

Válasz Pituk Mihály kérdéseire

Köszönöm a bíráló észrevételeit, javaslatait, valamint értékes megjegyzéseit. Külön köszönöm a feltett kérdéseket, amelyek lehetőséget teremtenek a dolgozatban nem érintett érdekes problémák bemutatására. Alább ismertetem a kérdésekre adott válaszomat.

1. Kérdés

A (2.3)-(2.4) peremérték-feladat a (2.1)-(2.2) peremérték-feladatból származik. Van-e hasonló motivációja a (2.27)-(2.28) peremérték-feladatnak?

A (2.1)-(2.2) szemilineáris peremérték-feladat pozitív megoldásairól gömb tartomány esetében Gidas, Ni és Nirenberg sokat idézett cikkükben igazolták, hogy radiálisan szimmetrikusak. Ezért a pozitív megoldások pontos számának meghatározása a közönséges differenciálegyenletre vonatkozó (2.3)-(2.4) peremérték-problémára vezet. A (2.1)-(2.2) probléma p -Laplace operátort tartalmazó kvázilineáris általánosítása a következő.

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \quad B_R\text{-ben} \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \partial B_R\text{-en}, \quad (2)$$

ahol B_R az origó közepű R sugarú gömb. Ennek pozitív megoldásairól Brock igazolta 1998-ban, hogy radiálisan szimmetrikusak. Brock, egyébként általánosabb esetre megfogalmazott tétele a fenti egyenletre vonatkozóan az alábbi formában fogalmazható meg.

1. Tétel. *Legyen f olyan folytonos függvény, melynek csak olyan pozitív gyöke lehet, ahol előjele negatívról pozitívrá változik. Ekkor az (1)-(2) peremérték-feladat pozitív megoldásai radiálisan szimmetrikusak.*

A tétel szerint tehát a fenti kvázilineáris probléma az értekezésben szereplő (2.27)-(2.28) peremérték-feladathoz vezet. Ezt az eredményt a fenti elliptikus feladathoz tartozó parabolikus probléma stacionárius megoldása stabilitásának vizsgálatára alkalmaztam az alábbi dolgozatban.

Karátson, J., Simon, P.L., On the linearized stability of positive solutions of quasilinear problems with p -convex or p -concave nonlinearity, *Nonlin. Anal.* **47** (2001), 4513-4520.

2. Kérdés

Járványterjedések differenciálegyenletekkel való modellezése során azt is figyelembe szokták venni, hogy bizonyos betegségeknek van lappangási idejük. Be lehet-e építeni a hálózaton való járványterjedési modellekbe ezt az időbeli késleltetést?

A hagyományos járványterjedési modellek kompartment típusúak, melyeknél a kompartmenteket a különböző fertőzési állapotban levő egyedek alkotják. A kompartmentek

nagyságára differenciálegyenletek írnak fel, melyekben az egyes tagok a kompartmentek közötti átmenetek leírásáért felelősek. Ezen modellekbe a lappangási idő miatti késleltetés a megfelelő tagokba egyszerűen beépíthető. Másrészt új kompartmentek hozzávételével is modellezhető a lappangási idő. Például a fertőző egyedek I kompartmentjét két vagy több alkompartmentre bontva egyszerűen felírható olyan közönséges differenciálegyenlet-rendszer, amely a lappangási időt is modellezni tudja. Nevezetesen, a fertőzés során az egyed először egy I_1 kompartmentbe kerül, majd innen egy I_2 kompartmentbe, és esetleg további kompartmentekbe, ahogy a betegség különböző állomásain keresztülhalad.

Hálózaton történő járványterjedés esetében a késleltetés kétféleképpen kerülhet be a modellbe. Egyrészt a sztochasztikus szimuláció tartalmazhat késleltetést. Másrészt a momentum lezárással felírt közelítő differenciálegyenletekbe kerülhet késleltetés. Az irodalomban ezen megközelítések még csak érintőlegesen találhatók meg. A szimulációban a késleltetés általánosításának tekinthető, amikor az egyes átmenetekhez tartozó időt nem exponenciális eloszlásból választják. Ekkor a sztochasztikus folyamat nem Markov-folyamat lesz. A szimuláció algoritmusai ekkor dióhéjban a következőképpen adható meg. Az összes lehetséges átmenethez (gyógyulás a fertőző csúcsokban, illetve fertőzés az SI típusú éleken) válasszunk egy véletlen számot valamilyen adott eloszlásból. Ez lesz az átmenetekhez tartozó idő. Ezután azt az átmenetet tekintjük megtörténtnek, amelyhez a legkisebb idő tartozik, majd újra időket rendelünk az összes lehetséges átmenethez, és megismételjük az előző lépést. Ilyen módon egy nem Markov típusú sztochasztikus folyamat egy realizációját kapjuk. Az utóbbi időben ezek az érdeklődés homlokterébe kerültek az irodalomban, példaként tekinthetjük az alább megadott dolgozatokat. Egyelőre általános esetben nem találtak ezekhez tartozó mean-field egyenletet, azaz olyan, átlagolással kapott, differenciálegyenletet, amelynek megoldása jól közelíti a fertőzöttek számának várható értékét. Azonban, ha például a gyógyulás idejét egy τ értékre erősen koncentrált eloszlásból választjuk, azaz a fertőző egyedek nagyjából τ késéssel kerülnek vissza az egészségesek közé, akkor az átlagolás késleltetett differenciálegyenlethez vezet. Az irodalomban egyelőre nincsenek arra vonatkozó eredmények, hogy a késleltetett egyenletek mennyire jó közelítést adnak mean-field egyenletként. Kutatócsoportunk Sussexi Egyetemen dolgozó része jelenleg folytat ezirányú vizsgálatokat.

Robert R. Wilkinson, Kieran J. Sharkey, Message passing and moment closure for SIR epidemics on finite networks *Phys. Rev. E* (under publication).

E. Cator, R. van de Bovenkamp, P. Van Mieghem, Susceptible-infected-susceptible epidemics on networks with general infection and cure times *Phys. Rev. E* **87** (2013), 062816.

P. Van Mieghem, R. van de Bovenkamp, Non-Markovian Infection Spread Dramatically Alters the Susceptible-Infected-Susceptible Epidemic Threshold in Networks *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013), 108701.