

Bírálóí vélemény Bíró András "Class Numbers and Automorphic Forms" című doktori munkájáról

Az értekezés a számelmélet két fontos és modern területével, a kvadratikus számtestek ideálosztályszámával és automorf formákkal kapcsolatos összegzési formulákkal foglalkozik. A Jelölt legjelentősebb és legnagyobb érdeklődést kiváltó eredményei a valós kvadratikus számtestek osztályszám problémáira vonatkozó tételek, amelyeket az értekezés II. fejezetében tárgyal részletesen.

A kvadratikus számtestek osztályszámának vizsgálata régi klasszikus probléma, a gyökerei egészen Gaussig nyúlnak vissza. Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ahol d egy fundamentális diszkrimináns, és jelölje $h(d)$ a $\mathbb{K}$ test ideálosztályszámát. Ismeretes, hogy $h(d)$ véges, és $h(d) = 1$ pontosan akkor teljesül, ha a megfelelő test algebrai egészeinek körében igaz az egyértelmű prímfaktorizáció.

Imaginárius kvadratikus számtestek esetén Gauss sejtette, hogy az ideálosztályszám a végtelenhez tart, ha $|d| \rightarrow \infty$. Sejtését Heilbronn (1934) bizonyította be, azonban módszere ineffektív volt, azaz nem tette lehetővé az összes 1 osztályszámú imaginárius számtest meghatározását. Ezt később Heegnernek (1952), Bakernek (1966) és Starknak (1967) sikerült belátnia, egymástól függetlenül.

A helyzet teljesen más valós kvadratikus számtestek esetén, vagyis amikor $d > 0$. Gauss ebben az esetben azt sejtette, hogy végtelen sok olyan valós kvadratikus számtest van, amikor az ideálosztályszám 1. Ez máig megoldatlan probléma, így nagy jelentőségűek azok az eredmények, amelyek testek egy végtelen családjában határozzák meg az 1 ideálosztállyal rendelkezőket. Legyen $d = p^2 + 4$ alakú, ahol p egész szám. Bíró András megoldotta a Yokoi-sejtést, megmutatva, hogy

$$h(p^2 + 4) > 1$$

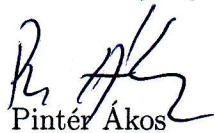
ha $p > 17$. Bizonyításának kiindulópontja Beck (1998) cikkének egyik ötlete volt, azonban jelentősen továbbfejlesztette azt. Beck valós karakterekhez tartozó zetafüggvények speciális értékeire vonatkozó formulákkal dolgozott, Bíró nemvalós karaktereket alkalmaz. Ezek segítségével bebizonyította, hogy ha $d = p^2 + 4$ valamely $p > 1861$ egész számmal, akkor $h(d) > 1$. Ezt követően egy egyszerű BASIC program segítségével megmutatta, hogy az állítás igaz

$17 < p \leq 1861$ esetén is. Megjegyzem, hogy akár a PARI, akár a MAGMA algebrai számelméleti programcsomagok segítségével ennek a részeredménynek a helyessége pillanatok alatt ellenőrizhető.

Módszerét sikerrel alkalmazta egy másik probléma, a Chowla-sejtés (1976) megoldására. Bebizonyította, hogy $h(4p^2 + 1) > 1$, ha $p > 13$. Később mások is alkalmazták Bíró módszerét bizonyos hasonló számtestek családjaira.

A doktori munka eredményeit, azok színvonalát teljes mértékben elegendőnek tartom az MTA doktori cím megszerzéséhez, a nyilvános védés kitűzését és az MTA doktori cím odaítélését melegen javaslom.

Debrecen, 2013. március 7.


Pintér Ákos