beta$ és $w_B^* > r_\alpha$. Ha (μ_A, μ_B) a Γ bérjáték kevert egyensúlya, akkor létezik olyan $\bar{w} \in (r_\alpha, r_\beta]$ bér, amelyre $\mu_A([\bar{w}, r_\beta)) = 0$, $\mu_B([\bar{w}, r_\beta)) = 0$,*

$$F_A(w) = \frac{\pi_B^*}{(\rho_B - w) \min\{m_\alpha, m_\beta\}} - \frac{m_\alpha}{\min\{m_\alpha, m_\beta\}} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mu_A(\{r_\beta\}), \quad (\text{A.10})$$

és $F_B(w) =$

$$\frac{\pi_A^*}{(\rho_A - w) \min\{m_\alpha, m_\beta\}} - \frac{\min\{m_\alpha, m_\beta\}}{m_\alpha + m_\beta} \mu_B(\{r_\beta\}) - \max\left\{\frac{m_\alpha - m_\beta}{m_\beta}, 0\right\} \quad (\text{A.11})$$

bármely $w \in (r_\alpha, \bar{w}]$ bérre, ahol π_A^*, π_B^* a (μ_A, μ_B) egyensúlyhoz tartozó profitot jelölik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (μ_A, μ_B) egy kevert egyensúly. Jelölje $\bar{w}_i = \inf\{w \in [0, r_\beta] \mid \mu_i([w, r_\beta)) = 0\}$ azon r_β -nál kisebb bérek szuprémumát, amelyet az $i \in \{A, B\}$ vállalat megadhat. Hasonlóan értelmezzük a $\underline{w}_i = \sup\{w \in [0, r_\beta] \mid \mu_i([0, w)) = 0\}$ bért, mint az $i \in \{A, B\}$ vállalat által megadható egyensúlyi bérek minimumát.

1. lépés. Egyik vállalatnak sem lehet atomja a $w \in [0, r_\beta)$ béren, azaz $\mu_A(\{w\}) = 0$ vagy $\mu_B(\{w\}) = 0$ bármely $w \in [0, r_\beta)$ bérre. Ellenkező esetben mindkét vállalat növelhetné a profitját egyoldalúan a $w + \varepsilon$ bért ajánlva, ahol ε egy elegendően kicsi pozitív érték, ami ellentmond (μ_A, μ_B) egyensúlyi voltának.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy $\underline{w}_A = \underline{w}_B = r_\alpha$. Nyilván $\underline{w}_A < r_\beta$ és $\underline{w}_B < r_\beta$. Tegyük fel, hogy $\underline{w}_A < \underline{w}_B$. Ekkor szükségszerűen $\mu_A((\underline{w}_A, \underline{w}_B)) = 0$ és

$\mu_A(\{\underline{w}_A\}) > 0$. Az 1. lépésből tudjuk, hogy legfeljebb csak az egyik vállalatnak lehet atomja a $\underline{w}_B$ béren. Ha csak az A vállalatnak van atomja $\underline{w}_B$ béren, akkor nagyobb lenne a profitja $w \in (\underline{w}_A, \underline{w}_B)$ intervallumbeli bérek mellett, mint a $\underline{w}_B$ bérnél, tehát ellentmondásra jutottunk. Hasonlóan járhatunk el a B vállalat esetében, ha csak a B vállalatnak volna atomja $\underline{w}_B$ béren. Ezért $\underline{w}_A \geq \underline{w}_B$, és ugyanígy eljárva $\underline{w}_B \geq \underline{w}_A$ is megkapható. Tehát $\underline{w}_A = \underline{w}_B$, és ezért a továbbiakban legyen $\underline{w} = \underline{w}_A = \underline{w}_B$. Ezek után ha $r_\alpha < \underline{w}$, akkor az 1. lépésből és $w_B^* > r_\alpha$ -ból következően legalább egyik vállalat növelhetné a profitját az r_α bérre áttérve, ami ellentmondana a kiinduló feltevésünknek.

3. lépés. Belátjuk, hogy $\bar{w}_A = \bar{w}_B$. Tegyük fel, hogy $\bar{w}_A < \bar{w}_B < r_\beta$. De ekkor ellentmondásra jutnánk (μ_A, μ_B) egyensúlyi voltaival, mivel a B vállalat növelhetné profitját a $\bar{w}_A + \varepsilon$ bérajánlattal, ahol ε egy kellően kicsi pozitív érték. Nyilván hasonló okokból $\bar{w}_B < \bar{w}_A < r_\beta$ sem állhat elő. Ezért $\bar{w}_A = \bar{w}_B$, ha $\bar{w}_A < r_\beta$. Ezek után, ha például $\bar{w}_A < \bar{w}_B = r_\beta$ eset állna fenn, akkor B vállalat jobban járna egy $w_B \in (\bar{w}_A, r_\beta)$ intervallumbeli bér $\mu_B([w_B, r_\beta))$ valószínűséggel történő választásával, ahelyett, hogy ugyanezt a valószínűséget a $[w_B, r_\beta)$ intervallumon terítené szét. Hasonló érveléssel $\bar{w}_B < \bar{w}_A = r_\beta$. Tehát bármely esetben $\bar{w}_A = \bar{w}_B$.

4. lépés. Igazoljuk, hogy az $(r_\alpha, \bar{w})$ intervallumban nem lehet atom. Tegyük fel, hogy az A vállalatnak atomja van a $w_A \in (r_\alpha, \bar{w})$ béren. Ekkor a B vállalat biztosan nem adna meg $(w_A - \varepsilon, w_A)$ intervallumbeli bért, ahol ε egy alkalmasan választott kis pozitív érték, mivel a w_A bér dominálja a $(w_A - \varepsilon, w_A)$ intervallumbeli béreket a B vállalat szemszögéből. Ezért az A vállalat jobban járna enyhén w_A alatti bérajánlatokkal, mert a B vállalatnak nincsen atomja a w_A bérnél az 1. lépés szerint, és így ellentmondásra jutottunk. Nyilván hasonlóan igazolható, hogy a B vállalat egyensúlyi stratégiájának nem lehet atomja az $(r_\alpha, \bar{w})$ intervallumban.

5. lépés. A $\bar{w}$ bérnél nem lehet atom, ha $\bar{w} < r_\beta$. Ez utóbbi állítás a 4. lépés gondolatmenetét követve igazolható, ahol az egyes lépésekben csak w_A cserélendő $\bar{w}$ bérre.

6. lépés. Meghatározzuk az egyensúlyi eloszlás alakját a $(r_\alpha, \bar{w}]$ intervallumon, ha létezik egyáltalán kevert egyensúlyi stratégia. Az előző lépések alapján

$$\begin{aligned} \pi_A^* = & (\rho_A - w) m_\alpha F_B(w) + \\ & (\rho_A - w) m_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mu_B(\{r_\beta\}) + \\ & (\rho_A - w) \max\{m_\alpha - m_\beta, 0\} (1 - F_B(w) - \mu_B(\{r_\beta\})) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

és

$$\pi_B^* = (\rho_B - w) \min\{m_\alpha, m_\beta\} F_A(w) + (\rho_B - w) m_\alpha \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mu_A(\{r_\beta\}) \quad (\text{A.13})$$

bármely $w \in (r_\alpha, \bar{w}]$ bérre. Az (A.12) és az (A.13) egyenletek átrendezésével megkaphatók az (A.10) és az (A.11) egyenletek. $\square$

Az A.29. állítás négyre redukálja a lehetséges atomok számát. Ezért összesen 16 eset lehetséges. Mivel mindkét vállalatnak az 1. lépés alapján nem lehet egyszerre atomja r_α , ezért a lehetséges esetek száma 12-re csökken. Ezen esetek alapján csak a 7. fejezetben közölt egyensúlyok adódnak, ugyanis az egyensúlyt nem adó esetekben negatív atomokat vagy egymásnak ellentmondó egyenleteket kapunk.

B. Függelék

Feltevések jegyzéke

2.1. feltevés. P szigorúan monoton csökkenő a $[0, a]$ intervallumon, azonosan nulla az (a, ∞) intervallumon, kétszer differenciálható a $(0, a)$ intervallumon és konkáv a $[0, a]$ intervallumon.

2.2. feltevés. A $c_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) költségfüggvények kétszer differenciálhatók, szigorúan monoton növekedők és konvexek a $[0, a]$ intervallumon.

2.3. feltevés. A $c_i^n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) költségfüggvények kétszer differenciálhatók, nincsenek fixköltségek, szigorúan monoton növekedők és szigorúan konvexek. Továbbá $(c_i^n)'(0) = \lim_{q \rightarrow 0^+} (c_i^n)'(q) = mc_i^n(0) = 0$ és $\lim_{q \rightarrow \infty} mc_i^n(q) = \infty$ bármely $n \in \mathbb{N}$ -re és bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ vállalatra.

2.4. feltevés. Az $1, \dots, n$ vállalatok összkínálata az $(O_q^n)_{n=1}^\infty$ oligopol piacok sorozatának minden egyes piacán azonos.

2.5. feltevés. Létezik olyan c pozitív valós érték, hogy

$$s_i^n(p) < \frac{c}{n} S_c(p)$$

teljesül bármely $p \in (0, b]$ árra, bármely $n \in \mathbb{N}$ pozitív egészre és bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ vállalatra.

2.6. feltevés. Metssze a $D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ keresleti görbe a vízszintes tengelyt a mennyiségnél és a függőleges tengelyt b áron. Legyen D szigorúan monoton

csökkenő, folytonos a $[0, b]$ intervallumon, kétszer folytonosan differenciálható a $(0, b)$ intervallumon. Továbbá legyen D jobbról folytonos 0-ban, balról folytonos b -ben és $D(p) = 0$ bármely $p \geq b$ -re.

2.7. feltevés. A monopolista bevételi függvénye $pD'(p) + D(p)$ szigorúan monoton csökkenő $[0, b]$ -n.

2.8. feltevés. A piacon versenyző n oligopolista egységköltsége nulla a k_i pozitív kapacitáskorlátig ($i = 1, \dots, n$). Mindegyikük megadhatja a p_i árát és a q_i mennyiségét szekvenciálisan vagy szimultán.

2.9. feltevés. Mindegyik $i = 1, \dots, n$ vállalat $c_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvénye kétszer folytonosan differenciálható, szigorúan növekedő és szigorúan konvex.

2.10. feltevés. Legyen a D keresleti függvény konkáv a $[0, b]$ intervallumon.

2.11. feltevés. Az n oligopolista kapacitáskorlátja azonos, azaz $k = k_i > 0$ bármely $i = 1, \dots, n$ -re.

2.12. feltevés. $p_1^m > p^c$.

3.1. feltevés. $n = 3$ és $k_1 > k_2 = k_3$.

3.2. feltevés. A vállalatoknak nincsenek fixköltségei, azaz $c_1(0) = c_2(0) = 0$.

3.3. feltevés. $s_1(p^c) > 0$ és $s_2(p^c) > 0$.

3.4. feltevés. Teljesüljön $0 \leq mc_i(0) = \lim_{p \rightarrow 0+0} mc_i(p) < D(0)$ minden $i \in \{1, 2\}$ -re.

3.5. feltevés. Tegyük fel, hogy $D(p) < s_1(p)$ teljesül bármely $p \geq p_1^L$ árra.

4.1. feltevés. $s_i(p^c) > 0$ bármely $i \in N$ vállalatra.

4.2. feltevés. Minden $i \in N_c$ -re és minden $p \in [p^L, b]$ -re

$$D(p) - \sum_{j=2}^n s_j(p) + s_i(b) < s_1(p).$$

4.3. feltevés. Feltesszük, hogy a két nagyvállalat az első időszakban lép egyszerre, míg az összes kisvállalat a második időszakban.

4.4. feltevés. Bármely $i \in N_c$ vállalatra és bármely $p \in [p^L, b]$ árra

$$D(p) - \sum_{j=3}^n s_j(p) + s_i(b) < s_1(p) + s_2(p),$$

ahol $j \neq i$ és $j \in \{1, 2\}$.

4.5. feltevés. A piacon nincsenek fixköltségek és a nulla kibocsátás melletti határköltségek nullák.

4.6. feltevés. Az 1 vállalat az első időszakban lép és a többi $2, \dots, n$ vállalat szimultán lép a második időszakban. Továbbá az 1 vállalat kompetitív kínálata és a többi $n - 1$ vállalat által alkotott kompetitív szegély kínálata azonos az O sorozat minden egyes oligopol piacán.

5.1. feltevés. Az 1 és 2 vállalat $c \in (0, b)$ egységköltsége azonos az egységes pozitív k kapacitáskorlátig. Mindketten ár- ($p_1, p_2 \in [0, b]$) és mennyiség meghatározók ($q_1, q_2 \in [0, k]$).

6.1. feltevés. $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n > 0$.

6.2. feltevés. Feltesszük, hogy $K - k_n < a$.

Tárgymutató

A

a , 25

α -bikonkavitás, 13

arányos adagolási szabály, 21, 24

B

b , 25

Bertrand paradoxon, 18

C

c_i , 25

D

$\mathcal{D}$, 20

D_i^r , 44

döntési elkötelezettségű játék, 40

E

Edgeworth, 19

elégéses kapacitás, 90

elfajult keresleti görbe, 23

F

Forchheimer, 58

H

hatékony adagolási szabály, 21, 24

K

K , 85

k_i , 25

készletre történő termelés, 25

kombinált adagolási szabály, 20, 24

kompetitív kínálat, 14, 25

kvázikompetitivitás, 13

L

L_1 , 66

L_2 , 66

L_i , 44

M

MC_c , 15, 69

megfigyelhető késleltetésű játék, 40

N n , 25 N , 58 N_c , 59, 65**O** O , 69 O^n , 70 O_q , 69 O_q^n , 70**P** p^c , 16, 25 p^H , 61, 63, 67, 68 p_i , 25 p_i^d , 30 p_i^m , 29, 85, 86 p_i^u , 37 P_i^* , 44 p^k , 134 p^L , 66 p_i^L , 44 p^M , 76 p^u , 66 $\bar{p}$, 61, 77 $\tilde{p}$, 45 π_i , 26 π_i^r , 66 π_i^n , 70 π_i^* , 44 $\bar{\pi}$, 77 $\bar{\pi}_i$, 29

piactisztító ár, 16, 25

Q q^c , 16 q_i , 25 q_i^m , 85 Q_i^r , 65, 66**R**

rendelésre történő termelés, 26

S S_c , 15, 59, 65 S_c^n , 14 s_i , 25 s_i^n , 14 $\widehat{S}$, 59

szűkös kapacitás, 90

Irodalomjegyzék

- ALLEN, B., ÉS M. HELLWIG (1993): „Bertrand-Edgeworth Duopoly with Proportional Demand,” *International Economic Review*, 34, 39–60.
- AMIR, R. (1996): „Cournot Oligopoly and the Theory of Supermodular Games,” *Games and Economic Behavior*, 15, 132–148.
- AMIR, R., ÉS V. LAMBSON (2000): „On the Effects of Entry in Cournot Markets,” *Review of Economic Studies*, 67, 235–254.
- ANDERSON, S. P., ÉS M. ENGERS (1992): „Stackelberg versus Cournot oligopoly equilibrium,” *International Journal of Industrial Organization*, 10, 127–135.
- BAGH, A. (2010): „Variational Convergence: Approximation and Existence of Equilibria in Discontinuous Games,” *Journal of Economic Theory*, 145, 1244–1268.
- BAIN, J. (1960): „Price Leaders, Barometers, and Kinks,” *Journal of Business*, 33, 193–203.
- BAMON, R., ÉS J. FRAYSEE (1985): „Existence of Cournot equilibrium in large markets,” *Econometrica*, 53, 587–597.
- BAYE, M. R., ÉS D. KOVENOCK (2008): „Bertrand competition,” in *The New Palgrave Dictionary of Economics*, szerk. S. N. Durlauf, és L. E. Blume. Palgrave Macmillan, második kiadás.

- BAYE, M. R., ÉS J. MORGAN (1999): „A Folk Theorem for One-shot Bertrand Games,” *Economics Letters*, 65, 59–65.
- BECKMANN, M. (1965): „Bertrand-Edgeworth Duopoly Revisited,” in *Operations Research-Verfahren, Vol. III*, szerk. R. Henn, 55–68. Hain, Meisenheim.
- BERTRAND, J. (1883): „Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses,” *Journal de Savants*, 67, 499–508.
- BOMPARD, E., Y. MA, ÉS E. RAGAZZI (2005): „Micro-economic Analysis of the Physical Constrained Markets: Game Theory Application to Competitive Electricity Markets,” *European Journal of Physics B*, 50, 153–160.
- BOYER, M., ÉS M. MOREAUX (1987): „Being a Leader or a Follower: Reflections on the Distribution of Roles in Duopoly,” *International Journal of Industrial Organization*, 5, 175–192.
- CAMPOS, J., ÉS A. PADILLA (1996): „On the limiting behavior of asymmetric Cournot oligopoly: a reconsideration,” *CEMFI Working Paper 9607*.
- CASABURI, L., ÉS G. MINERVA (2011): „Production in advance versus production to order: The role of downstream spatial clustering and product differentiation,” *Journal of Urban Economics*, 70, 32–46.
- CHEN, S., ÉS X. YANG (2010): „Duopoly Game with Endogenous Move-timing and Endogenous Strategic Variables,” *2010 International Conference on E-Business and E-Government*, 3912–3915.
- CHEVIAKOV, A., ÉS J. HARTWICK (2005): „Beckmann’s Bertrand–Edgeworth duopoly example revisited,” *International Game Theory Review*, 7, 1–12.
- DASGUPTA, P., ÉS E. MASKIN (1986a): „The Existence of Equilibria in Discontinuous Games, I: Theory,” *Review of Economic Studies*, 53, 1–26.

- (1986b): „The Existence of Equilibria in Discontinuous Games II: Applications,” *Review of Economic Studies*, 53, 27–41.
- DASTIDAR, K. G. (1995): „On the Existence of Pure Strategy Bertrand Equilibrium,” *Economic Theory*, 5, 19–32.
- (1996): „Quantity versus Price in a Homogeneous Product Duopoly,” *Bulletin of Economic Research*, 48, 83–91.
- DAVIDSON, C., ÉS R. DENECKERE (1986): „Long-run Competition in Capacity, Short-run Competition in Price and the Cournot Model,” *Rand Journal of Economics*, 17, 404–415.
- DAVIS, D. (2010): „Advance Production, Inventories and Market Power: An Experimental Investigation,” *VCU School of Business, Department of Economics, Working Papers 1001*.
- DE FRANCESCO, M., ÉS N. SALVADORI (2010): „Bertrand-Edgeworth Games under Oligopoly with a Complete Characterization for the Triopoly,” *Munich Personal RePEc Archive, MPRA Paper No. 24087*.
- DEBREU, G. (1952): „A Social Equilibrium Existence Theorem,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38, 886–893.
- DENECKERE, R., ÉS D. KOVENOCK (1988): „Price Leadership,” *Northwestern University CMSEMS Discussion Paper No. 773*.
- (1992): „Price Leadership,” *Review of Economic Studies*, 59, 143–162.
- DOWRICK, S. (1986): „von Stackelberg and Cournot Duopoly: Choosing Roles,” *Rand Journal of Economics*, 17, 251–260.
- EDGEWORTH, F. (1925): „The pure theory of monopoly,” *Papers Relating to Political Economy*, 1, 111–142.
- EWERHART, C. (2011): „Cournot Oligopoly and Concavo-Concave Demand,” *University of Zürich, Department of Economics, Working Paper No. 16*.

- FORGÓ, F. (1996): „Cournot-Nash equilibrium in concave oligopoly games,” *Pure Mathematics and Applications*, 6, 161–169.
- FRANK, C. (1965): „Entry in a Cournot Market,” *Review of Economic Studies*, 329, 245–250.
- FRIEDMAN, J. (1988): „On the Strategic Importance of Prices versus Quantities,” *RAND Journal of Economics*, 19, 607–622.
- FURTH, D., ÉS K. DASTIDAR (2005): „Endogenous price leadership in a duopoly: Equal products, unequal technology,” *International Journal of Economic Theory*, 1, 189–210.
- GAL-OR, E. (1985): „First Mover and Second Mover Advantages,” *International Economic Review*, 26, 649–653.
- GANGOPADHYAY, S. (1993): „Simultaneous vs Sequential Move Price Games: A Comparison of Equilibrium Payoffs,” *Indian Statistical Institute Discussion Paper No. 93-01*.
- GISSER, M. (1986): „Price Leadership and Welfare Losses in U.S. Manufacturing,” *American Economic Review*, 76, 756–767.
- GLICKSBERG, I. (1952): „A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, 38, 170–174.
- GOTTFRIES, N., ÉS B. MCCORMICK (1995): „Discrimination and open unemployment in a segmented labour market,” *European Economic Behavior*, 39, 1–15.
- HAMILTON, J., ÉS S. SLUTSKY (1990): „Endogenous Timing in Duopoly Games: Stackelberg or Cournot Equilibria,” *Games and Economic Behavior*, 2, 29–46.

- HAMILTON, J., J.-F. THISSE, ÉS Y. ZENOU (2000): „Wage Competition with Heterogeneous Workers and Firms,” *Journal of Labour Economics*, 18, 453–472.
- HARRIS, J., ÉS M. TODARO (1970): „Migration, Unemployment and Development: A Two-Sector Analysis,” *American Economic Review*, 60, 125–132.
- HIRATA, D. (2009): „Asymmetric Bertrand-Edgeworth Oligopoly and Mergers,” *B.E. Journal of Theoretical Economics*, 9, "Article 22".
- HIRATA, D., ÉS T. MATSUMURA (2011): „Price leadership in a homogeneous product market,” *Journal of Economics (Zeitschrift für Nationalökonomie)*, megjelenés alatt (<http://dx.doi.org/10.1007/s00712-011-0212-1>).
- HOERNIG, S. H. (2007): „Bertrand Games and Sharing Rules,” *Economic Theory*, 31, 573–585.
- JULIEN, L. (2011): „A note on Stackelberg competition,” *Journal of Economics (Zeitschrift für Nationalökonomie)*, 103, 171–187.
- KAPLAN, T. R., ÉS D. WETTSTEIN (2000): „The Possibility of Mixed-strategy Equilibria with Constant-returns-to-scale Technology under Bertrand Competition,” *Spanish Economic Review*, 2, 65–71.
- KLEMPERER, P., ÉS M. MEYER (1986): „Price Competition vs. Quantity Competition: the Role of Uncertainty,” *RAND Journal of Economics*, 17, 546–554.
- KREPS, D. M., ÉS J. A. SCHEINKMAN (1983): „Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes,” *Bell Journal of Economics*, 14, 326–337.
- LANZILLOTTI, R. (1957): „Competitive Price Leadership — A Critique of Price Leadership Models,” *Review of Economics and Statistics*, 39, 55–64.

- LEVITAN, R., ÉS M. SHUBIK (1972): „Price Duopoly and Capacity Constraints,” *International Economic Review*, 13, 111–122.
- (1978): „Duopoly with Price and Quantity as Strategic Variables,” *International Journal of Game Theory*, 7, 1–11.
- MA, C.-T. A., ÉS A. WEISS (1993): „A signaling theory of unemployment,” *European Economic Review*, 37, 135–157.
- MARKHAM, J. (1951): „The Nature and Significance of Price Leadership,” *American Economic Review*, 41, 891–905.
- MASKIN, E. (1986): „The Existence of Equilibrium with Price-setting Firms,” *American Economic Review*, 76(2), 382–386.
- MATSUMURA, T. (1999): „Quantity-setting Oligopoly with Endogenous Sequencing,” *International Journal of Industrial Organization*, 17, 289–296.
- (2002): „Market Instability in a Stackelberg Duopoly,” *Journal of Economics (Zeitschrift für Nationalökonomie)*, 75, 199–210.
- MESTELMAN, S., D. WELLAND, ÉS D. WELLAND (1987): „Advance Production in Posted Offer Markets,” *Journal of Economic Behavior and Organization*, 8, 249–264.
- NOVSHEK, W. (1985a): „On the Existence of Cournot Equilibrium,” *Review of Economic Studies*, 52, 85–98.
- (1985b): „Perfectly Competitive Markets as the Limits of Cournot Markets,” *Journal of Economic Theory*, 35, 72–82.
- OKUGUCHI, K. (1973): „Quasi-Competitiveness and Cournot Oligopoly,” *Review of Economic Studies*, 40, 145–148.
- ONO, Y. (1982): „Price Leadership: A Theoretical Analysis,” *Economica*, 49, 11–20.

- OSBORNE, M. J., ÉS C. PITCHIK (1986): „Price Competition in a Capacity-Constrained Duopoly,” *Journal of Economic Theory*, 38, 238–260.
- PHILLIPS, O., D. MENKHAUS, ÉS J. KROGMEIER (2001): „Production-to-order or production-to-stock: the Endogenous Choice of Institution in Experimental Auction Markets,” *Journal of Economic Behavior and Organization*, 44, 333–345.
- QIN, C.-Z., ÉS C. STUART (1997): „Bertrand versus Cournot Revisited,” *Economic Theory*, 10, 497–507.
- REBITZER, J., ÉS L. TAYLOR (1995): „The consequences of minimum wage laws: Some new theoretical ideas,” *Journal of Public Economics*, 56, 245–255.
- REISINGER, M., ÉS L. RESSNER (2009): „The Choice of Prices versus Quantities under Uncertainty,” *Journal of Economics & Management Strategy*, 18, 1155–1177.
- RENY, P. (1999): „On the Existence of Pure and Mixed Strategy Nash Equilibria in Discontinuous Games,” *Econometrica*, 67, 1029–1056.
- RUFFIN, R. (1971): „Cournot Oligopoly and Competitive Behaviour,” *Review of Economic Studies*, 38, 493–502.
- SADANAND, A., ÉS V. SADANAND (1996): „Firm Scale and the Endogenous Timing of Entry: a Choice between Commitment and Flexibility,” *Journal of Economic Theory*, 18, 516–530.
- SALOP, S. (1979): „Monopolistic Competition with Outside Goods,” *Bell Journal of Economics*, 10, 141–156.
- SAPORITI, A., ÉS G. COLOMA (2010): „Bertrand Competition in Markets with Fixed Costs,” *B.E. Journal of Theoretical Economics*, 10(1), Article 27.
- SATTINGER, M. (1993): „Assignment Models of the Distribution of Earnings,” *Journal of Economic Literature*, 31, 831–880.

- SCHERER, F., ÉS D. ROSS (1990): *Industrial Market Structure and Economic Performance, 3rd edition*. Houghton Mifflin, Boston.
- SHAPIRO, C., ÉS J. STIGLITZ (1984): „Equilibrium Unemployment as a Worker Discipline Device,” *American Economic Review*, 74, 433–444.
- SHERALI, H. (1984): „A multiple leader Stackelberg model and analysis,” *Operations Research*, 32, 390–404.
- SHUBIK, M. (1955): „A Comparison of Treatments of a Duopoly Problem, Part II,” *Econometrica*, 23, 417–431.
- SIMON, L. (1987): „Games with Discontinuous Payoffs,” *Review of Economic Studies*, 54, 569–597.
- SINGH, N., ÉS X. VIVES (1984): „Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly,” *RAND Journal of Economics*, 15, 546–554.
- STIGLER, G. (1947): „The Kinky Demand Curve and Rigid Prices,” *Journal of Political Economy*, 55, 432–449.
- SZIDAROVSKY, F., ÉS S. MOLNÁR (1992): „Bertrand, Cournot and Mixed Oligopolies,” *Keio Economic Studies*, 29, 1–7.
- SZIDAROVSKY, F., ÉS S. YAKOWITZ (1977): „A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot equilibrium,” *International Economic Review*, 18, 787–789.
- TANAKA, Y. (2001a): „Profitability of Price and Quantity Strategies in an Oligopoly,” *Journal of Mathematical Economics*, 35, 409–418.
- (2001b): „Profitability of Price and Quantity Strategies in a Duopoly with Vertical Product Differentiation,” *Economic Theory*, 17, 693–700.
- TASNÁDI, A. (1998a): „Which Rationing Rule Does a Single Consumer Follow?,” in *The future in the present: – Changing society, new scientific issues*,

- szerk. A. Blahó, 187–200. Budapest University of Economic Sciences, Budapest.
- (1998b): „A véletlen adagolási szabály alkalmazhatóságának piaci feltételei,” *Sigma*, 29, 141–153.
- (1999a): „Existence of Pure Strategy Nash Equilibrium in Bertrand-Edgeworth Oligopolies,” *Economics Letters*, 63, 201–206.
- (1999b): „A Two-stage Bertrand-Edgeworth Game,” *Economics Letters*, 65, 353–358.
- (1999c): *Adagolási szabályok és Bertrand-Edgeworth oligopóliumok*. Ph.D. értekezés, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem, Budapest.
- (2000): „A Price-setting Game with a Nonatomic Fringe,” *Economics Letters*, 69, 63–69.
- (2003): „Endogenous Timing of Moves in an Asymmetric Price-setting Duopoly,” *Portuguese Economic Journal*, 2, 23–35.
- (2004a): „On Forchheimer’s Model of Dominant Firm Price Leadership,” *Economics Letters*, 84, 275–279.
- (2004b): „Production in Advance versus Production to Order,” *Journal of Economic Behavior and Organization*, 54, 191–204.
- (2005): „A way of explaining unemployment through a wage-setting game,” *Labour Economics*, 12, 191–203.
- (2006): „Price vs. Quantity in Oligopoly Games,” *International Journal of Industrial Organization*, 24, 541–554.
- (2010a): „Quantity-setting Games with a Dominant Firm,” *Journal of Economics (Zeitschrift für Nationalökonomie)*, 99, 251–266.

- (2010b): *Timing of Decisions in Oligopoly Games*. VDM Publishing House, Saarbrücken, Germany.
- THISSE, J.-F., ÉS Y. ZENOU (2000): „Skill mismatch and unemployment,” *Economics Letters*, 69, 415–420.
- TIROLE, J. (1988): *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press, Cambridge MA.
- VAN DAMME, E., ÉS S. HURKENS (1999): „Endogenous Stackelberg Leadership,” *Games and Economic Behavior*, 28, 105–129.
- (2004): „Endogenous Price Leadership,” *Games and Economic Behavior*, 47, 404–420.
- VAN DEN BERG, A., ÉS I. BOS (2011): „Collusion in a Price-Quantity Oligopoly,” *Maastricht University, METEOR Working Paper RM/11/039*.
- VIVES, X. (1986): „Rationing Rules and Bertrand-Edgeworth Equilibria in Large Markets,” *Economics Letters*, 21, 113–116.
- (1999): *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools*. MIT Press, Cambridge MA.
- WAUTHY, X., ÉS Y. ZENOU (2002): „How Does Imperfect Competition in the Labour Market Affect Unemployment Policies?,” *Journal of Public Economic Theory*, 4, 417–436.
- WEISS, A. (1980): „Job Queues and Layoffs in Labor Markets with Flexible Wages,” *Journal of Political Economy*, 88, 526–538.
- WOLFSTETTER, E. (1999): *Topics in Microeconomics*. Cambridge University Press, Cambridge UK.
- WU, S., ÉS J. MUSACCHIO (2009): „N-Player Cournot and Price-Quantity Function Mixed Competition,” *Proceedings of the 2009 International Conference on Game Theory for Networks, GameNets '09*, 88–97.

ZENOU, Y. (2009): *Urban Labor Economics*. Cambridge University Press,
Cambridge MA.