

dc_344_11

Osztályszámproblémák és automorf formák

Biró András

Doktori értekezés tézisei

Budapest, 2012

dc_344_11

1. Bevezetés

A disszertációmban kvadratikus számtestek osztályszámproblémájával és automorf formákkal kapcsolatos összegzési formulákkal foglalkozom. Mindkét témakör a számelmélet fontos területe.

1.1. A kvadratikus számtestek osztályszámával már Gauss is foglalkozott (igaz, a maitól eltérő megfogalmazásban). Legyen $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, ahol $\mathbf{Q}$ a racionális test, és d egy fundamentális diszkrimináns. Imaginárius kvadratikus számtest esetén (azaz ha $d < 0$) Gauss azt sejtette, hogy $(h(d)$ -vel jelölve a K osztályszámát) $h(d) \rightarrow \infty$, amint $|d| \rightarrow \infty$. Ezt először Heilbronn bizonyította be (l. [Hei]). De a megoldása ineffektív volt: az összes 1 osztályszámú imaginárius kvadratikus számtest meghatározása hosszú ideig megoldatlan probléma maradt. Ezt először Heegner oldotta meg ([Hee]), de az ő bizonyítását abban az időben nem tartották helyesnek, és később tőle és egymástól is függetlenül megoldotta a problémát Baker ([Ba]) és Stark ([St]). Baker bizonyítása azonnal következett az algebrai számok logaritmusáról szóló híres tételéből, és Gelfond és Linnyik korábbi munkájából ([G-L]).

A helyzet teljesen más általános valós kvadratikus számtestekre, azaz a $d > 0$ esetben: Gauss erre az esetre azt sejtette, hogy végtelen sok 1 osztályszámú test van. Ez a probléma máig megoldatlan.

Azonban valós kvadratikus testek bizonyos speciális családjaira (ahol a fundamentális egység nagyon kicsi), például ha $d = p^2 + 4$ egy p egészszel, a helyzet analóg az imaginárius esettel: nem nehéz bebizonyítani, hogy egy ilyen családban csak véges sok 1 osztályszámú test van, de ezen testek effektív meghatározása sokáig nyitott probléma volt. A disszertáció 2. fejezete az ún. Yokoi-sejtés megoldásáról szól: ez a sejtés azt mondta ki, hogy $h(p^2 + 4) > 1$, ha $p > 17$.

1.2. Az analitikus számelméletben használt két legismertebb összegzési formula a Poisson-formula és a Voronoi-formula. Mi olyan összegzési formulákat fogunk vizsgálni, amelyekben automorf formákkal kapcsolatos súlyok szerepelnek.

Az automorf formák központi szerepet játszanak a modern számelméletben, az algebrai és az analitikus számelméletben is fontosak. Emellett a matematika számos egyéb ágával is kapcsolatban állnak, például a reprezentációelmélettel, ergodelmélettel, kombinatorikával, algebrai geometriával.

Az automorf formák analitikus elméletében több összegzési formula is jelentős, elég megemlíteni a klasszikus Voronoi-formula általánosításait, a Selberg-nyomformulát vagy a Kuznyecov-formulát.

A disszertáció 3. fejezetében egy olyan, a klasszikus Poisson-formulához nagyon hasonló összegzési formulát bizonyítok, amelyben automorf formák ún. hármasszorzatai szerepelnek súlyokként. Hármasszorzaton (nem precízen fogalmazva) három automorf forma szorzatának egy fundamentális tartományon vett integrálját értjük. Az ilyen hármasszorzatokat többféle szempontból is intenzíven vizsgálja a szakirodalom, példaként említjük a híres Quantum Unique Ergodicity sejtés néhány évvel ezelőtti megoldását (l. a [Li] és [So] cikkeket a nemholomorf,

a [H-S] cikket pedig a holomorf esetre vonatkozóan) és a reprezentációelméleti jellegű [B-R] cikket, amely hármasszorzatokra ad nemtriviális felső becslést.

1.3. Mindkét téma iránti érdeklődésem a (lényegében a [Bi1] és [Bi2] cikkek anyagát tartalmazó) Ph.D. disszertációból fakad.

A kapcsolat közvetlenebb az automorf súlyokat tartalmazó összegzési formula esetében, hiszen a Ph.D. disszertációm automorf formákról szólt, sőt, a [Bi1] cikk egy összegzési formula bizonyítását tartalmazta.

De az 1.1 alpontban említett osztályszámproblémáknak is van kapcsolata automorf formákkal, a Yokoi-sejtésre adott bizonyításom első változata használt is automorf formákat: az egyik nagyon fontos lemma (pontosan kimondva l. az 5. pontban) bizonyításához Eisenstein-sorok bizonyos zárt geodetikusokon vett integráljait használtam. Amikor az első előadásomat tartottam a Yokoi-sejtésről 2001 szeptemberében Oberwolfachban, S. Egami felhívta a figyelmemet Shintani [Sh] cikkére, amelynek a segítségével le tudtam egyszerűsíteni a szóbanforgó lemma bizonyítását, és az új változat már nem használt automorf formákat.

1.4. A 2. és 3. pontban a disszertáció fő eredményeit ismertetjük. Ezen eredmények bizonyítását az 5. és 6. pontban vázoljuk. A 4. pontban kimondunk egy szintén a disszertációban bizonyított tételt, amely az egyik fő eredmény (a 2. Tétel) bizonyításához fontos, a 6. pontban hivatkozunk is rá.

2. Osztályszámproblémák valós kvadratikus számtestekre

Ma már látjuk, hogy az az 1.1 alpontban már említett állítás, hogy csak véges sok 1 osztályszámú imaginárius kvadratikus számtest létezik, azonnal következik a Dirichlet-féle osztályszámformulából és a Siegel-tételből. Mivel a valós eset megértéséhez is szükséges, először is kimondjuk a Dirichlet-formulát (l. [W], 3. fejezet és 37. oldal).

Legyen $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, ahol d (pozitív vagy negatív) fundamentális diszkrimináns, legyen $h(d)$ a K osztályszáma, és legyen χ_d a K -hoz tartozó primitív karakter. Akkor a $d < 0$ esetben

$$h(d) = \frac{w |d|^{1/2}}{2\pi} L(1, \chi_d), \quad (2.1)$$

ahol w a K -beli egységgyökök száma; a $d > 0$ esetben

$$h(d) \log \epsilon_d = d^{1/2} L(1, \chi_d), \quad (2.2)$$

ahol $\epsilon_d > 1$ a K -beli fundamentális egység. A Dirichlet L -függvények 1-beli értékeire vonatkozó Siegel-tétel szerint

$$L(1, \chi_d) \gg_{\epsilon} |d|^{-\epsilon}$$

(ez ineffektív becslés), tehát (2.1)-ből következik, hogy csak véges sok 1 osztályszámú test van az imaginárius esetben. Viszont a $d > 0$ esetben nem tudjuk

szétválasztani az osztályszámot és a fundamentális egységet. De ha feltesszük, hogy a fundamentális egység kicsi, például

$$\log d \ll \log \epsilon_d \ll \log d, \quad (2.3)$$

akkor (2.2)-ből adódik, hogy $h(d) > 1$ elég nagy d -re. Mivel a Siegel-tételt használjuk, a kapott becslés ineffektív. Tehát így nem tudjuk meghatározni az összes 1 osztályszámú testet egy olyan családban, amelyre (2.3) érvényes, így például a $d = p^2 + 4$ Yokoi-diszkriminánsok családjában sem.

A disszertáció 2. fejezetében bebizonyítjuk az 1.1 alpontban már említett Yokoi-sejtést (amelyet H. Yokoi az [Y] cikkben fogalmazott meg). Pontosabban a következőt látjuk be.

1. TÉTEL ([Bi3]). *Ha d négyzetmentes, $h(d) = 1$ és $d = p^2 + 4$ valamely p egészszel, akkor d a következő modulusok legalább egyikére vonatkozóan négyzet: $q = 5, 7, 41, 61, 1861$ (azaz a (d/q) Legendre-szimbólum 0-val vagy 1-gyel egyenlő az előbb felsorolt q értékek közül legalább az egyikre).*

Ezt azzal a jólismert állítással kombinálva (nevezzük ezt B Állításnak), hogy $h(d) = 1$ esetén d kvadratikus nemmaradék bármely $2 < r < p$ prím szerint, megkapjuk a disszertáció 2. fejezetének a fő eredményét:

1. KÖVETKEZMÉNY ([Bi3]). *Ha d négyzetmentes, és $d = p^2 + 4$ valamely $p > 1861$ egészszel, akkor $h(d) > 1$.*

Könnyű belátni a fent említett B Állítás alapján, hogy $h(d) > 1$, ha $17 < p \leq 1861$, így a Yokoi-sejtés teljes megoldása adódik. Megjegyezzük, hogy 6 kivételes testre teljesül $h(d) = 1$, ezek a $p = 1, 3, 5, 7, 13, 17$ esetek.

Apró módosításokkal ugyanaz a bizonyítás működött (l. [Bi4]) egy hasonló osztályszámproblémára, a [C-F] cikkben megfogalmazott Chowla-sejtésre is. A Yokoi-sejtés bizonyításának a módszerét később több hasonló esetre is alkalmazták, l. például a [B-K-L] és [Le] cikkeket.

Azonban úgy tűnik, hogy a Yokoi-esetben a jelenlegi bizonyítás csak az 1 osztályszámú testek meghatározására alkalmas, már a 2 osztályszámúak meghatározása is nyitott probléma. Természetesen végtelenhez tartó effektív alsó becslés sem ismert $h(p^2 + 4)$ -re, nem úgy, mint az imaginárius esetben: az analóg állítást ott Goldfeld, Gross és Zagier bizonyította, l. a [Go] és [G-Z] cikkeket. Korábban említettük, hogy a Yokoi-esetben a fundamentális egység kicsi (tehát a Siegel-tétel alkalmazható), de a logaritmus $\log p$ nagyságrendű, ami elég nagy ahhoz, hogy gondot okozzon, ha a Goldfeld-Gross-Zagier módszert akarnánk alkalmazni. A bizonyításom kiindulópontja Beck József [Be] cikkének egy ötlete. Ebben a cikkében Beck effektív felső becslést adott az 1 osztályszámú esetben p -re, feltéve, hogy p bizonyos maradékosztályokba tartozik. Elemi számelméletet kombinált a K -hoz és bizonyos kvadratikus Dirichlet-karakterekhez tartozó zetafüggvények speciális értékeire vonatkozó formulákkal. Én nemkvadratikus Dirichlet-karaktereket használok, ez elemi algebrai számelméletre vezet. Új elemi eszközöket is alkalmazva sikerült minden maradékosztályt kizárnom egy adott konkrét modulus szerint, és ezzel a teljes sejtést bebizonyítani.

Eddig a bizonyításig csak kvadratikus karaktereket használtak a bizonyításban paraméterként. Úgy értem, hogy Beck idézett cikkében is, és Gelfond-Linnyik-Baker imaginárius esetre vonatkozó klasszikus munkájában is szerepelnek egyéb Dirichlet-karakterek is azon a kvadratikus Dirichlet-karakteren kívül, amelyik az adott K kvadratikus számtesthez tartozik. Ezen egyéb Dirichlet-karaktereket tekinthetjük paramétereknek, hiszen ezeket a bizonyítás szempontjából legkedvezőbb módon igyekszünk megválasztani. A Yokoi-sejtésre a disszertációban (és eredetileg [Bi3]-ban) adott bizonyításban ezek a paraméter karakterek nem kvadratikusak. Ez számos új lehetőséget nyújt p -re vonatkozó maradékosztályok kizárására. Ilyen nemkvadratikus karakterek alkalmazását egy [Bi3]-ban bizonyított lemma tette lehetővé (l. alább az 1. Lemmát az 5. pontban), amely jól használható módon fejezi ki bizonyos zetafüggvények speciális értékeit.

Megemlítjük még, hogy (ahogy ezt [Bi5]-ben és a disszertációban is bővebben kifejtjük) a Yokoi-sejtés bizonyítása az imaginárius osztályszámprobléma Gelfond-Linnyik-Baker-féle megoldása analogonjának tekinthető, még akkor is, ha első látásra attól nagyon különbözőnek tűnik (hiszen Baker algebrai számok logaritmusáról szóló tétele helyett itt elemi algebrai számelméletet alkalmazunk).

3. Egy Poisson-típusú formula automorf súlyokkal

3.1. Ebben a pontban a disszertáció 3. fejezetének az eredményéről lesz szó. A formula kimondásához először be kell vezetnünk néhány, főleg automorf formákkal kapcsolatos jelölést. Ezután, de még a formula pontos kimondása előtt a klasszikus Poisson-formula olyan interpretációját fogjuk adni, amelyből látható lesz az új formula hasonlósága a Poisson-formulához.

3.2. Jelölések. Jelölje H a nyílt komplex felső félsíkot. Legyen

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) : c \equiv 0 \pmod{4} \right\}.$$

Legyen D_4 a $\Gamma_0(4)$ egy fundamentális tartománya a H -n, és

$$d\mu_z = \frac{dx dy}{y^2}$$

(ez az $SL(2, \mathbf{R})$ -invariáns mérték a H -n). Vezessük be az

$$(f_1, f_2) = \int_{D_4} f_1(z) \overline{f_2(z)} d\mu_z$$

jelölést. Az l súlyú hiperbolikus Laplace-operátor a következő:

$$\Delta_l := y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - i l y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Egy $z \neq 0$ komplex szám argumentuma essen $(-\pi, \pi]$ -be, és legyen $\log z = \log |z| + i \arg z$, ahol $\log |z|$ valós. Definiáljuk z^s -et bármely $s \in \mathbf{C}$ -re így: $z^s = e^{s \log z}$. Szokás szerint legyen $e(x) = e^{2\pi i x}$ és $(w)_n = \frac{\Gamma(w+n)}{\Gamma(w)}$. Használni fogjuk a $\Gamma(X \pm Y) = \Gamma(X + Y) \Gamma(X - Y)$ és a

$$\Gamma(X \pm Y \pm Z) = \Gamma(X + Y + Z) \Gamma(X + Y - Z) \Gamma(X - Y + Z) \Gamma(X - Y - Z)$$

jelöléseket.

Definiáljuk $z \in H$ esetén a $\theta(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e(m^2 z)$ és a

$$B_0(z) := (\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{4}} \theta(z) \quad (3.1)$$

függvényeket. A jólismert ν szorzórendszerrel (az explicit alakját l. pl. itt: [Du], (2.1)) akkor

$$B_0(\gamma z) = \nu(\gamma) \left(\frac{j_\gamma(z)}{|j_\gamma(z)|} \right)^{1/2} B_0(z), \text{ ha } \gamma \in \Gamma_0(4),$$

ahol $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ esetén $j_\gamma(z) = cz + d$. Megjegyezzük, hogy $\nu^4 = 1$.

Legyen $l = \frac{1}{2} + 2n$ vagy $l = 2n$ valamely n egészszel. Azt mondjuk, hogy egy a H -n értelmezett f függvény l súlyú automorf forma $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z})$ -re vagy $\Gamma_0(4)$ -re nézve (de ha $l = \frac{1}{2} + 2n$, akkor csak $\Gamma = \Gamma_0(4)$ vehető), ha egyrészt minden $z \in H$ -ra és $\gamma \in \Gamma$ -ra kielégíti az alábbi transzformációs formulát:

$$f(\gamma z) = \left(\frac{j_\gamma(z)}{|j_\gamma(z)|} \right)^l f(z)$$

az $l = 2n$ esetben,

$$f(\gamma z) = \nu(\gamma) \left(\frac{j_\gamma(z)}{|j_\gamma(z)|} \right)^l f(z)$$

az $l = \frac{1}{2} + 2n$ esetben, másrészt f legfeljebb polinomiálisan nő a fundamentális tartomány csúcsaiban (cusp-jaiban). A Δ_l operátor hat az l súlyú sima automorf formákon. Azt mondjuk, hogy az f függvény l súlyú Maass-forma a Γ -ra nézve, ha l súlyú automorf forma Γ -ra nézve, sima függvény, és a Δ_l operátor sajátfüggvénye H -n. Ha az f Maass-forma exponenciálisan csökken a csúcsokban, akkor csúcsformának (cusp form) nevezzük.

Jelöljük $L_l^2(D_4)$ -gyel azon $\Gamma_0(4)$ -re nézve l súlyú automorf formák terét, amelyekre $(f, f) < \infty$.

Legyen $u_{0,1/2} = c_0 B_0$, ahol c_0 -at úgy választjuk, hogy $(u_{0,1/2}, u_{0,1/2}) = 1$ teljesüljön. Nem nehéz belátni (használva [Sa] 290. oldalát), hogy konstans szorzó erejéig B_0 az egyetlen olyan $\frac{1}{2}$ súlyú Maas-forma $\Gamma_0(4)$ -re nézve, amelynek a $\Delta_{1/2}$ -sajátértéke $-\frac{3}{16}$, és a többi ilyen forma $\Delta_{1/2}$ -sajátértéke kisebb. Legyen

$u_{j,1/2}$ ($j \geq 0$) egy Maass-formákból álló ortonormális bázisa $L_{1/2}^2(D_4)$ azon al-
terének, amelyet a Maas-formák generálnak. Legyen

$$\Delta_{1/2}u_{j,1/2} = \Lambda_j u_{j,1/2}, \quad \Lambda_j = S_j(S_j - 1), \quad S_j = \frac{1}{2} + iT_j,$$

akkor $\Lambda_0 = -\frac{3}{16}$, $j \geq 1$ -re $\Lambda_j < -\frac{3}{16}$, és $\Lambda_j \rightarrow -\infty$.

Az $a = 0, \infty$ csúcsok esetén jelölje $E_a(z, s, \frac{1}{2})$ a $\Gamma_0(4)$ -hez és az a csúcshoz
tartozó $\frac{1}{2}$ súlyú Eisenstein-sort. Ez, mint z függvénye, $s(s-1)$ sajátértékű
sajátfüggvénye a $\Delta_{1/2}$ operátornak. Ha f $1/2$ súlyú automorf forma és a most
következő integrál abszolút konvergens, akkor vezessük be ezt a jelölést:

$$\zeta_a(f, r) := \int_{D_4} f(z) \overline{E_a\left(z, \frac{1}{2} + ir, \frac{1}{2}\right)} d\mu_z.$$

Ha $l \geq 1$ egész, legyen $S_{l+\frac{1}{2}}$ az $l + \frac{1}{2}$ súlyú holomorf csúcsformák tere a ν^{1+2l}
szorzórendszerre és a $\Gamma_0(4)$ csoportra nézve (ezt a fogalmat l. pl. [I] 2.7 alfe-
jezetében).

Főleg az az eset fog minket érdekelni, amikor l páros. Ha $k \geq 1$, legyen
 $f_{k,1}, f_{k,2}, \dots, f_{k,s_k}$ egy ortonormális bázisa az $S_{2k+\frac{1}{2}}$ térnek, és legyen

$$g_{k,j}(z) = (\text{Im}z)^{\frac{1}{4}+k} f_{k,j}(z).$$

Jegyezzük meg, hogy $g_{k,j}$ $2k + \frac{1}{2}$ súlyú Maass csúcsforma, és $\Delta_{2k+\frac{1}{2}} g_{k,j} =$
 $(k + \frac{1}{4})(k - \frac{3}{4}) g_{k,j}$ (l. az [F] cikk (4)-es és (7)-es formuláit).

Bevezetjük még az ún. Maass-operátorokat:

$$K_k := (z - \bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} + k = iy \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + k,$$

$$L_k := (\bar{z} - z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - k = -iy \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - k.$$

Ezen operátorok alapvető tulajdonságai megtalálhatók [F] 145-146. oldalán. Itt
csak azt említjük meg, hogy ha f k súlyú Maass-forma, akkor $K_{k/2}f$ és $L_{k/2}f$
rendre $k+2$, illetve $k-2$ súlyú Maass-forma.

3.3. A Poisson-formula és az új formula. A Poisson-formula kimondásához
tekintsük a sima, 1-periodikus függvényeket az $\mathbf{R}$ valós egyenesen, és legyen
 $D = \frac{d}{dx}$ a deriválás operátor. Akkor a D sajátfüggvényei ezen a téren az $e^{2\pi i n x}$
függvények $2\pi i n$ sajátértékekkel, és ezek a sajátfüggvények ortonormális bázisát
alkotják az $L^2(\mathbf{Z} \setminus \mathbf{R})$ Hilbert-térnek. A sajátértékeket az n egész számokkal
parametrizáljuk, ezek a paraméterek elemei az $\mathbf{R}$ halmaznak. A Poisson-formula
azt mondja ki, hogy ha F "szép" függvény $\mathbf{R}$ -en, akkor a $w(n) = 1$ jelölést
használva minden n -re, a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n) F(n)$$

kifejezés változatlan marad, ha F -et G -re cseréljük, ahol G az F Fourier-transzformáltja. Azért vezettük be a $w(n)$ jelölést az azonosan 1 függvényre, mert az új formulánkban már valóban nemtriviális súlyok fognak szerepelni.

Az új formulához az $\mathbf{R}$ -en értelmezett sima, 1-periodikus függvények helyett tekintjük az összes olyan sima automorf formát a H -n, amelynek a súlya $\frac{1}{2} + 2k$ alakú, ahol $k \geq 0$ tetszőleges egész. A fenti D operátor sajátfüggvényei helyett a $\Delta_{2k+\frac{1}{2}}$, $k \geq 0$ operátorok sajátfüggvényeit fogjuk tekinteni. Ha $k \geq 0$ adott, a $\Delta_{2k+\frac{1}{2}}$ operátor sajátfüggvényei és a $\Delta_{2(k+1)+\frac{1}{2}}$ operátor sajátfüggvényei között majdnem kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek a Maass-operátorok, kivéve, hogy a holomorf formáknak megfelelő $2(k+1)+\frac{1}{2}$ súlyú sajátfüggvényeket lenullázza az $L_{(k+1)+\frac{1}{4}}$ operátor. Tehát a $\Delta_{2k+\frac{1}{2}}$ operátorok lényegesen különböző sajátfüggvényei (amely függvények szerepet játszanak az $L^2_{2k+\frac{1}{2}}(D_4)$ terek elemeinek a spektrális felbontásában) a következők:

$$u_{j,1/2} \ (j \geq 0), \quad E_a \left(*, \frac{1}{2} + ir, \frac{1}{2} \right) \ (a = 0, \infty, \ r \in \mathbf{R}), \quad g_{k,j} \ (k \geq 1, 1 \leq j \leq s_k).$$

Ha u ezen függvények valamelyike, akkor a Laplace-sajátfüggvényét egy olyan T számmal fogjuk paraméterezni, amelyre

$$\Delta_{2k+\frac{1}{2}} u = \left(\frac{1}{2} + iT \right) \left(-\frac{1}{2} + iT \right) u$$

a megfelelő k -val. Az egyes esetekben ez a paraméter a következő lesz:

$$T_j, \text{ ha } u = u_{j,1/2}; \quad r, \text{ ha } u = E_a \left(*, \frac{1}{2} + ir, \frac{1}{2} \right); \quad i \left(\frac{1}{4} - k \right), \text{ ha } u = g_{k,j}.$$

Ezek a számok megfelelnek a Poisson-formulánál említett n számoknak. Esetünkben ezek a paraméterek benne vannak (legalábbis véges sok kivétellel: nevezzük j -t kivételesnek, ha $T_j \notin \mathbf{R}$) az $\mathbf{R} \cup D^+$ halmazban, ahol

$$D^+ = \left\{ i \left(\frac{1}{4} - k \right) : k \geq 1 \text{ egész} \right\}. \quad (3.2)$$

Valójában nem csak egy összegzési formulát bizonyítunk: bármely u_1, u_2 párhoz, ahol u_1 és u_2 0 súlyú Maass csúcsformák $SL(2, \mathbf{Z})$ -re nézve, tartozik egy összegzési formula. Rögzítsünk tehát két ilyen csúcsformát. Az új formula azt állítja, hogy bizonyos $w_{u_1, u_2}(j)$, $w_{u_1, u_2}(a, r)$ és $w_{u_1, u_2}(k, j)$ súlyokkal, ha F "szép" függvény az $\mathbf{R} \cup D^+$ halmazon, páros $\mathbf{R}$ -en (megjegyezzük, hogy F többek között akkor lesz "szép", ha az $\mathbf{R}$ -re való megszorítása holomorfán kiterjed egy az $\mathbf{R}$ -et tartalmazó elég széles sávra, tehát beszélhetünk $F(T_j)$ -ről kivételes j -kre is), akkor a

$$\sum_{j=0}^{\infty} w_{u_1, u_2}(j) F(T_j) + \sum_{a=0, \infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{u_1, u_2}(a, r) F(r) dr +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{s_k} w_{u_1, u_2}(k, j) F \left(i \left(\frac{1}{4} - k \right) \right)$$

kifejezés változatlan marad, ha $\overline{u_2}$ -at írjuk u_1 helyébe, $\overline{u_1}$ -at írjuk u_2 helyébe, és F -et G -re cseréljük, ahol G az F -ből egy bizonyos integráltranszformációval adódik. Ez az integráltranszformáció az ún. II. típusú Wilson-transzformált (amit néhány éve, [G1]-ben vezetett be Groenevelt), és $\mathbf{R} \cup D^+$ -on értelmezett, $\mathbf{R}$ -en páros függvényekből ismét ilyen függvényeket állít elő.

Ez az integráltranszformáció játssza azt a szerepet, amit a Fourier-transzformáció játszik a Poisson-formula esetén. Kicsit részletesebben is lesz szó később a II-es típusú Wilson-transzformáltról. Most csak azt említjük meg, hogy rendelkezik a Fourier-transzformált egyes szép tulajdonságaival: izometria egy megfelelően definiált Hilbert-téren és egyenlő a saját inverzével (ez utóbbi tulajdonság érvényes a Fourier-transzformáltra, ha csak a páros függvényeken tekintjük).

A fenti formulában szereplő w_{u_1, u_2} súlyok nagyon érdekes automorf mennyiségek. Most csak a $w_{u_1, u_2}(j)$ súlyokat adjuk meg, mert a többi súly hasonló lesz, és mindent pontosan definálunk majd a tételben. Tehát $j \geq 0$ -ra $w_{u_1, u_2}(j)$ ezzel egyenlő:

$$\Gamma \left(\frac{3}{4} \pm iT_j \right) \int_{D_4} B_0(z) u_1(4z) \overline{u_{j, \frac{1}{2}}(z)} d\mu_z \overline{\int_{D_4} B_0(z) u_2(4z) \overline{u_{j, \frac{1}{2}}(z)} d\mu_z}.$$

3.4. Megjegyzések más formulákkal való kapcsolatáról és a lehetséges további munkáról. Láttuk, hogy erős formai hasonlóság áll fenn a mi összegzési formulánk és a Poisson-formula között. Azt gondolom, hogy ez az analógia mélyebb lehet, talán létezik a két formulának közös általánosítása is. Az analógia magyarázata és általánosítások bizonyítása (esetleg magasabb rangú csoportokra) a reprezentációelmélet irányából jöhet. Egy ilyen megközelítés alkalmas lehetne a II. típusú Wilson-transzformált felbukkanásának a magyarázatára, ami pillanatnyilag eléggé rejtélyes. Maga Groenevelt a [G2] cikkben megadta egy reprezentációelméleti interpretációját ennek az integráltranszformációnak, de ez úgy tűnik, nem segít a formulánk értelmezésében.

A miénkhez némileg hasonló spektrális azonosságokat több szerző is bizonyított korábban. Megemlítjük például az [R] cikkben az ottani általános módszer alkalmazásaként bizonyított konkrét azonosságokat, vagy a [B-M] cikket, amelynek az $L^2(SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R}))$ tér spektrális struktúráján alapuló módszere is fontos lehet a mi formulánkkal kapcsolatban.

Azonban, amennyire látom, az új formula legközelebbi rokona egy Kuznyecov (l. [K]) által felvetett és Motohashi által bizonyított (l. [Mo]) azonosság. Az ottani súlyok különböznek a nálunk szereplő súlyoktól, de a két formula struktúrája nagyon hasonló. Valóban, egyrészt az összegzés mindkét esetben Laplace-sajátértékekre és egészekre történik. Másrészt, mindkét azonosság esetén ugyanolyan típusú súlyok szerepelnek az adott azonosság mindkét oldalán. Ezt a Kuznyecov-Motohashi formulát már sikeresen alkalmazták analitikus problémákra (l. [Iv],

[J]), így talán a mi formulánk is alkalmazható lesz a w_{u_1, u_2} súlyok, tehát hármas-szorzatok becslésére.

3.5. A II. típusú Wilson-transzformált. Legyen t_1 és t_2 két adott nemnulla valós szám (ezek egy-egy csúcsforma Laplace-sajátfüggvényeihez kapcsolódnak majd, l. a 2. Tételt). Ezek ismeretében explicite definiálunk egy C pozitív számot és egy $H(x)$ pozitív valós függvényt a valós egyenesen:

$$H(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} \pm it_1 \pm ix\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} \pm it_2 \pm ix\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} \pm ix\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} \pm ix\right)}{\pi^2 \Gamma(\pm 2ix)},$$

$$C = \frac{\pi^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm it_1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} \pm it_2\right)}.$$

Legyen D^+ ugyanaz, mint (3.2)-ben, és ha F az $\mathbf{R} \cup D^+$ -on definiált, $\mathbf{R}$ -en páros függvény, vezessük be az

$$\int F(x) dh(x) := \frac{C}{2\pi} \int_0^\infty F(x) H(x) dx + iC \sum_{x \in D^+} F(x) \text{Res}_{z=x} H(z)$$

jelölést. Az

$$R_k = \text{Res}_{z=i(\frac{1}{4}-k)} H(z)$$

számok explicit alakjából látszik, hogy iR_k minden k -ra pozitív.

A [G1] cikk (3.2)-es formulája definiálja a

$$\phi_\lambda(x) = \phi_\lambda(x; a, b, c, d)$$

Wilson-függvényt bármely λ és x komplex számokra. Az a, b, c, d paraméterek csak t_1 -től és t_2 -től fognak függeni, explicite:

$$a = \frac{1}{4} + it_1, b = \frac{1}{4} + it_2, c = \frac{1}{4} - it_2, d = \frac{3}{4} + it_1.$$

Legyen a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér azon $\mathbf{R} \cup D^+$ -on definiált, $\mathbf{R}$ -en páros függvények tere, amelyeknek a normája véges az

$$(f, g)_\mathcal{H} = \int f(x) \overline{g(x)} dh(x)$$

skalárszorzatra nézve.

A II. típusú Wilson-transzformáltat Groenevelt így definiálta [G1]-ben:

$$(\mathcal{G}F)(\lambda) = \int F(x) \phi_\lambda(x) dh(x).$$

Ahogy a klasszikus Fourier-transzformáltat is, ezt is először azokra a $\mathcal{H}$ -beli függvényekre definiáljuk, amelyekre a fenti integrál abszolút konvergens. Ez $\mathcal{H}$

sűrű részhalmaza, tehát kiterjeszthetjük a definíciót $\mathcal{H}$ -ra, és igaz lesz az alábbi tétel ([G1], Theorem 5.10):

A $\mathcal{G} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operátor unitér, és $\mathcal{G}$ a saját inverze.

A második állítás lesz a mi bizonyításunkban különösen fontos, tehát hogy $\mathcal{G}$ a saját inverze.

Mivel külön fogjuk tekinteni egy az $\mathbf{R} \cup D^+$ -on definiált, $\mathbf{R}$ -en páros F függvény folytonos és diszkrét részét, ezekre bevezetünk jelöléseket:

$$f(x) := F(x) \ (x \in \mathbf{R}), \quad a_n := F\left(i\left(\frac{1}{4} - n\right)\right) \ (n \geq 1).$$

Tehát F helyett egy olyan párról fogunk beszélni, amely egy $\mathbf{R}$ -en definiált páros f függvényből és egy $\{a_n\}_{n \geq 1}$ sorozatból áll. Ezen a nyelven az $f, \{a_n\}_{n \geq 1}$ pár II. típusú Wilson-transzformáltja az a pár lesz, amely a következő módon definiált g függvényből és $\{b_n\}_{n \geq 1}$ sorozatból áll:

$$g(\lambda) = \frac{C}{2\pi} \int_0^\infty f(x) \phi_\lambda(x) H(x) dx + iC \sum_{k=1}^\infty a_k \phi_\lambda\left(i\left(\frac{1}{4} - k\right)\right) R_k \quad (3.3)$$

és

$$b_n = \frac{C}{2\pi} \int_0^\infty f(x) \phi_{i(\frac{1}{4}-n)}(x) H(x) dx + iC \sum_{k=1}^\infty a_k \phi_{i(\frac{1}{4}-n)}\left(i\left(\frac{1}{4} - k\right)\right) R_k, \quad (3.4)$$

ha $n \geq 1$.

3.6. A formula. Most precízen kimondjuk az összegzési formulát. Ha u 0 súlyú csúcsforma $SL(2, \mathbf{Z})$ -re nézve, és $\Delta_0 u = s(s-1)u$, akkor $n \geq 0$ -ra definiáljunk egy $\kappa_n(u)$ $2n$ súlyú csúcsformát a $\Gamma_0(4)$ csoportra nézve így:

$$(\kappa_n(u))(z) = \frac{(K_{n-1} K_{n-2} \dots K_1 K_0 u)(4z)}{(s)_n (1-s)_n}.$$

2. TÉTEL ([Bi6]). Legyen $u_1(z)$ és $u_2(z)$ két 0 súlyú Maass csúcsforma az $SL(2, \mathbf{Z})$ csoportra nézve $s_j(s_j-1)$ Laplace-sajátértékekkel, ahol $s_j = \frac{1}{2} + it_j$ és $t_j > 0$ ($j = 1, 2$). Létezik egy csak u_1 -től és u_2 -től függő pozitív K konstans úgy, hogy az alábbi $P(f, \{a_n\})$ Tulajdonság igaz, ha $f(x)$ olyan páros holomorf függvény az $|\operatorname{Im} x| < K$ tartományon, amire teljesül, hogy

$$\left| f(x) e^{-2\pi|x|} (1+|x|)^K \right|$$

korlátos az $|\operatorname{Im} x| < K$ tartományon, és $\{a_n\}_{n \geq 1}$ olyan sorozat, amelyre

$$\left| n^{K+\frac{3}{2}} \left(a_n - \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \sum_{0 \leq m < K} \frac{c_m}{n^m} \right) \right|$$

korlátos $n \geq 1$ esetén valamely c_m konstansokkal (itt m a $0 \leq m < K$ egészeiken fut végig).

$P(f, \{a_n\})$ **Tulajdonság.** Legyen g és b_n a (3.3) és (3.4) formulákkal definiálva, akkor a következő három sor összege:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(T_j) \Gamma\left(\frac{3}{4} \pm iT_j\right) (B_0 \kappa_0(u_1), u_{j, \frac{1}{2}}) \overline{(B_0 \kappa_0(u_2), u_{j, \frac{1}{2}})}, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{a=0, \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \Gamma\left(\frac{3}{4} \pm ir\right) \zeta_a(B_0 \kappa_0(u_1), r) \overline{\zeta_a(B_0 \kappa_0(u_2), r)} dr, \quad (3.6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right) \sum_{j=1}^{s_n} (B_0 \kappa_n(u_1), g_{n,j}) \overline{(B_0 \kappa_n(u_2), g_{n,j})} \quad (3.7)$$

egyenlő a most következő három sor összegével:

$$\sum_{j=1}^{\infty} g(T_j) \Gamma\left(\frac{3}{4} \pm iT_j\right) (B_0 \kappa_0(\overline{u_2}), u_{j, \frac{1}{2}}) \overline{(B_0 \kappa_0(\overline{u_1}), u_{j, \frac{1}{2}})}, \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{a=0, \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(r) \Gamma\left(\frac{3}{4} \pm ir\right) \zeta_a(B_0 \kappa_0(\overline{u_2}), r) \overline{\zeta_a(B_0 \kappa_0(\overline{u_1}), r)} dr, \quad (3.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right) \sum_{j=1}^{s_n} (B_0 \kappa_n(\overline{u_2}), g_{n,j}) \overline{(B_0 \kappa_n(\overline{u_1}), g_{n,j})}. \quad (3.10)$$

A (3.3)-beli és (3.4)-beli összegek és integrálok abszolút konvergensek, ha $|\operatorname{Im} \lambda| < \frac{3}{4}$ és $n \geq 1$. Minden összeg és integrál a (3.5)-(3.10) formulákban abszolút konvergens.

4. Egy Wilson-függvényekre vonatkozó kifejtési tétel

A 2. Tétel bizonyításához szükség van néhány tisztán analitikus, a Wilson-függvényekre vonatkozó állításra. Ezeket a disszertáció 4. fejezetében bizonyítjuk. Itt csak a legérdekesebbet mondjuk ki.

Legyen $t_1, t_2, H(x)$ és $\phi_\lambda(x)$ jelentése ugyanaz, mint a fenti 3.5 alpontban. Tehát t_1 és t_2 adott, így minden változó és minden O -konstans függhet t_1 -től és t_2 -től akkor is, ha ezt külön nem jelöljük.

Az alábbi tétel azt mutatja, hogy egy az $\mathbf{R}$ -en értelmezett elég szép páros függvény, amelynek egy bizonyos integrálja eltűnik, felírható a $\phi_{i(\frac{1}{4}-N)}(x)$ ($N \geq 1$) függvények lineáris kombinációjaként.

3. TÉTEL ([Bi7]). Tegyük fel, hogy K pozitív szám, és $f(x)$ olyan páros holomorf függvény az $|\operatorname{Im} x| < K$ tartományon, amelyre igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) H(\tau) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4} \pm i\tau\right)} d\tau = 0,$$

és hogy

$$\left| f(x)e^{-2\pi|x|} (1+|x|)^K \right|$$

korlátos az $|\operatorname{Im}x| < K$ tartományon. Ha k pozitív egész és K a k -tól függően elég nagy, akkor van egy olyan d_n sorozat, amelyre

$$d_n = \frac{(-1)^n}{n^{5/2}} \left(\sum_{j=0}^k \frac{e_j}{n^j} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \right)$$

valamely e_j konstansokkal, emellett

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \phi_{i(\frac{1}{4}-n)}(x) \quad (4.1)$$

minden $|\operatorname{Im}x| < \frac{3}{4}$ -re, és a (4.1) jobboldalán levő összeg abszolút konvergens minden ilyen x -re.

5. A Yokoi-sejtés bizonyításának a vázlata

Használjuk a 2. pont jelöléseit, és bevezetünk néhány új jelölést. Legyen R a K algebrai egészeinek a gyűrűje, jelölje $I(K)$ az R nemnulla ideáljainak a halmazát, és $P(K)$ az R nemnulla főideáljainak a halmazát. Legyen $N(a)$ a normája, vagyis az R -beli indexe egy $a \in I(K)$ ideálnak. Legyen $q > 2$ olyan egész, amelyre $(q, d) = 1$ (továbbra is $d = p^2 + 4$), és legyen χ egy olyan páratlan (vagyis feltesszük, hogy $\chi(-1) = -1$) primitív karakter, aminek a konduktora q . (Ez lesz a paraméter karakter.) Ha $\Re s > 1$, legyen

$$\zeta_K(s) = \sum_{a \in I(K)} \frac{1}{N(a)^s}, \quad \zeta_K(s, \chi) = \sum_{a \in I(K)} \frac{\chi(N(a))}{N(a)^s}$$

és

$$\zeta_{P(K)}(s, \chi) = \sum_{a \in P(K)} \frac{\chi(N(a))}{N(a)^s}.$$

Jól ismert (l. pl. [W], 4.3 és 3.11 Tétel), hogy

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi_d), \quad (5.1)$$

ahol

$$\chi_d(n) = \left(\frac{n}{d} \right)$$

a Jacobi-szimbólum; sőt, ha $h(d) = 1$, akkor d prím (l. a B Állítást alább), tehát ez Legendre-szimbólum. Könnyen adódik a

$$\zeta_K(s, \chi) = L(s, \chi) L(s, \chi \chi_d)$$

összefüggés. Az is jól ismert, (l. pl. [W], 4.2. Tétel és [Da], 9. fejezet) hogy egy olyan ψ primitív karakterre, amelyre $\psi(-1) = -1$ és amelynek a konduktora f , teljesül, hogy:

$$L(0, \psi) = -\frac{1}{f} \sum_{a=1}^f a\psi(a) \neq 0.$$

Mivel a feltételeink szerint $\chi\chi_d$ egy qd konduktorú primitív karakter, és $\chi_d(-1) = 1$, hiszen d kongruens 1-gyel modulo 4, tehát

$$\zeta_K(0, \chi) = \left(\frac{1}{q} \sum_{a=1}^q a\chi(a) \right) \left(\frac{1}{qd} \sum_{b=1}^{qd} b\chi(b)\chi_d(b) \right). \quad (5.2)$$

Ha $h(d) = 1$, akkor a definíciók szerint

$$\zeta_K(s, \chi) = \zeta_{P(K)}(s, \chi). \quad (5.3)$$

A már a 2. pontban említett, zetafüggvények speciális értékére vonatkozó fontos lemma a következő.

1. LEMMA. ([Bi3]). *Ha $d = p^2 + 4$ négyzetmentes, q olyan egész, amelyre $q > 2$, $(q, d) = 1$, és χ olyan primitív karakter modulo q , amelyre $\chi(-1) = -1$, akkor*

$$\zeta_{P(K)}(0, \chi) = \frac{1}{q} A_\chi(p),$$

ahol $[t]$ a t felső egészrészét jelöli, és bármely a egészre

$$A_\chi(a) := \sum_{0 \leq C, D \leq q-1} \chi(D^2 - C^2 - aCD) [(aC - D)/q] (C - q).$$

Nem nehéz belátni, hogy az (5.2) formula jobboldalának a második tényezője algebrai egész, és akkor (5.2), (5.3) és az 1. Lemma alapján a következőt kapjuk.

A Állítás. *Ha $d = p^2 + 4$ négyzetmentes, $h(d) = 1$, q olyan egész, amelyre $q > 2$, $(q, d) = 1$, és χ olyan primitív karakter modulo q , amelyre $\chi(-1) = -1$, akkor az*

$$m_\chi = \sum_{a=1}^q a\chi(a)$$

jelölést használva egyrészt $m_\chi \neq 0$, másrészt

$$A_\chi(p)m_\chi^{-1}$$

algebrai egész.

Azt látjuk be, hogy az 1. Tétel következik az A Állításból.

Először bevezetjük a következő jelölést. Ha m páratlan pozitív egész, jelölje U_m azon a racionális egészek halmazát, amelyekre

$$\left(\frac{a^2 + 4}{r}\right) = -1$$

az m minden r prímosztójára. Vegyük észre, hogy U_m bizonyos m szerinti maradékosztályok uniója.

Az 1. Tétel bizonyításához elég egy olyan m -et találni, amelynek a prímosztói az ott felsorolt konkrét prímek (azaz 5,7,41,61,1861) közül kerülnek ki, és $p \notin U_m$. Feltesszük, hogy $h(d) = 1$. Az A Állítást a következőképpen fogjuk alkalmazni. Jelölje $\mathcal{L}_\chi$ a $\chi(a)$ ($1 \leq a \leq q$) értékek által $\mathbf{Q}$ felett generált testet, és vegyük $\mathcal{L}_\chi$ egy I prímeálját úgy, hogy

$$m_\chi \in I \quad (5.4)$$

teljesüljön. Legyen

$$p = Pq + p_0 \text{ úgy, hogy } 0 \leq p_0 < q, \quad (5.5)$$

akkor könnyen látható, hogy

$$A_\chi(p) = PB_\chi(p_0) + A_\chi(p_0), \quad (5.6)$$

ahol bármely a egészre

$$B_\chi(a) := \sum_{0 \leq C, D \leq q-1} \chi(D^2 - C^2 - aCD)C(C - q). \quad (5.7)$$

Akkor (5.4)-ből, (5.6)-ból és az A Állításból azt kapjuk, hogy

$$PB_\chi(p_0) + A_\chi(p_0) \equiv 0 \pmod{I}. \quad (5.8)$$

Tegyük fel, hogy q páratlan, és hogy $p \in U_q$ (vagy ami ezzel ekvivalens: $p_0 \in U_q$). Megjegyezzük, hogy ez már meghatározza a $B_\chi(p_0)$ által generált ideált. Valóban, ha $a_1, a_2 \in U_q$, akkor belátható, hogy

$$(B_\chi(a_1)) = (B_\chi(a_2)),$$

azaz $B_\chi(a_1)$ és $B_\chi(a_2)$ ugyanazt az ideált generálja az $\mathcal{L}_\chi$ egészeinek a gyűrűjében. Tegyük fel azt is, hogy a q és r egészek kielégítik a következő feltételt:

(*) **Feltétel.** *A q egész páratlan, r páratlan prím, és létezik egy q konduktorú páratlan primitív χ karakter, továbbá az $\mathcal{L}_\chi$ testnek egy r feletti I prímeálja úgy, hogy $m_\chi \in I$, de I semelyik $a \in U_q$ racionális egészre sem osztja az $\mathcal{L}_\chi$ egészeinek gyűrűjében $B_\chi(a)$ által generált ideált.*

Akkor, mivel $p_0 \in U_q$, az (5.8) formulából azt kapjuk, hogy

$$P \equiv -\frac{A_\chi(p_0)}{B_\chi(p_0)} \pmod{I},$$

itt az I maradéktestében (azaz az $\mathcal{L}_\chi$ egészei gyűrűjének I szerinti faktorában) osztunk. Ezt (5.5)-tel kombinálva azt kapjuk, hogy

$$p \equiv p_0 - q \frac{A_\chi(p_0)}{B_\chi(p_0)} \pmod{I}. \quad (5.9)$$

Legyen q és p_0 adott. Jegyezzük meg, hogy elvileg megtörténhet, ha az I maradékteste nem a prímtest (bár a mi konkrét alkalmazásainkban mindig az), hogy nem létezik az (5.9)-et kielégítő p racionális egész; mindenesetre, ha van megoldás, akkor minden megoldás egyetlen r szerinti maradékosztályhoz tartozik, hiszen I az r felett fekszik. Ebből az következik, hogy ha q -t és p_0 -at ismerjük, akkor ki tudunk jelölni egy r szerinti maradékosztályt úgy, hogy p -nek ebbe a maradékosztályba kell tartoznia.

Összefoglalva: legyen $h(d) = 1$, és q és r elégítse ki a (*) Feltételt. Akkor, ha p egy adott q szerinti maradékosztályhoz tartozik úgy, hogy $p \in U_q$, akkor ez p -t egy bizonyos r szerinti maradékosztályba kényszeríti. Tesztelhetjük, hogy $p \in U_r$ igaz-e vagy sem. Konkrét esetekben megtörténik, hogy $p \notin U_r$.

Mivel az 1. Tétel bizonyításához olyan m -et keresünk, amelyre $p \notin U_m$, ez azt jelenti, hogy az r szerinti maradékot is tekintve olyan esetekre is kész lehetünk a bizonyítással, amikor p -nek a q szerinti maradéka még olyan, hogy $p \in U_q$ (tehát csak azt tekintve nem lennénk készen).

Ez egy nagyon erős eszköz, hiszen általában egy egész szám két különböző prím szerinti maradéka egymástól független (a kínai maradéktétel szerint), a jelen helyzetben viszont nagyon erős összefüggés áll fenn. Ez a legfontosabb új elemi eszközünk, és az 1. Tétel ennek az eszköznek véges számú konkrét alkalmazásával adódik.

Az 1. Következmény levezetéséhez az alábbi, már a 2. pontban említett tényt használjuk.

B Állítás. *Ha $d = p^2 + 4$ négyzetmentes és $h(d) = 1$, akkor d prím, és ha $2 < r < p$ szintén prím, akkor*

$$\left(\frac{d}{r}\right) = -1$$

(Legendre-szimbólum).

Végül tehát a Yokoi-sejtés bizonyítása az A és B Állításokból elemi algebrai számelmélet és véges (bár elég nagy) mennyiségű számítás segítségével adódik.

6. A 2. Tétel bizonyításának a vázlata

Ebben a vázlatban nem foglalkozunk konvergenciakérdésekkel, csak formálisan érvelünk.

Tegyük fel először, hogy a 2. Tétel következő speciális esetét már bebizonyítottuk:

$$f(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}), \quad a_n = 0 \quad (n \neq N), \quad a_N = 1, \quad (6.1)$$

ahol N adott (de egyébként tetszőleges) pozitív egész. Használva Groenevelt eredményét, mely szerint a II. típusú Wilson-transzformált a saját inverze (l. a 3.5 alpontot), láthatjuk, hogy ha ezt a speciális esetet a "másik irányban olvassuk", és végrehajtjuk az $u_1 \rightarrow \overline{u_2}$, $u_2 \rightarrow \overline{u_1}$ cseréket, akkor a (6.1) eset azonnal bizonyítja a 2. Tétel alábbi speciális esetét is:

$$f(x) = \phi_{i(\frac{1}{4}-N)}(x) \quad (x \in \mathbf{R}), \quad a_n = \phi_{i(\frac{1}{4}-N)}\left(i\left(\frac{1}{4}-n\right)\right), \quad (6.2)$$

ahol N ismét adott (de egyébként tetszőleges) pozitív egész.

Van egy könnyen belátható speciális esete is a 2. Tételnek:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4} \pm ix\right)} \quad (x \in \mathbf{R}), \quad a_n = 0 \quad (n \geq 1). \quad (6.3)$$

Ez könnyen következik az $1/2$ súlyú spektráltételből.

Az derül ki, hogy az általános eset tisztán analitikus úton bebizonyítható a fenti három speciális esetből. Ehhez azt használjuk, hogy a 3. Tételből adódóan egy eléggé szép páros függvény az $\mathbf{R}$ -en felírható az alábbi függvények lineáris kombinációjaként: $\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{4} \pm ix)}$ és $\phi_{i(\frac{1}{4}-N)}(x)$ ($N \geq 1$). Ez azt jelenti, hogy ha f egy elég szép páros függvény az $\mathbf{R}$ -en, akkor (6.2)-ből (ezt a formulát minden $N \geq 1$ -re használva) és (6.3)-ból be tudjuk látni a 2. Tételt erre az f -re és *valamely* $\{a_n\}_{n \geq 1}$ sorozatra. De akkor (6.1)-et minden $N \geq 1$ -re használva el tudunk érni *bármely* $\{a_n\}_{n \geq 1}$ sorozatot az f megváltoztatása nélkül. Ez teljessé teszi a 2. Tétel bizonyítását.

Tehát elég belátni a (6.1) speciális esetet. Most ennek a speciális esetnek a bizonyítását vázoljuk.

Vegyük észre, hogy erre az összegre kell új kifejezést adnunk:

$$\sum_{j=1}^{s_N} (B_0 \kappa_N(u_1), g_{N,j}) \overline{(B_0 \kappa_N(u_2), g_{N,j})}. \quad (6.4)$$

Ez a skaláris szorzata a $B_0 \kappa_N(u_1)$ szorzat és a $B_0 \kappa_N(u_2)$ szorzat

$$(\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{4}+N} S_{2N+\frac{1}{2}}$$

térre vonatkozó vetületének. Ez a tér valójában azoknak a Maass csúcsformáknak a tere, amelyek súlya $2N + \frac{1}{2}$ és a $\Delta_{2N+\frac{1}{2}}$ -sajátértéke $(N + \frac{1}{4})(N - \frac{3}{4})$. A bizonyítás során megmutatjuk, hogy ez a vetítési operátor előállítható integráloperátorként: ha U $2N$ súlyú csúcsforma $\Gamma_0(4)$ -re nézve, akkor a $B_0 U$ szorzat vetülete a fent említett térre

$$\int_H B_0(z) U(z) m_N(z, w) d\mu_z$$

egy alkalmas m_N magfüggvénnyel. Ezután Fay egy tételét (l. [F]) alkalmazzuk B_0 -nak és U -nak a w középpontú nemeuklidészi körökön vett Fourier-sorfejtésének a meghatározására. Mivel $m_N(z, w)$ viselkedése ilyen körökön jól ismert, ki tudjuk számolni ezt az integrált w körüli geodetikus polárkoordinátákat használva, és azt kapjuk, hogy a vetület ezzel egyenlő:

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_{U,l} B_l(w) (U)_{-l}(w),$$

ahol a $C_{U,l}$ együtthatók explicite ismertek, és

$$(U)_{-l} = \frac{1}{l!} L_{N-l+1} \dots L_{N-1} L_N U, \quad B_l = \frac{1}{l!} K_{(l-1)+\frac{1}{4}} \dots K_{\frac{5}{4}} K_{\frac{1}{4}} B_0.$$

Tehát ezt $U = \kappa_N(u_1)$ -re és $U = \kappa_N(u_2)$ -re is alkalmazva azt látjuk, hogy (6.4) kiszámításához ilyen alakú integrálokat kell számolnunk l_1, l_2 nemnegatív egészekre:

$$\int_{D_4} B_{l_1}(w) (\kappa_N(u_1))_{-l_1}(w) \overline{B_{l_2}(w) (\kappa_N(u_2))_{-l_2}(w)} d\mu_w.$$

Ezt az integrált a $B_{l_1} \overline{(\kappa_N(u_2))_{-l_2}}$ és a $B_{l_2} \overline{(\kappa_N(u_1))_{-l_1}}$ függvények skaláris szorzatának fogjuk tekinteni. Ezek $\frac{1}{2} + 2(l_1 + l_2 - N)$ súlyú automorf formák, és így a skaláris szorzatukat az erre a súlyra vonatkozó spektráltétel segítségével fogjuk kiszámolni. Ez egy olyan összeghez vezet, amelynek a tagjai hármasszorzatok szorzatai, mégpedig ilyen alakú egy tag:

$$\left(B_{l_1} \overline{(\kappa_N(u_2))_{-l_2}}, F \right) \overline{\left(B_{l_2} \overline{(\kappa_N(u_1))_{-l_1}}, F \right)},$$

ahol F egy $\frac{1}{2} + 2(l_1 + l_2 - N)$ súlyú Maass-forma. Parciális integrálást alkalmazva kiderül, hogy ezek a hármasszorzatok felírhatók olyan hármasszorzatok lineáris kombinációjaként, amelyek a 2. Tételben szerepelnek.

Ez az érvelés viszonylag könnyen mutatja, hogy kaphatunk olyan kifejezést (6.4)-re, ami már pontosan azokat az automorf mennyiségeket (hármasszorzatok szorzatát) tartalmazza, amelyek a 2. Tételben szerepelnek. De nem tudok jó magyarázatot adni a kapott kifejezés pontos formájára, vagyis a $\phi_\lambda(x)$ Wilson-függvények megjelenésére (azon kívül, hogy a számítások ezt az eredményt adják).

Hivatkozások:

- [Ba] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, Mathematika, 13 (1966), 204-216.
- [Be] J. Beck, *Diophantine approximation and quadratic fields*, 55-93., in: Number Theory, eds. Györy, Pethő, Sós; Walter de Gruyter, 1998
- [Bi1] A. Biró, *On a generalization of the Selberg trace formula*, Acta Arithmetica, 87 (1999), 319-338.
- [Bi2] A. Biró, *Cycle integrals of Maass forms of weight 0 and Fourier coefficients of Maass forms of weight 1/2*, Acta Arithmetica, 94 (2000), 103-152.
- [Bi3] A. Biró, *Yokoi's conjecture*, Acta Arithmetica, 106 (2003), 85-104.
- [Bi4] A. Biró, *Chowla's conjecture*, Acta Arithmetica, 107 (2003), 178-194.
- [Bi5] A. Biró, *On the class number one problem for some special real quadratic fields*, Proc. of the 2003 Nagoya Conference "On Yokoi-Chowla Conjecture and Related Problems", Furukawa Total Pr. Co., 2004, 1-9.
- [Bi6] A. Biró, *A duality relation for certain triple products of automorphic forms*, to appear in Israel J. of Math.
- [Bi7] A. Biró, *Some properties of Wilson functions*, preprint, 2011
- [B-K-L] D. Byeon, M. Kim, J. Lee, *Mollin's conjecture*, Acta Arithmetica, 126 (2007), 99-114.
- [B-M] R.W. Bruggeman, Y. Motohashi, *A new approach to the spectral theory of the fourth moment of the Riemann zetafunction*, J. Reine Angew. Math., 579 (2005), 75-114.
- [B-R] J. Bernstein and A. Reznikov, *Periods, subconvexity of L-functions and representation theory*, J. of Diff. Geom., 70 (2005), 129-142.
- [C-F] S. Chowla and J. Friedlander, *Class numbers and quadratic residues*, Glasgow Math. J. 17 (1976), 47-52.
- [Da] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 2nd edition, Springer, 1980
- [Du] W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms*, Invent Math., 92, 73-90 (1988)
- [F] J.D. Fay, *Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group*, J. Reine Angew. Math., 294 (1977), 143-203.
- [G-L] A.O. Gelfond and Yu.V. Linnik, *On Thue's method and the effectiveness problem in quadratic fields (in Russian)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 61 (1948), 773-776.
- [Go] D. Goldfeld, *The class number of quadratic fields and the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 3 (1976), 623-663.
- [G1] W. Groenevelt, *The Wilson function transform*, Int. Math. Res. Not. 2003, no. 52, 2779-2817
- [G2] W. Groenevelt, *Wilson function transforms related to Racah coefficients*, Acta Appl. Math. 91 (2006), no. 2, 133-191.
- [G-Z] B. Gross and J. Zagier, *Points de Heegner et derivees de fonctions L*, C.R. Acad. Sci. Paris, 297 (1983), 85-87.

- [Hee] K. Heeegner, *Diophantische Analysis und Modulfunktionen*, Math. Z., 56 (1952), 227-253.
- [Hei] H. Heilbronn, *On the class number in imaginary quadratic fields*, Quart. J. Math. Oxford Ser., 25 (1934), 150-160.
- [H-S] R. Holowinski, K. Soundararajan, *Mass equidistribution for Hecke eigenforms*, Ann. of Math. (2) 172 (2010), no 2, 1517-1528.
- [I] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, American Mathematical Society, 1997
- [Iv] A. Ivic, *On the moments of Hecke series at central points*, Functiones et Approximatio, 30 (2002), 49-82.
- [J] M. Jutila, *The twelfth moment of central values of Hecke series*, J. of Number Theory, 108 (2004), 157-168.
- [K] N.V. Kuznetsov, *Sums of Kloosterman sums and the eighth power moment of the Riemann zetafunction*, T.I.F.R. Stud. Math., 12, 57-117, (1989)
- [Le] J. Lee, *The complete determination of wide Richaud-Degert types which are not 5 modulo 8 with class number one*, Acta Arithmetica, 140 (2009), 1-29.
- [Li] E. Lindenstrauss, *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Ann. of Math., 163 (2006), 165-219.
- [Mo] Y. Motohashi, *A functional equation for the spectral fourth moment of modular Hecke L-functions*, in: D.R. Heath-Brown, B.Z. Moroz (eds), Proceedings of the session in analytic number theory and Diophantine equations (Bonn, January-June, 2002), Bonner Math. Schriften Nr. 360, Math. Inst. Univ. Bonn, Bonn, 2003
- [R] A. Reznikov, *Rankin-Selberg without unfolding and bounds for spherical Fourier coefficients of Maass forms*, J. of the Amer. Math. Soc., 21 (2) 2008, 439-477.
- [Sa] P. Sarnak, *Additive number theory and Maass forms*, in: Chudnovsky, D.V., Chudnovsky, G.V., Cohn, H., Nathatnson, M.B., (eds) Number Theory. Proceedings, New York 1982 (Lecture Notes Math. vol. 1052., pp. 286-309.), Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1982
- [Sh] T. Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23 (1976), 393-417.
- [So] K. Soundararajan, *Quantum unique ergodicity for $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash H$* , Ann. of Math. (2) 172 (2010), no 2, 1529-1538.
- [St] H.M. Stark, *A complete determination of the complex quadratic fields of class-number one*, Michigan Math. J., 14 (1967), 1-27.
- [Y] H.Yokoi, *Class number one problem for certain kind of real quadratic fields*, in: Proc. Internat. Conference, Katata, Japan (1986), 125-137., Nagoya Univ., Nagoya, 1986
- [W] L.C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer, 1982

dc_344_11

dc_344_11