

Bíró András "Class numbers and automorphic forms" című doktori disszertációjának bírálata

Tóth Árpád

2013. április 28.

Bíró András disszertációjának értékelése örömteli feladat számomra. A dolgozatban két olyan eredmény szerepel, melyek önállóan is elegendőek lennének az MTA doktori cím odaítélésére. Ezek a tételek olyan modern kérdésekre adnak választ melyek az analitikus számelmélet klasszikus problémáiból erednek. A címben szereplő két témáról csak külön szólok a köztük fennálló kapcsolat kifejtésére itt nincs mód.

1. A Yokoi sejtés

Az egész együtthatós bináris kvadratikus alakok vizsgálata Fermat-ig nyúlik vissza. Az első komolyabb általános eredmény Lagrange nevéhez fűződik, aki megmutatta, hogy adott diszkriminánssal formákban a változók egész együtthatós lineáris helyettesítésével kapott csoportnak véges sok orbitja van, az úgy nevezett osztályok. Gauss a *Disquisitiones*-ben, alig 21 évesen, az osztályokon egy természetes csoport struktúráját adott meg, ami az algebrai számelmélet nyelvén a kvadratikus testbővítések ideálcsoportjainak felelnek meg. Gauss nem csak elméleti síkon vizsgálta a kérdést. Kiterjedt számításokat végzett, amik alapján konkrét sejtéseket fogalmazott meg az osztályok számáról. A negatív diszkrimináns esetben úgy vélte, hogy az osztályszám a diszkrimináns függvényében végtelenbe tart és sejtésként véges listát adott az 1, 2, 3 osztályszámú diszkriminánsokról. A pozitív diszkrimináns esetén pedig azt a sejtést fogalmazta meg, hogy végtelen sok 1 osztályszámú diszkrimináns van, (az empirikus megfigyelések alapján a prím diszkriminánsok körülbelül $3/4$ -ének egy az osztályszáma). Ezek a kérdések Dirichlet, Dedekind, Siegel és mások munkája révén komoly lökést adtak az analitikus és algebrai számelmélet fejlődésének.

Maguknak a listáknak a teljessége csak jóval később bizonyosodott be. Például az 1 osztályszámú negatív diszkriminánsok végességet ugyan sikerült Heilbronnak belátnia, de a módszer nem tudott explicit felső korlátot adni az ilyen diszkriminánsokra. Az első elfogadott bizonyítások Starttől és Bakertől származnak (ma már Heegner 1952-es cikkét is elismerik).

Az eredmények a Dirichlet-osztályszám formula szempontjából közelíthetők meg a legjobban, és ez egyben lehetőséget ad arra is, hogy Bíró András eredményére áttérjek. Dirichlet eredménye a $\pi/4$ -re vonatkozó Leibniz-sor nagyívű általánosítása. A jelen kérdésben elég arra az esetre szorítkozni amikor a harmonikus sorban előjeleket vezetünk be egy valamely q természetes szám szerint periodikusan, multiplikatív módon, azaz egy $\pmod{q}$ Dirichlet karakter segítségével. Ezek az összegek a karakterekből felépített Dirichlet-sor, az úgy nevezett Dirichlet L-függvény, speciális értékei, melyeket Dirichlet zárt alakra hozott. A negatív diszkrimináns esetben ez lényegében az osztályszám. A pozitív diszkrimináns esetén azonban megjelenik egy faktor, az úgy nevezett regulátor. Ez $\log(t + u\sqrt{d})$, ahol t és u a Pell-egyenlet legkisebb pozitív megoldásai. Emiatt az analitikus módszerek csak az osztályszám és a regulátor szorzatára adnak alsó becslést.

Yokoi kiemelt egy speciális esetet. Ha a diszkrimináns $m^2 + 4$ alakú, akkor a regulátor nagyjából $\log m$, és Yokoi azt sejtette, hogy az osztályszám 1 csak $m = 1, 3, 5, 7, 13, 17$ esetén lehetséges. Bíró felismerte, hogy a Baker-féle megoldás működik ebben az esetben is, sőt egyszerűbbé is válik. Ehhez a ± 1 értékű karakterek helyett komplex karaktereket és azok Dirichlet L-függvényeit használta. Egy elemi de fontos lemma segítségével az L-függvények speciális értékét a $m^2 + 4$ diszkriminánsú kvadratikus formák csoportjának egységeleme az úgy nevezett főforma segítségével adja meg véges összegként. Algebrai számok logaritmusai nem jelennek meg és így a kérdés innentől algebrai számelméleti eszközökkel megoldható. Bíró a tőle megszokott szerénységgel alulértékeli a megoldás gondolatgazdagságát, és a felhasznált technikai arzenál mélységét.

Bírónak hasonló eredménye az 1 osztályszámú $4m^2 + 1$ alakú diszkriminánsok meghatározása. A Gauss-féle nézőpontból ezek kiemelkedő és sajnos egyedülálló eredmények a pozitív diszkriminánsú esetben.

2. Automorf formák és összegzési azonosságok

Szummációs formulák alapvető szerepet játszanak a számelméletben. A legismertebb szummációs eljárás talán az integrál-kritériumot pontosító Euler-MacLaurin összegzés amely sima függvény egész helyeken felvett értékeit

integrálok összegeként adja meg, a főtag maga a függvény integrálja. Egy másik típusú összegzés Poisson nevéhez fűződik. Szintén sima függvények egészen felvett értékeit fejezi ki, a függvény Fourier-transzformáltjának egész helyeken felvett értékeinek összegével. Ehhez a Fourier-transzformáltat megfelelő unitér alakban kell megadni. A legismertebb alkalmazás a Jacobi-féle θ -függvény moduláris invarianciája. A részletek nélkül az alapötlet a következő. Az ideális egy-dimenziós körvonal esetén Fourier a trigonometrikus sorok módszerével megadta az alapmegoldás Fourier-sorát. Ugyancsak Fourier a valós számegyenesen is megadta a hőmagot, az hő-egyenlet alapmegoldását, itt a Fourier-integrált használva. Poisson észrevétele az volt, hogy a számegyenesen vett hőmagot az egész számú eltolatokkal összegezve periódikus hőmagot kapunk, ami így meg kell egyezzen a Fourier által megadott Fourier sorral. A módszer persze nem csak a hőmaggal működik, de ez emeli ki legjobban, hogy az egész számok két különböző szerepet játszanak. Egyrészt a periodikussá tételnél az eltolások diszkrét csoportjaként jelennek meg, másrészt a Fourier sorfejtésnél mint az 1-szerint periódusú függvények terén a másodrendű differenciálás operátor sajátfüggvényeinek, (és sajátértékeinek) egy természetes paraméterezését adják.

Magasabb dimenzióban a Poisson összegzés szintén fontos szerepet játszik a Dedekind-féle ζ -függvények függvényegyenletének Hecke általi bizonyításában. Ugyancsak kiemelendő, hogy két-dimenzióban a körszimmetrikus függvényekre a Voronoi-összegzési formula a Gauss kör-probléma hibatagjára ad nemtriviális becslést. Végül szintén két dimenzióban Hecke egy új típusú L-függvényt vezetett be szögtartományba eső Gauss-prímek eloszlását vizsgálva. Ezen Hecke L-függvényeknek az analitikus tulajdonságai szintén a Poisson szummáció következményei és természetes módon vezetnek az automorf formák elméletéhez. Leegyszerűsítve, az automorf formák hiperbolikus síkon a geometriai szempontból maximális szimmetriájú másodrendű differenciál operátor, az úgy nevezett hiperbolikus Laplace-operátor sajátfüggvényei, amelyek emellett az izometriák egy diszkrét csoportjára nézve is invariáns. Ezek a függvények a klasszikus holomorf moduláris formák általánosításai, ez a legtisztábban akkor látszik, ha ezeket a függvényeket a hiperbolikus sík helyett annak mozgáscsoportján a $PSL_2(\mathbf{R})$ Lie-csoporton, vagy annak egy véges fedésén értelmezzük.

A Selberg-féle nyomformula ebben a situációban ad Poisson típusú azonosságot, amely azonban technikai szempontból sokkal nehezebb, részben a csoportok nem-kommutatív jellege miatt, de főként mert a legérdekesebb esetekben a spektrum nem diszkrét. További összegzési formulákat adott meg többek között Eichler, Kuznetsov, Motohashi, mindegyik az automorf formákon túlmutató konkrét aritmetikai alkalmazásokat eredményezett.

Ebbe a környezetbe illeszkedik a Bíró-féle összegzési formula, amit túl összetett ahhoz, hogy itt összefoglaljak. Ezért a formulának csak egy elemét emelem ki ami mutatja a kutatás időszerűségét és jelentőségét. A formula egyik építőeleme automorf formák hármasszorzata. Ez lényegében két forma szorzatának a spektrális kifejtésben szereplő együtthatóit adja meg, és alapvető szerepet játszik a kvantum egyedi ergodicitás sejtés megoldásában. Ez utóbbi sejtés megoldásában jástzott szerepéért Lindenstrausst 2010-ben Fields éremmel díjazták.

Összefoglalva, Bíró András dolgozata a legmagasabb matematikai minőséggel bír. A megoldott problémák mélyek, a matematika nagy tekintélyű kérdéseihez kapcsolódnak, és időszerűségükhöz nem férhet kérdés. A doktori cím megítélését a legnagyobb mértékben ajánlom.

Hivatkozások

- [1] Bíró, András. "Class numbers and automorphic forms." MTA doktori disszertáció.
- [2] Gauss, Carl Fridrich. *Disquisitiones arithmeticae*. Vol. 157. New Haven: Yale University Press, 1966.
- [3] Davenport, Harold, and Hugh L. Montgomery. *Multiplicative number theory*. Vol. 74. New York: Springer, 1980.
- [4] Yokoi, Hideo. *Class-number one problem for certain kind of real quadratic fields*. Department, College, Univ., 1986.
- [5] Iwaniec, Henryk, and Emmanuel Kowalski. *Analytic number theory*. Vol. 53. Providence: American Mathematical Society, 2004.
- [6] Selberg, Atle. "Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series." *J. Indian Math. Soc* 20.956 (1956): 47-87.
- [7] Iwaniec, Henryk. *Spectral methods of automorphic forms*. Vol. 53. American Mathematical Soc., 1995.
- [8] Lindenstrauss, Elon. "Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity." *Annals of Mathematics* (2006): 165-219.