

Opponensi vélemény

**Simon L. Péter: Bifurkációk komplex rendszerek
differenciálegyenleteiben**

c. akadémiai doktori értekezéséről

Az értekezés hat fejezetet tartalmaz, terjedelme 129 számozott oldal, a kapcsolódó irodalomjegyzék 195 tételt tartalmaz, amelyből 40 a saját - társ-szerzőkkel vagy önállóan írt dolgozat. Az értekezés jól elkülöníthetően két témakör köré csoportosítható:

- reakció-diffúzió egyenletek kvalitatív vizsgálata
- hálózati folyamatok jellemzése differenciálegyenletekkel.

Az értekezés bevezető fejezete röviden és világosan összefoglalja a jelölt kutatásának előzményeit, motívációit, körülményeit, valamint az elért eredményeket.

Az értekezés második fejezetében egy sokak által vizsgált problémával, a reakció-diffúzió egyenletek stacionárius megoldásaival kapcsolatos eredményeit mutatja be. Itt a

$$\begin{aligned}\Delta u + f(u) &= 0, \\ u|_{\partial B_R} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

peremérték problémát vizsgálja, ahol a B_R tartomány az origó középpontú R sugarú gömb. Gidas-Nirenberg egy 1979-es ([62] az irodalomjegyzékben) dolgozata alapján a feladat redukálható a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó

$$\begin{aligned}ru''(r) + (n-1)u'(r) + rf(u(r)) &= 0 \\ u'(0) &= 0, \quad u(R) = 0\end{aligned}\tag{2}$$

peremérték feladatra. A szerző ez utóbbi pozitív megoldásainak pontos számát kívánja meghatározni. A témát az f alakjára vonatkozó különböző feltételek mellett igen sok neves szerző vizsgálta (lásd a "2.1 Irodalmi áttekintés" szakaszt), akik közül ki kell emelni Pohozaev, Joseph-Lundgren, Brezis és Nirenberg nevét. A vizsgálatok legfontosabb eszközét a Z. Opial és mások által kifejlesztett ún. "time-map" módszert a 2.2 szakaszban mutatja be. A módszer a numerikus analízisből ismert "shooting" technikához hasonlít. A módszerben a fenti másodrendű peremérték probléma helyett a másodrendű differenciálegyenletet az $u(0) = c$, $u'(0) = 0$ kezdeti feltétellel oldjuk meg. Ekkor minden $c > 0$ esetén van pontosan egy $u(\cdot, c) \in C^2$ megoldás. Ezután a

c értékét addig kell változtatni, amíg olyan megoldást nem kapunk, amelynek első gyöke R -ben van. Legyen a T leképezés a következőképpen definiálva:

$$T(c) = \min \{r > 0 : u(r, c) = 0\}; \quad D(T) = \{c > 0 : \exists r > 0 : u(r, c) = 0\}. \quad (3)$$

A fenti peremérték probléma pozitív megoldásainak száma egyenlő a $T(c) = R$ egyenlet c -re kapott megoldásainak számával. A 2.2 szakaszban a "time-map" leképezés monotonitását, értelmezési tartományát és határértékeit jellemzi részben két saját dolgozat (Karátson-Simon [178], Hernandez-Karátson-Simon [183]) eredményei alapján. A 2.3 szakaszban három tételben megadja az (1) probléma megoldásainak számát $n = 1$ esetén a következőképpen.

2.1. Tétel: Legyen f konvex, $f(0) > 0$ és $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} \leq 0$. Ekkor bármely $R > 0$ esetén a (1) problémának pontosan egy megoldása van.

2.2. Tétel: Legyen $n = 1$, $f : [0, \infty) \rightarrow R$, $f \in C^2$ szigorúan konvex függvény, amelyre $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$.

(i) Ha $f(u) > 0$ ($u \in [0, \infty)$), akkor létezik olyan $R_{\text{sup}} > 0$, hogy a (1) peremérték problémának $R < R_{\text{sup}}$ esetén két megoldása, $R = R_{\text{sup}}$ esetén egy megoldása van, $R > R_{\text{sup}}$ esetén pedig nincs megoldása.

(ii) Ha $f(0) > 0$ és az f függvénynek van gyöke a $(0, \infty)$ intervallumban, akkor a (1) peremérték problémának két megoldása van minden $R > 0$ esetén.

(iii) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) > 0$, akkor létezik olyan $R_{\text{sup}} > 0$, hogy a (1) peremérték problémának egy megoldása van $R < R_{\text{sup}}$ esetén, és nincs megoldása, ha $R > R_{\text{sup}}$.

(iv) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) \leq 0$, akkor a (1) peremérték problémának egy megoldása van minden $R > 0$ esetén.

(v) Ha $f(0) < 0$, akkor létezik olyan $R_{\text{sup}} > 0$, hogy a (1) peremérték problémának egy megoldása van $R \leq R_{\text{sup}}$ esetén, és nincs megoldása, ha $R > R_{\text{sup}}$.

2.3. Tétel: Legyen $n = 1$, $f : [0, \infty) \rightarrow R$, $f \in C^2$ szigorúan konvex függvény, melyre $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = L \in (0, +\infty)$ és $R_{\infty} := \frac{\pi}{2\sqrt{L}}$.

(i) Ha $f(u) > 0$ ($u \in [0, \infty)$), akkor létezik olyan $R_{\text{sup}} > R_{\infty}$, hogy a (1) peremérték problémának $R \leq R_{\infty}$ esetén egy megoldása, és $R_{\infty} < R < R_{\text{sup}}$ esetén két megoldása van, $R > R_{\text{sup}}$ esetén pedig nincs megoldása.

(ii) Ha $f(0) > 0$ és f -nek van gyöke a $(0, \infty)$ intervallumban, akkor a (1) peremérték problémának egy megoldása van $R \leq R_{\infty}$, és két megoldása van $R > R_{\infty}$ esetén.

(iii) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) > 0$, akkor létezik olyan $R_{\text{sup}} > R_{\infty}$, hogy a (1)

peremérték problémának nincs megoldása, ha $R \leq R_\infty$, egy megoldása van, ha $R_\infty < R < R_{\text{sup}}$, és nincs megoldása, ha $R \geq R_{\text{sup}}$.

(iv) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) \leq 0$, akkor a (1) peremérték problémának nincs megoldása $R \leq R_\infty$ esetén, és egy megoldása van $R > R_\infty$ esetén.

(v) Ha $f(0) < 0$, akkor létezik olyan $R_{\text{sup}} > R_\infty$, hogy a (1) peremérték problémának nincs megoldása, ha $R \leq R_\infty$, egy megoldása van, ha $R_\infty < R \leq R_{\text{sup}}$, és nincs megoldása, ha $R > R_{\text{sup}}$.

Az idézett tételek az $n = 1$ esetre megadják a probléma teljes leírását és részben általánosíthatók az $n > 1$ esetre is. Az eredményeket a szerző a [178] dolgozatban publikálta.

Az értekezés 2.4 szakaszában ezeket az eredményeket általánosítja az

$$\begin{aligned} (|u'|^{p-2} u')' + f(u) &= 0 \\ u(-R) &= u(R) = 0 \end{aligned}$$

kvázilineáris egyenletre, ahol $p \geq 2$, $f \in C^1[0, \infty)$ és f (szigorúan) p -konvex abban az értelemben, hogy az f függvénynek van abszolút minimuma és bármely $\alpha \in [0, \infty)$ minimum pont esetén a

$$k(u) = \frac{f'(u)}{|u - \alpha|^{p-2}} \quad (u \in [0, \infty), u \neq \alpha)$$

függvény (szigorúan) monoton növekvő. Pontosabban két tételt mond ki az $f(0) \leq 0$ feltétel mellett, amelyekben egy megoldás létezését, ill a megoldás nem létezését mondja ki. Az érdekesnek tűnő $f(0) > 0$ esetet nem részletezi, helyette egy példát mutat be. A fejezet eredményeit és azok bizonyítását is a [182] (Karáton-Simon) dolgozatban publikálta.

A 2.5 szakaszban a (1) peremérték probléma megoldásainak számára ad tételeket az $f(u) = u^{-\alpha} + u^p$, $f(u) = u^p - u^{-\alpha}$ és $f(u) = u^{-\alpha} - u^p$ ($\alpha \in (0, 1)$, $p > 0$) alakú függvényekre. Az eredmények egy része Choi-Lazer-McKenna [41] sejtéseinek igazolása, ill. ezek általánosítása. A fejezet eredményeit a [183], [184] (Horváth-Simon), [185] (Simon) dolgozatokban publikálta.

Az értekezés 2.6 szakaszában a

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u + f(u) \\ h(x)u + g(x)\partial_\nu u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

szemilineáris parabolikus egyenlet stacionárius megoldásainak stabilitását vizsgálja, ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos sima határú tartomány, f szigorúan konvex vagy konkáv $C^2[0, \infty)$, a h és g nemnegatív függvények, amelyek a $\partial\Omega$

határon nem tűnnek el egyszerre. A 2.9 Tételben igazolja, hogy $f'' > 0$ és $f(0) \leq 0$ esetén (4) minden nem-triviális nemnegatív stacionáris megoldása instabilis, illetve, ha $f'' < 0$ és $f(0) \geq 0$, akkor (4) minden nem-triviális nemnegatív stacionáris megoldása stabilis. Az eredmény tkp. Shivaji [33,107] és mások korábbi eredményeinek lényegesen egyszerűbb bizonyítását jelenti. Azonban a szerző ezt több dolgozatban [179], [180] (Karátson-Simon), [181] (Farkas-Simon) is általánosította. Az általánosítások közül egyet a 2.10 Tétel mutat be.

Az értekezés 3. fejezete a

$$\partial_t u = D\partial_{xx}u + f(u) \quad (u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m) \quad (5)$$

rekáció-diffúzió egyenlet $u(t, x) = U(x - ct)$ alakú utazóhullám megoldásainak stabilitását vizsgálja. Az U függvény a

$$DU''(y) + cU'(y) + f(U(y)) = 0 \quad (y = x - ct) \quad (6)$$

közönséges differenciálegyenlet megoldása. A

$$\lim_{-\infty} U = U_-, \quad \lim_{+\infty} U = U_+ \quad (U_-, U_+ \in \mathbb{R}^m)$$

peremfeltételhez tartozó megoldás elnevezése front, ha $U_- \neq U_+$ és pulzus, ha $U_- = U_+$. Utazó hullám megoldások létezését és stabilitását nemlineáris esetben (KPP) egyenlet Kolmogorov, Petrovskij és Piskunov vizsgálták elsőként. Az U utazó hullám stabilis, ha a (5) rendszer u megoldására, amelyre $|u(0, x) - U(x)|$ elegendően kicsi minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, van olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, amellyel $t \rightarrow +\infty$ esetén

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - U(x_0 + x - ct)| \rightarrow 0.$$

A 3.3 szakaszban a (6) egyenlet linearizálásával kapott operátor spektrumát jellemzi, majd a 3.4 szakaszban az $m = 1$ esetre igazolja (3.9 Tétel), hogy ha U szigorúan monoton, $f'(U_-) < 0$ és $f'(U_+) < 0$, akkor az utazó hullám stabilis. Ha U nem monoton, akkor az utazó hullám instabilis. A fejezet eredményeit a szerző a [177] dolgozatban publikálta.

Az értekezés második része (4-5-6. fejezetek) sztochasztikus hálózatokon értelmezett terjedési folyamatok differenciálegyenletekkel történő modellezésével, a modellek minőségi jellemzésével, megoldásával, ill. numerikus verifikálásával foglalkozik. A 4. fejezetben ismerteti a legfontosabb hálózati

járványterjedési modelleket (SIS, SIR, pletyka, aktivitás neuronhálózatban), a véletlen gráfokon alapuló hálózatok típusait, majd a járványterjedéssel kapcsolatos különféle modelleket mutat be, ill. elemesz. A modelleket összehasonlítja szimulációs módszerrel kapott eredményekkel is. A szimulációs módszert a 4.3 szakaszban ismerteti. röviden és utal arra, hogy a 4.2 é 4.3 ábrák ezzel a programmal készültek. Azonnal adódik a kérdés, hogy a fejezet többi ábrája honnan van, illetve az, hogy a megoldások eltérése mekkora? Ez utóbbi nem igazán látható az ábrákról.

Az 5. fejezetben megadja a SIS dinamikát leíró alapegyenletet általános gráfokon (N csúcs, irányítatlan, hurokélmentes gráf), amely egy nagyméretű (2^N egyenlet) blokk tridiagonális mátrixú lineáris differenciálegyenlet rendszer. Az 5.2 szakaszban tárgyalja az. un. összevonási eljárását, amellyel kisebb $O(N^k)$ méretű (de információt megőrző) egyenletrendszer állítható elő. A módszer alkalmazását 4 példán mutatja be az 5.3 szakaszban. Az 5.4 szakaszban az alapegyenlet egyszerűsítésének másik módját, az átlagolási technikát mutatja be.

A 6. fejezetben a teljes gráfra vonatkozó redukált alapegyenlet ((6.2) egyenlet, 90. oldal) közelítő differenciálegyenleteit határozza meg, illetve ezek és a redukált alapegyenlet eltérésére ad becsléseket különféle feltevések esetén igen mély eszközök felhasználásával. E fejezetben is utal az elméleti eredmények szimulációval kapott verifikálására is. A második rész eredményeit nagyszámú, a matematikai biológia vezető lapjaiban közölt dolgozatban publikálta.

Simon L. Péter az értekezésben jelentős alkalmazási és elméleti munkásságot mutat be. Az értekezésben idézett 40 dolgozatán túlmenően még nagyszámú alkalmazási és elméleti jellegű dolgozatot publikált aktuális és nehéz témákból. Az értekezés első felében reakció-diffúzió egyenletekkel kapcsolatos jelentős elméleti eredményeket fogalmazott meg, a második felében pedig jelentős hálózati modellezési munkát (modell felállítása, kvalitatív vizsgálata, verifikálása) mutatott be. Sajnos az értekezésben csak röviden jelezte az első témakörben elért kémiai alkalmazásokat, amelyek szintén kiváló helyeken kerültek publikálásra.

Az értekezés alapvetően jól megírt és tagolt munka, kevés és jelentéktelen elírás van benne. Mindazonáltal megjegyzem, hogy Fife [59] szám alatt jelzett munkájának nem az értekezésben megadott cím az igazi címe. Hiányolom a dolgozattól a számítógépes eredmények részletesebb bemutatását, különösen pedig a hálózattal kapcsolatos szimulációs programot.

Az értekezés első részével kapcsolatban kérdezem, hogy a két megoldás

létezése hogyan befolyásolhat egy numerikus megoldó algoritmust?

Összegzés

Az értekezésben foglalt eredmények nemzetközi összehasonlításban is jelentősek. Az eljárás folytatását és az MTA doktora cím odaítélését javaslom.

Budapest, 2013. október 6.

Dr. Galántai Aurél
egyetemi tanár
az MTA doktora