dc_177_11

Dobos Imre

Vállalati termelési-készletezési stratégiák környezetvédelem figyelembevételével: Optimális irányítási megközelítés

dc_177_11

Logisztika és Ellátási Lánc Menedzsment Tanszék
Vállalatgazdaságtan Intézet

© Dobos Imre

dc_177_11

Budapesti Corvinus Egyetem

Gazdálkodástudományi Kar

Vállalati termelési-készletezési stratégiák környezetvédelem figyelembevételével: Optimális irányítási megközelítés

MTA doktori értekezés

Dobos Imre

Budapest 2012

Tartalomjegyzék

0. Előszó **11**

1. A környezeti tényezők beépítése a termeléselméletbe **15**

1.1. Bevezetés **15**

1.2. A környezeti hatások integrálása a vállalatgazdasági termeléselméletbe **18**

1.2.1. A termelési tényező-termék rendszer környezetorientált kibővítése **20**

1.2.2. Technológiailag hatékony környezeti tevékenységek **23**

1.2.3. Gazdaságilag hatékony környezeti tevékenységek **24**

1.3. A kormányzati környezetvédelmi politika hatásai a vállalat termelésére **24**

1.3.1. Közvetlen és közvetett környezetvédelmi szabályozás hatása a vállalati termelésre **25**

1.3.2. A szennyezési jogok hatása a vállalati termelési politikára **26**

1.3.3. Az újrafelhasználás hatása vállalati termelésre **26**

1.4. Összefoglalás **27**

2. A kormányzati környezetvédelmi szabályozás hatása a vállalati termelési-készletezési stratégiára **28**

2.1. A környezeti szabályozás hatása a termelési-készletezési rendszerekre egy HMMS-típusú modellben **29**

2.1.1. Bevezetés **29**

2.1.2. A modell **29**

2.1.3. Szennyezési díjak **33**

2.1.3.1. Lineáris szennyezés **34**

2.1.3.2. Négyzetes szennyezés **37**

2.1.4. Szennyezési normák **39**

2.1.5. Következtetések **41**

2.2. A környezeti szabályozás hatása a termelési stratégiára: Folytonos idő modell, konkáv költségekkel **42**

2.2.1. Bevezetés **42**

2.2.2. A modell 42
2.2.3. Szennyezési díjak 48
2.2.4. Szennyezési normák 50
2.2.5. Következtetés 51
2.2.F.1. Függelék 52
2.3. A környezeti szabályozás hatása a termelési stratégiára az Arrow–Karlin modellben 53
2.3.1. Bevezetés 53
2.3.2. A modell 53
2.3.3. Optimális termelési stratégia 55
2.3.4. Következtetés 56

3. A szennyezési jogok bevezetésének hatása a vállalati termelési stratégiára 57
3.1. Szennyezési jogok a vállalati termeléselméletben 58
3.1.1. Bevezetés 58
3.1.2. A vizsgált modellek 59
3.1.3. A problémák matematikai struktúrája szennyezési joggal 62
3.1.4. Az új technológiák összehasonlítása 63
3.1.4.1. Optimális termelési stratégiák a szennyezési jog bevezetése után 64
3.1.4.1.1. A vállalat nem változtat a technológián a szennyezési jog bevezetése után 64
3.1.4.1.2. A vállalat a leghatékonyabb technológiát vezeti be 66
3.1.4.2. Váltson-e technológiát a vállalat a szennyezési jog bevezetése után? 68
3.1.5. Összegzés 68
3.2. Az emisszió-kereskedelem hatása a vállalat termelés-készletezési stratégiájára az Arrow-Karlin modellben 70
3.2.1. Bevezetés 70
3.2.2. A modell értékesíthető szennyezési jogokkal 71
3.2.3. A modell néhány tulajdonsága 72

3.2.4. A modell megoldása és néhány további jellemzője 74
3.2.5. Számpélda 75
3.2.6. Következtetés 78
3.3. Értékesíthető szennyezési jogok és a vállalat termelés-készletezési stratégiája 79
3.3.1. Bevezetés 79
3.3.2. A szennyezési jogokkal bővített modell 80
3.3.3. A modell megoldása 81
3.3.4. Számpélda 83
3.3.5. Következtetés 85

4. Termelési-készletezési politikák a visszutas logisztikában 86
4.1. Termelés-készletezési stratégiák lineáris, visszutas logisztikai rendszerekben 87
4.1.1. Bevezetés 87
4.1.2. A modell 87
4.1.3. Segédproblémák 90
4.1.3.1. A lineáris újramegmunkálási modell megmunkálás és hulladékkezelés nélkül 90
4.1.3.2. A lineáris újramegmunkálási modell megmunkálással és hulladékkezelés nélkül 91
4.1.3.3. A lineáris újramegmunkálási modell megmunkálással és hulladékkezeléssel 94
4.1.4. A modell tulajdonságai 96
4.1.5. A modell megoldása 100
4.1.6. Számpélda 106
4.1.7. Következtetés 111
4.1.F.1. függelék: A „fordított” lineáris termelés-készletezési feladat 112
4.1.F.2. függelék: A „direkt” lineáris termelés-készletezési modell, általánosított kereslettel 114
4.1.F.3. függelék: A „fordított“ lineáris termelés-készletezési modell, általánosított kereslettel 115
4.2. Optimális termelés-készletezési stratégia egy Arrow-Karlin típusú

visszutas logisztikai rendszerben **116**

4.2.1. Bevezetés **116**

4.2.2. A modell **116**

4.2.3. A modell néhány tulajdonsága **117**

4.2.4. A modell megoldása **120**

4.2.5. Az optimális trajektória tartományainak a meghatározása **122**

4.2.6. Egy előrehaladó algoritmus az optimális trajektória megszerkesztésére **125**

4.2.7. Következtetés **128**

4.2.F.1. Függelék: A „fordított“ Arrow-Karlin modell **129**

4.3. Optimális termelés-készletezési stratégiák egy HMMS-típusú, visszutas logisztikai rendszerben **133**

4.3.1. Bevezetés **133**

4.3.2. A modell **134**

4.3.3. A „fordított” HMMS-modell **136**

4.3.4. A modell megoldása **137**

4.3.5. A modell néhány jellemzője **140**

4.3.6. Számpéldák **142**

4.3.7. Következtetés **146**

4.3.F.1. Függelék **147**

5. Összefoglalás **148**

Irodalomjegyzék **149**

Ábrák jegyzéke

1.1. ábra. Input- és output kategóriák (Dyckhoff (1992)) 21

1.2. ábra. A termelés mennyiségi kiterjesztett ábrázolása (Kistner-Steven (1993)) 21

1.3. ábra. A termelés értékalapú ábrázolása (Kistner-Steven (1993)) 21

1.4. ábra. A javak összgazdasági kívánatossága (Kistner-Steven (1993)) 22

1.5. ábra. A termékek csoportosítása kívánatosság alapján (Dinkelbach-Rosenberg (1994)) 22

1.6. ábra. A javak csoportosítása kívánatosság szerint (Dinkelbach-Rosenberg (1994)) 23

2.1.1. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben (ρ=0; 5) 33

2.1.2. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben lineáris díj esetén (τ=0; 40) 36

2.1.3. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben, négyzetes esetben (τ=0; 5) 38

2.1.4. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben, négyzetes esetben (τ=0; 5) ($I_1(t)=0.2$; $P_1(t)=1.1$; $S(t)=1.3$) 39

2.1.5. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben szennyezési normák esetén 41

2.2.1. ábra A $\psi(t)$ változó egy lehetséges útja 45

2.2.2. ábra Az optimális termelési stratégia az általános konkáv modellben 47

2.2.3. ábra Az optimális termelési stratégia a számpéldában 50

2.2.4. ábra Az optimális termelési stratégia szennyezési norma mellett és nélkül 51

2.3.1. ábra Az együttes kibocsátási díj-norma függvény 54

2.3.2. ábra Egy lehetséges termelési stratégia 56

3.1.1. ábra: Anyagáramlás a modellben 60

3.2.1. ábra Az anyagok és költségek áramlása a modellben 71

3.2.2. ábra Az optimális termelés és kereslet 76

3.2.3. ábra Az optimális készletszint az emisszió kereskedelem bevezetése előtt és után 77

3.3.1. ábra Az anyagok és költségek áramlása a modellben 80

3.3.2. ábra Az optimális termelés és kereslet 84

3.3.3. ábra Az optimális készletszint az emisszió kereskedelem bevezetése előtt és után 84

4.1.1. ábra Anyag- és költségáramlás a lineáris modellben 89

4.1.2. ábra Az optimalitási feltételek grafikus megjelenítése 103

4.1.3. ábra A $\psi_1(t)$ adjungált változó egy lehetséges útja 105

4.1.4. ábra A $\psi_2(t)$ adjungált változó egy lehetséges útja 105

4.1.5. ábra Az $\tilde{I}(t)$ függvény az 1. példában 107

4.1.6. ábra Kereslet és visszavételi ráta az 1. példában 108

4.1.7. ábra Az $\tilde{I}(t)$ függvény a 2. példában 109

4.1.8. ábra Kereslet és visszavételi ráta a 2. példában 109

4.1.9. ábra Az $\tilde{I}(t)$ függvény a 3. példában 110

4.1.10. ábra Kereslet és visszavételi ráta a 3. példában 111

4.2.1. ábra Az anyagok és költségek áramlása a modellben 117

4.3.1. ábra Anyagáramlás a modellben 135

4.3.2. ábra A kereslet és visszavételi ráta az 1. példában 142

4.3.3. ábra Az optimális megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta az 1. példában 143

4.3.4. ábra A készletek optimális és célszintje az 1. raktárban, az 1. példában 143

4.3.5. ábra A készletek optimális és célszintje az 2. raktárban, az 1. példában 144

4.3.6. ábra A kereslet és visszavételi ráta a 2. példában 144

4.3.7. ábra Az optimális megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta a 2. példában 145

4.3.8. ábra A készletek optimális és célszintje az 1. raktárban, az 2. példában 145

4.3.9. ábra A készletek optimális és célszintje az 2. raktárban, az 2. példában 146

Táblázatok jegyzéke

2.1.1. táblázat A 2.1. fejezet példáiban használt paraméterek 32

F.2.2.1. táblázat A példaként alkalmazott paraméterek leírása 52

4.1.1. táblázat Az 1. példához használt adatok 106

4.1.2. táblázat A 2. példához használt adatok 108

4.1.3. táblázat A 3. példához használt adatok 110

F.4.3.1. táblázat A példákhoz használt paraméterek leírása 147

0. Előszó

Környezetvédelmi problémák felmerülése és kezelése, valamint az ezzel kapcsolatos problémák közgazdasági vizsgálata mintegy ötven évre tekint vissza. Ezen elemzések többsége a környezetszennyezés nemzetgazdasági hatásaira és annak kezelésére tér ki. A vizsgálatok elsősorban azt taglalják, hogy kormányzatnak milyen szabályozó eszközöket kell alkalmaznia, hogy elkerülje, vagy legalábbis csökkentse a gazdaság által kibocsátott szennyező anyagok mennyiségét. A kutatások a vállalatok oldaláról azt kísérlik meg előrejelezni, hogy egyes mikroökonómiai modellekben milyen módon reagálnak a vállalatok meghatározott szabályozási eszközökre. Ezek a vállalati viselkedést modellező vizsgálatok szinte kizárólag a vállalatok statikus reakcióit mutatják be e szabályozási eszközökre, és arra próbálnak meg választ adni, hogy az adott eszközzel elérhetőek-e azok a célok, amelyeket a kormányzat maga elé tűzött ki.

A disszertáció célja az, hogy a vállalatok termelési-készlezetési stratégiájában fellépő változásokat elemezze környezetvédelmi mellékfeltételek figyelembe vétele mellett. Mivel a termeléstervezési folyamatok időben zajlanak le, ezért főként *dinamikus* oldalról vizsgáljuk a vállalati reakciókat.

A vállalatok a környezetvédelmi kihívásokra kétféle módon reagálhatnak: passzívan, és aktívan.

Passzív reakció esetén a vállalat egy alkalmazkodási folyamatot hajt végre az aktuálisan vizsgált kormányzati környezetvédelmi szabályozásra. Ez azt jelenti, hogy a vállalkozás ekkor nem önállóan dönt a saját a szennyezési stratégiájáról, hanem előre megadott paramétereknek próbál megfelelni. A kormányzat ekkor *direkt (közvetlen, normatív) szabályozás*sal, normák rendszerével élhet, ami modellezési oldalról egy kibocsátási korlát felállítását jelenti. A másik fontosabb szabályozási módszer az *indirekt (közvetett, gazdasági) szabályozás*, amikor externalizálni próbálják a szennyezést egy, a kormányzat által meghatározott, a kibocsátás egységére kivetett adóval. (A továbbiakban nem foglalkozunk a vállalati emissziók mérésének problémájával. Feltételezzük, hogy a mérhetőség problémája tökéletesen megoldott.)

Aktív reakciók esetén a vállalat maga határozza meg, hogy mekkora emisszióval él, a rendelkezésre álló szennyezési mértéket maga szerzi be, a szennyezési mennyiséget (kvázi) piacon eladható-beszerezhető áruknak tekintve. Ezt azért nevezhetjük aktív reakciónak, mert a vállalat nem megfelel egy kívülről adott paraméternek, hanem piaci alapon dönt a tervezési horizonton az emissziók nagyságáról. Az ilyen eszközöket és az általa létrehozott piacot a *szennyezési jogok piac*ának nevezzük. Ez a gazdasági szabályozási módszer tekinthető a normatív és gazdasági szabályozás keverékének is, ugyanis a termelő vállalat maga szerzi be piaci áron a szennyezési kibocsátási korlátját.

Aktív vállalati környezetvédelmi reakciónak tekinthető a *visszutas logisztika* is. A visszutas logisztika során a vállalatok visszaveszik a fogyasztási folyamatból visszaáramló használt termékeiket, és azt szétszerelve a keletkező részegységeket, vagy alkatrészeket a saját vagy más vállalati folyamataikban újrahasználják. Ezt azért nevezhetjük aktív reakciónak, mert az esetek jelentős részében a vállalatok piaci alapon vásárolják vissza az általuk gyártott, de fogyasztási folyamatból már kivont termékeket, hulladékokat. (A dolgozatban nem foglalkozunk azzal az esettel, amikor a vállalatnak visszavételi kötelezettséget ír elő a

döntéshozó. Az ilyen problémák modellezési szempontból nem eredményeznek szignifikánsan más modellezési feladatot.)

A dolgozat egésze tehát e három vállalati környezetvédelmi reakciót vizsgálja főként dinamikus optimalizálási modellek keretében. A dinamikus optimalizálási modellek megoldásához az orosz matematikus, Lev Szemjonovics *Pontrjagin* nevéhez fűződő *maximumelv*et használjuk, mint optimalizálási módszert.

A dolgozat eredményei 1996 és 2005 között különböző egyetemeken folytatott kutatásaim során keletkeztek. A környezetvédelmi téma fontosságára és időszerűségére figyelmemet Prof. Dr. Knut Richter hívta fel, aki mellett tudományos munkatársként dolgoztam 1994 és 1999 között az Europa-Universität Viadrina Frankfurt (Oder) egyetemen, s munkakapcsolatunk azóta is tart. Prof. Dr. Klaus-Peter Kistner mellett az Universität Bielefeld egyetemen 1999-2000-ben három félévet töltöttem el, ahol főleg a visszutas logisztikai folyamatok optimális irányítással történő modellezhetőségét vizsgáltam. Ezúton szeretném köszönetemet kifejezni mindkettőjüknek szakmai tanácsaikért. 2001 és 2005 között a dolgozat egy fontos részének megírását a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetemen, illetve a Budapesti Corvinus Egyetemen fejeztem be. Külön köszönettel tartozom Dr. Czakó Erzsébet egyetemi docens asszonynak, a Vállalatgazdaságtan Intézet igazgatójának azért, hogy az utóbbi években kutatásaim hátterének feltételeit biztosította számomra.

A disszertáció négy fejezetből tevődik össze. Az első fejezetben azt mutatom be, hogy a német vállalatgazdaságtani kutatások hogyan emelték be a környezetvédelmi problémákat a vállalati termeléselméletbe (Betriebswirtschaftliche Produktionstheorie). Meg kell jegyeznem, hogy ez egy jellegzetesen német nyelvterületre (Németország, Ausztria és Svájc) jellemző fejlődési trend, amely a nyolcvanas és kilencvenes években zajlott le. Nagyon sok tekintetben a mai nemzetközi kutatásokat is megelőzve zajlottak ezek a vizsgálatok. Napjaink nemzetközi konferenciáin köszön vissza az a kérdéskör, amelyet a német termelési-logisztikai kutatásokban már láthattunk. Meg kell jegyeznünk azt is, hogy a klasszikus német felsőoktatásban a termelésmenedzsmentet (Produktionswirtschaft, Produktionsplanung) úgy vezetik be, hogy vállalatgazdaságtani termeléselméletet oktatnak egy félévig, és csak ezután adják elő az angolszász világban ismert *Operations Management*-hez hasonlító problémaköröket. Ezt azért mutatom be, mert – ismereteim szerint – a magyar termelési-logisztikai kutatók-oktatók alig ismerik a német nyelvterület eredményeit.

A második fejezetben a vállalatok termelési-készletezési stratégiáját elemzem a kormányzati direkt és indirekt szabályozás esetén. Itt arra keresem a választ, hogy a két szabályozási eszköz „simítja-e” a vállalati termelési politikát, azaz a szennyezési csúcsokat sikerül-e elkerülni, amivel a környezetszennyezés nem is összessége, de kilengése, fluktuációja csökkenthető. Két alfejezetben más-más költségfüggvényt feltételezve keresem a feltett kérdésre a választ, míg a harmadik alfejezet egy kombinált eszköz működését mutatja be. Ebben a modelltípusban a szennyezési norma alatt nem kell fizetni kibocsátási díjat (adót), de ha a vállalat átlépi ezt a normát, akkor minden egységnyi szennyezésért fizetnie kell. Ez utóbbi modellt Yigal Gerchak izraeli kutató javaslatára végeztem el 1996-ban.

A következő fejezet három részmunkája a szennyezési jogok bevezetésének hatását elemzi. Arra a kérdésre keresünk választ, hogy ez a piackonform környezetvédelmi eszköz simítja-e a termelési-készletezési stratégiát. Meg kell jegyeznünk, hogy e két modell dinamikus környezetet tételez fel, az első résztanulmány kivételével. Makroökonómiai termeléselméleti

dolgozatok eddig nem elemezték a szennyezési jogokat, ezért ez új megközelítésnek tekinthető.

A negyedik, utolsó fejezetben a visszutas logisztika problémáit elemeztük dinamikus kontextusban. Ez a rész is, mint a megelőző két fejezet is, három modellt tartalmaz. Az első alfejezetben egy olyan visszutas logisztikai modellt vizsgáltunk, amelynek a költségfüggvénye egy lineáris függvény. A következő rész egy Arrow-Karlin típusú modellt vizsgált. Az utolsó részfejezet egy célprogramozási modellt mutat be, azaz a tervezési időhorizonton elérendő termelési és készletezési szintek a tervezési periódus elején ismertek. Az ilyen modelleket nevezi az irodalom HMMS- (Holt-Modigliani-Muth-Simon-)típusú modelleknek. A három modellből az első és a harmadik kezeli azt az esetet is, amikor a visszaáramló anyagokat a vállalat - például minőségi hibák miatt – nem használja fel, azaz nem munkál meg újra.

A disszertációba került dolgozatok nagyobbik része eddig angolul jelent meg, így magyar nyelven e dolgozat keretein belül érhető el először. A dolgozatba felvett munkák nem egyeznek meg teljesen a folyóiratokban elfogadottakkal és megjelentekkel, hanem bővebb változatok, amelyek műhelytanulmányként kerültek kiadásra. Ezt azért adjuk ebben a formában közre, mert ezzel a problémák struktúrája jobban áttekinthetővé válik. A megjelent változatok ugyanis sokszor azért lettek rövidebbek, mert a kiadók sokszor korlátozzák a megjelentetett dolgozatok oldalszámát.

A disszertációba felvett dolgozatok összes idézettsége 182, míg összesített impaktfaktora 3,094. A disszertáció a következő dolgozatokat tartalmazza a(z) (al)fejezetek számával együtt:

1. fejezet.
A környezeti tényezők beépítése a termeléselméletbe, 93. Műhelytanulmány, (2012), BCE Vállalatgazdaságtan Intézet, Versenyképesség Kutató Központ
Független idéző: - Impaktfaktor: -

2.1. alfejezet
Production-Inventory Control under Environmental Constraints, International Journal of Production Economics 56-57 (1998), 123-131
Független idéző: 15 Impaktfaktor: 0,166

2.2. alfejezet
Production strategies under environmental constraints: Continuous time model with concave costs, International. Journal of Production Economics 71 (2001), 323-330
Független idéző: 4 Impaktfaktor: 0,288

2.3. alfejezet
Production Strategies under Environmental Constraints in an Arrow-Karlin Model, International Journal of Production Economics 59 (1999), 337-340
Független idéző: 6 Impaktfaktor: 0,227

3.1. alfejezet
Szennyezési jogok hatása a vállalati termelési stratégiára, 25. sz. Műhelytanulmány (2002), Vállalatgazdaságtan tanszék, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem
Független idéző: 1 Impaktfaktor: -

3.2. alfejezet
The effects of emission trading on production and inventories in the Arrow-Karlin model, International Journal of Production Economics (2005), 93-94, 301-308
Független idéző: 11 Impaktfaktor: 1,008

3.3 alfejezet
Tradeable permits and production-inventory strategies of the firm, International Journal of Production Economics 108 (2007), 329-333
Független idéző: 6 Impaktfaktor: 0,995

4.1. alfejezet
Production-Inventory Strategies for a Linear Reverse Logistics System, Discussion Paper No. 431 (1999), 30 S., Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Universität Bielefeld
Független idéző: - Impaktfaktor: -

4.2. alfejezet
Optimal Production-Inventory Strategies for a Reverse Logistics System, (with K.-P. Kistner), In: Dockner, E. J., Hartl, R. F., Luptáčik, M., Sorger, G. (Eds.): Optimization, Dynamics, and Economic Analysis: Essays in Honor of Gustav Feichtinger, (2000), Physica-Verlag, Heidelberg, New York, 246-258
Független idéző: 8 Impaktfaktor: -

4.3. alfejezet
Optimal production-inventory strategies for a HMMS-type reverse logistics system, International Journal of Production Economics 81-82 (2003), 351-360
Független idéző: 131 Impaktfaktor: 0,410

Az disszertáció olvasójának talán gyakran az az érzése támad, hogy korábbi fejezetekben bizonyos részeket már olvasott. Ez valóban így van. Mivel nem kívántam a már publikált dolgozatokat egymással összemosni, ezért meghagytam az egyes részek függetlenségét, az ismétlések ellenére is, ami – remélem – nem zavarja a dolgozat egészének érthetőségét.

1. A környezeti tényezők beépítése a termeléselméletbe

1.1. Bevezetés

A fejezet célja, hogy áttekintést nyújtson azokról a kutatásokról, amelyek a német nyelvű országokban (Németország, Ausztria és Svájc) folytak a nyolcvanas és kilencvenes években, és a környezetvédelmet próbálták meg integrálni a termelési és logisztikai oktatásba. Mindezt azért tűztem ki célul, hogy az 1994-ben elkezdett kutatásaim hátterét, és az okokat kíséreljem meg felvázolni. A fenti két információ, vagyis a német nyelvterület és az 1994-es év azért fontos a számomra, mert a bemutatandó disszertációban szereplő dolgozatok nagy része az 1994 és 2004 közötti tevékenységemet reprezentálja, és publikációimból nyújt egy áttekintést. Az említett időintervallumban végzett tevékenységem három egyetemhez kapcsolódik: az Europa-Universität Viadrina Frankfurt (Oder), az Universität Bielefeld és a Budapesti Corvinus Egyetem intézményekhez.

A környezetvédelem értéktermekő folyamatok menedzsmentjébe (termelésbe és logisztikába) történő beépítésével 1994 májusában találkoztam először. 1994 májusa és 1999 áprilisa között tíz szemesztert töltöttem el Frankfurt (Oder)-ben a helyi egyetem tudományos munkatársaként a Prof. Dr. Knut Richter vezette Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftlehre, insb. Industriebetriebslehre (szabad fordításban: Általános Vállalatgazdaságtan, különösen Ipargazdaságtan tanszék) munkatársaként. Richter professzor hívta fel arra a figyelmemet, hogy a tanszéke a szokásos és általános termelésgazdaságtani oktatási és kutatási témák mellett a környezeti problémák termelési és logisztikai folyamatokra gyakorolt hatását is vizsgálja. Kutatási célként a téma számomra ettől az időponttól vált érdekessé. A tanszéken ekkor kettős célt fogalmaztunk meg:

- egyrészt a kormányzati környezetvédelmi szabályozás hatásainak a vállalati termelési politikára gyakorolt hatásainak vizsgálatát,
- a környezetvédelem vállalatgazdaságtani termeléselméletbe (Betriebswirtschaftliche Produktionstheorie) történő integrálásának kutatása, valamint
- az újrafelhasználás hatásainak elemzését, különös tekintettel annak a vállalati termelési-készletezési politikára kifejtett hatásának elemzését.

Richter professzor kutatási módszertana a kvantitatív módszereket részesítette előnyben, ezért módom nyílt az egyetemünkön (akkori Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem) végzett korábbi kutatásaimat továbbfolytatni, és azt a környezeti témákkal kiterjeszteni. Ez volt az a peremfeltétel, ahonnan akkor elindultam.

A Frankfurt (Oder)-i egyetem után további három szemesztert töltöttem a Bielefeld-i egyetemen Prof. Dr. Klaus-Peter Kistner mellett a Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre und Unternehmensforschung (Vállalatgazdaságtan és Operációkutatás) tanszéken, mint tudományos tanácsos. Ebben a másfél évben továbbfolytathattam korábbi kutatásaimat, és sikerült a statikus környezettudatos termeléselméletet a dinamika irányába kiterjeszteni.

Mivel a magyar vállalatgazdaságtanban a termeléselméleti kérdések nem olyan hangsúlyosak, mint a német nyelvterületen, ezért az ottani kutatásaimat itthon kevéssé volt alkalmam hasznosítani. Mégis úgy gondolom, hogy hasznos lehet tapasztalataim közreadása, mert ezzel egy másik gazdálkodástani kultúrkört ismerhet meg a kutató, amely eltér az általánosabban ismert angolszász gondolatvilágtól. Hazatérésem után a kutatásaim súlypontja az

újrafelhasználási folyamatok maradt, természetesen szoros kutatási kapcsolatot fenntartva Richter professzorral. Korábbi eredményeimet az 2007-ben keletkezett doktori munkámban összegeztem. Ezek a kutatások az optimális tételnagyság újrafelhasználással történő kiterjesztésére estek.

Talán sokakban felmerül a kérdés, hogy a német nyelvterületen miért is olyan hangsúlyos a vállalatgazdasági termeléselmélet, amely a közgazdaságtanban, azon belül is a mikroökonómiában is oktatott téma. Erre a legegyszerűbb válasz talán az lehetne, hogy azért, mert ez Németországban így alakult ki, és a német gondolkodás mindig is nyitott volt az elméleti megközelítésekre. Ez a válasz, akármilyen egyszerű is, közel jár a valósághoz. A német gazdálkodástani oktatásra jellemző, hogy az oda bekerülő hallgatóknak először egy áttekintést adnak a gazdálkodástan minden területéről. Az ilyen tárgyak neve majdnem minden egyetem Einführung in die Betriebswirtschaftslehre (Bevezetés a gazdálkodástudományba). A német nyelvterület talán legbefolyásosabb ilyen alapművét Erich Gutenberg (1951, 1983) publikálta. Ebben közel a mai közgazdaságtani termeléselmélet fogalmaival írja le az ipari termelés egy modelljét. Ettől lehet számítani a vállalatgazdaságtani termeléselmélet kezdetét a német nyelvterületen, ellentétben a közgazdasági termeléselmélettel (Volkswirstchaftliche Produktionstheorie). A termeléselmélet két ága között néha nagyon nehéz határt vonni. Az alapfogalmak nagyrésze egyezik a két diszciplínában, talán azzal az eltéréssel, hogy a vállalatgazdasági termeléselméletben több alkalmazás és empíria van. Összegezve, történeti okokból maradt a német gazdálkodástudományi oktatás része a termeléselmélet. Hozzá kell azonban tenni, hogy a legújabb német kutató nemzedék egyre inkább elfordul ettől a tradíciótól, és kezd amerikai mintákat követni, vagyis a német vállalatgazdasági termeléselmélet kiszorul az oktatásból és kutatásból, mert annak eredményeit nehezebb angol nyelvű folyóiratokban publikálni. Csak apró példa erre. A német nyelvterület vezető gazdálkodástani folyóirata a Zeitschrift für Betriebswirtschaft 2013 januárjától kizárólag csak angol nyelvű cikkeket fogad el publikálásra, és a folyóirat nevét is Journal of Business Economics-ra cseréli.

Ebben a dolgozatban arra teszek kísérletet, hogy bemutassam a termeléselmélet környezetvédelemmel történő kiterjesztését, valamint azt a módot, ahogyan ezt a német nyelvterület kutatói tették. Alapvetően három iskola és kutatói végezték el a termeléselmélet környezettel történő kibővítését. Az első ilyen irányú próbálkozást Kistner (1983) tette meg, aki a környezetvédelmet először építette be a termeléselméletbe az tevékenységelemzésen (activity analysis) keresztül. A tevékenységelemzés kidolgozása Koopmans (1951) nevéhez fűződik. Ezt a korai munkáját folytatta aztán Kistner (1993) tovább 1993-as termeléselméleti tankönyvében, amelyben külön fejezetet szentel a környezet és a termelés kapcsolatának. Hozzá kell tennünk, hogy ezen eredmények elterjesztésében nagy szerep volt Marion Steven professzorasszonynak is, aki disszertációját, majd habilitációját is ebből a témakörből írta. (Kistner-Steven (1993)) Ezután Dyckhoff (1992, 1993) folytatta a két diszciplína, tehát a termeléselmélet és környezetvédelem összekötését. Az ő talán legnagyobb érdeme talán a termeléselmélet termelési faktor és termék rendszerének alapos, szisztematikus vizsgálata volt. A tevékenységelemzés nála is megjelenik, de azt már Kistner (1983) használta a termelés környezeti hatásainak vizsgálatára. Végül, Dinkelbach és Rosenberg (1994) voltak, akik a tevékenységelemzés lineáris programozási megoldásaira hívták fel a figyelmet. Hangsúlyoznom kell, hogy amit most ismertetek az csak a „jéghegy csúcsa”, ugyanis a 2000-es évek elejéig számtalan doktori munka született a három iskolán belül, amelyeket a terjedelmi korlátok miatt nem tudok ismertetni.

A vállalatgazdasági termeléselmélet környezettel történő kibővítése alapvetően három irányban érhető el, anélkül, hogy teljesen új elméletet kellene építeni. Mivel a következő munka a termeléselméletet a tevékenységelemzés szemszögéből elemzi, ezért nem fogjuk a továbbiakban külön kiemelni, hogy ez egy tevékenységelemzés alapú termeléselmélet. A klasszikus termeléselmélet alapvetően három fontos pilléren nyugszik:

- a termelési tényezők és a termékek elmélete,
- a technológiailag hatékony tevékenységek elmélete, azaz a termelési függvények elmélete, és
- gazdaságilag hatékony tevékenységek elmélete, ami jelenthet költségminimális tevékenységeket és nyereségmaximális tevékenységeket.

Amint látható, e három elméleti építmény szorosan egymásra épül. Először a vizsgálat objektumát határozza meg, azaz a gazdasági szempontból figyelembe veendő termékek és szolgáltatások körét, valamint a technológiailag megvalósítható tevékenységeket, majd ezt a tevékenységi halmazt leszűkítjük azokra a tevékenységekre, amelyek technológiailag a leghatékonyabbak, végül a technológiailag hatékony tevékenységek (termelések) közül a bevétel-ráfordítás szempontjából leghatékonyabb termeléseket választjuk ki.

A környezettudatos termeléselmélet kidolgozásához, amint korábban megállapítottuk, nem szükséges egy teljesen új elmélet, csak a már létező építményünket kell bővítenünk, hogy a környezetvédelem is kezelhető legyen benne. A dolgozat további része ezt a bővítési lehetőséget írja le a korábban idézett szerzők munkáira alapozva. Ezzel foglalkozik a dolgozat második szakasza. A harmadik rész azt fogja vizsgálni, hogy a kormányzati környezeti szabályozást hogyan lehet az ismertetett termeléselméleti modellbe beépíteni. Ebben a részben három irányra térünk ki hangsúlyozottan:

- közvetlen (normatív) és közvetett (gazdasági) szabályozások hatásának vizsgálata a termelésre (Kerekes-Szlávik (1996), Kerekes (2007), vagy Wicke (1993)),
- szennyezési jogok hatása a vállalati termelésre (Dinkelbach-Rosenberg (1994), Dethloff-Seelbach (1998)) és
- az újrahasznosítás a termelési modellekben.

Végül az utolsó részben összefoglaljuk a dolgozat eredményeit.

A dolgozat tartalmazza azokat a dolgozatokat, amelyek az 1994 és 2004 között a témában megjelent cikkeimet tartalmazza, és amelyek nem kerültek be a 2007-es, optimális tételnagyság modelljét vizsgáló visszutas logisztikával foglakozó doktori dolgozatomba. Ezen dolgozatok jó része matematikailag a Pontrjagin-féle maximumelvvel, vagyis optimális irányítással oldja meg a dinamikusan megfogalmazott vállalati termelési-készletezési problémákat. A dolgozatok nagy része impaktfaktoros folyóiratban jelent meg, és a rájuk adott hivatkozások száma a kétszázhoz közelít.

1.2. A környezeti hatások integrálása a vállalatgazdasági termeléselméletbe

Mielőtt kifejtenénk a termeléselmélet környezettudatos kiterjesztését, röviden foglaljuk össze a lineáris tevékenységelemzés (linear activity analysis) alapjait. A tevékenységelemzés alapvetően input-output termelési/szolgáltatási rendszereket vizsgál, ahol ismertek a rendszer inputjai és outputjai is, és ezen kívül a felhasznált technológia is adott az összetartozó,

lehetséges inputokkal és outputokkal együtt. A továbbiakban Kistner (1993) munkája alapján ismertetem a lineáris tevékenységelemzést.

A tevékenység, vagy termelés alatt olyan összetartozó $\underline{y} = (-\underline{r}, \underline{x})$ párokat értünk, amelyekre az $\underline{r}$ mennyiségű nemnegatív termelési tényező felhasználása mellett $\underline{x}$ mennyiségű nemnegatív termék keletkezik. Feltételezzük, hogy a termelési tényezők száma n, a termékek száma pedig m, tehát az $\underline{y}$ tevékenység az $n+m$ dimenziós térben fekszenek. Az összes lehetséges összetartozó $\underline{y} = (-\underline{r}, \underline{x})$ tevékenységi párt technológiai halmaznak nevezzük, és $T = \{(-\underline{r}, \underline{x}) \mid (-\underline{r}, \underline{x})$ megvalósítható$\}$ szimbólummal jelöljük. További három feltételezéssel élünk a technológiai halmazzal kapcsolatban:

1. Feltételezés: Arányosság. Ha $\underline{y} \in T$, és $\mu > 0$, akkor $\mu\, \underline{y} \in T$, vagyis egy adott tevékenység többszöröse is megvalósítható.
2. Feltételezés: Additivitás. Ha $\underline{y}_1 \in T$, és $\underline{y}_2 \in T$, akkor $\underline{y}_1 + \underline{y}_2 \in T$, vagyis két magvalósítható tevékenység összege is megvalósítható.
3. Feltételezés: A pazarlás lehetősége. A termelési tényező felhasználása lehetséges kibocsátás nélkül: $\underline{y} = (-\underline{r}, \underline{0}) \in T$.

E három feltételezést kielégítő technológiát lineáris technológiának, vagy Leontief-technológiának nevezzük. (A német nyelvterületen nevezik Leontief-félének az ilyen technológiákat.) Központi szerepet játszik még a termelési folyamat fogalma a lineáris technológiákban. Legyen $\underline{y}^* = (-\underline{r}^*, \underline{x}^*) \in T$ egy lehetséges tevékenységet. A $\pi = \{(\underline{y} \mid \underline{y} = \mu\, \underline{y}^*, \mu \geq 0\}$ halmazt az $\underline{y}^*$ tevékenységhez tartozó termelési folyamatnak nevezzük. Lineáris technológiákban az ilyen termelési folyamatok száma véges, így az összes tehetséges tevékenységet leírhatjuk azok lineáris kombinációjával. Ez adja az ötletet ahhoz, hogy a termelési folyamatokat egy-egy kitüntetett elemmel jelöljük, pl. $\underline{y} = \underline{c}\, z = (-\underline{a}, \underline{b})\, z$, ahol z egy valós szám, és azt jelöli, hogy milyen intenzitással alkalmazzák az $(-\underline{a}, \underline{b})$ tevékenységet. Az ilyen bázistevékenységeket a továbbiakban ismertnek tételezzük fel.

Egy ilyen $\underline{c}^o$ bázistevékenységet hatékonynak nevezünk, ha nem létezik olyan $\underline{c}$ tevékenység, amelyre $\underline{c} \geq \underline{c}^o$, vagyis amelyik tevékenység kisebb ráfordítás mellett nagyobb eredményt (termékeket) produkálna. Ez egyben azt is jelenti, hogy az ilyen tulajdonsággal rendelkező tevékenységek egyben technológiailag is hatékonyak. Tehát ebben a metszetben semmit sem mondhatunk a gazdasági hatékonyságról, vagyis a nyereségességről. Ezeket a tevékenységeket szokták egyszerű tevékenységeknek is nevezni. Egyszerűen belátható, hogy két hatékony tevékenység lineáris kombinációja is hatékony. (A bizonyítástól eltekintünk, azt az érdeklődő olvasó megtalálhatja pl. Kistner (1993) könyvében.) A véges hatékony technológiákat összefoghatjuk egy $\underline{D}$ mátrixba is a következő módon:

$$D = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_l \\ b_1 & b_2 & \dots & b_l \end{bmatrix},$$

ahol a hatékony technológiák száma l. Ekkor a technológiai halmazt a $T = \left\{ y \in \Re_+^{n+m} \middle| y = Dz,\ z \in \Re_+^l \right\}$ kifejezéssel értelmezhetjük.

A további vizsgálatainknál az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy csak egy végtermékkel rendelkezik a vizsgált vállalatunk. A többtermékes esetre is hasonlóan végezhetnénk el az elemzésünket, ettől most eltekintünk. Ekkor a technológiai mátrix a következő lesz:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_l \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

amiből megalkotható az $A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_l]$, ami az egyes technológiák termelési tényező-igényét jelöli. Ezzel az új jelöléssel a technológiai halmazt a következőképpen definiálhatjuk:

$T = \{(-r, x) \in \Re_+^{n+1} | Az \le r,\ x = 1^T z,\ z \in \Re_+^l\}$, ahol az 1^T vector az összegző vektort jelöli, aminek minden eleme eggyel egyezik. Ez a jelölés lehetővé teszi, hogy a technológiai hatékonysághoz rendelhető termelési függvényt megkonstruáljuk.

Az ilyen lineáris technológia termelési függvényét az alábbi lineáris programozási feladat megoldásaként definiálhatjuk. Tételezzük fel, hogy ismert a rendelkezésre álló $\underline{r}^o$ termelési tényező vektor. Ekkor az ehhez rendelhető maximális x^o kibocsátást előállító programot az alábbi feladat megoldásaként állíthatjuk elő:

$$x^o = 1^T z \to \max$$
$$Az \le r^o,$$
$$z \ge 0.$$

Ezzel egy $x^o = F(\underline{r}^o)$ termelési függvényt konstruáltunk. Ennek a termelési függvénynek a tulajdonságai kísértetiesen hasonlítanak a neoklasszikus termelési függvényére azzal a különbséggel, hogy az $F(.)$ függvény csak szakaszosan differenciálható, de folytonos különben a változóiban, és konkáv. (A részletek az előbb is idézett Kistner (1993) könyvében találhatóak meg.)

A vállalatgazdasági termeléselmélet harmadik eleme a gazdaságilag hatékony tevékenységek felkutatása, természetesen az ismert $x^o = F(\underline{r}^o)$ termelési függvény ismeretében. Ezt az irodalom egy lépésben hajtja végre. Ha adottak a termelési tényezők és a végtermék árai, akkor az alábbi feladatmegoldása adja az adott árakhoz tartozó vállalatgazdaságilag hatékony, azaz nyereségmaximalizáló termelési tervet:

$$px - qr = pF(r) - qr \to \max.$$

Itt feltételeztük, hogy a termék ismert piaci ára p, míg a termelési tényezők ára a $\underline{q}$ vektorral jellemezhető. Mivel az $F(.)$ termelési függvény konkáv a termelési tényezőkben, ezért létezik optimális megoldás, amiből már kiszámítható az optimális kibocsátás is. Az optimális termelési terv kétlépéses meghatározása abból indul ki, hogy adott a kibocsátási szint, akkor ahhoz milyen minimális költségkombináció szükséges. A feladat első szakasza tehát a következő faladat megoldását teszi szükségessé:

$$qr \to \min$$
$$F(r) = x^o,$$

ahol az x^o adott. legyen ennek a feladatnak a megoldása $\underline{r}^o$. Ez az $\underline{r}^o$ termelési tényező kombináció függ a kibocsátástól, tehát $\underline{r}^o(x^o)$ formában is írható. A második lépésben a nyereséget maximalizálhatjuk, de most a kibocsátás függvényében, ami a $px^o - qr(x^o) \to \max$ feladat megoldását jelenti.

Ezzel összefoglaltuk a lineáris tevékenységelemzéssel végezhető fontosabb elemzések kereteit. A következő részekben ezt a gondolatmenetet alkalmazzuk a környezettudatos termeléselmélet esetére.

1.2.1. A termelési tényező-termék rendszer környezetorientált kibővítése

Amint a bevezetőben említettük, alapvetően három különböző javaslat született a környezeti hatások termelési tényező és termék rendszerbe történő beillesztésére. Most ezeket ismertetjük röviden. Ezek a felosztások, amelyek - mint látni fogjuk – nagyon hajaznak egymásra, lényegében azt az óhajt fogalmazzák meg, hogy mindenféle olyan terméket, erőforrást, amit a vállalati tevékenység érint, internalizáljunk, azaz próbáljunk meg piaci alapon értékelni, vagy legalábbis számolni az általa okozott költségekkel.

Először Dyckhoff (1992, 1993) termelési tényező és termék rendszerét mutatjuk be. A termelési tényezők a termelési folyamat inputjait testesítik, míg termékek az outputokat. Ez a két kategória a klasszikus termeléselméletben felmerül, mert ezekre feltétlenül szükség van a piacokon eladható termékek létrehozására. Természetesen minden termelési folyamatban képződnek ikertermékek, de ezek keletkezése a szándékolt végtermék előállításakor elkerülhetetlen. Dyckhoff a rendszerében az input- és outputtermékek halmazát, amelyek a technológiai folyamathoz kapcsolódnak egy másik dimenzióval is jellemzi a termelési folyamat során felhasznált termelési tényezőket és termékeket. Ezt a dimenziót tárgyi kategóriának (Objektkategorien) nevezi. Ezzel kiterjeszti a hagyományos termeléselméletben alkalmazott termékek körét azokkal is, amelyek a piacon nem beszerezhetőek, illetve eladhatóak. Az így kapott input- és outputkategóriákat az 1. ábrán szemléltetjük. Az ábrának ezen kívül van még egy harmadik dimenziója is, amely arra utal, hogy az egyes kategóriákhoz rendelhető-e valamilyen értékítélet. Ebben a harmadik dimenzióban a termék (produktum) és a megszüntetendő (reduktum) *kívánt* csoportok. A terméket a piacon adja el a vállalat az árbevétel reményében, míg a reduktumon olyan termékeket kell érteni, amelyeknek a feldolgozása kívánatos, mert ezzel a környezetterhelés csökkenthető; gondoljunk itt az újrafelhasználásra. A *nemkívánatos* csoportba sorolhatóak a termelési tényezők és az olyan hulladékok, amelyeket nem lehet újrafelhasználni. Ezeket azért tekinthetjük nemkívánatosnak, mert költségeket okoznak a vállalatnak. Az *indifferens* kategóriába sorolható melléktényezők és melléktermékek a vállalatnak semmilyen eredményt nem hoz, és ugyanakkor semmilyen költséget sem okoz.

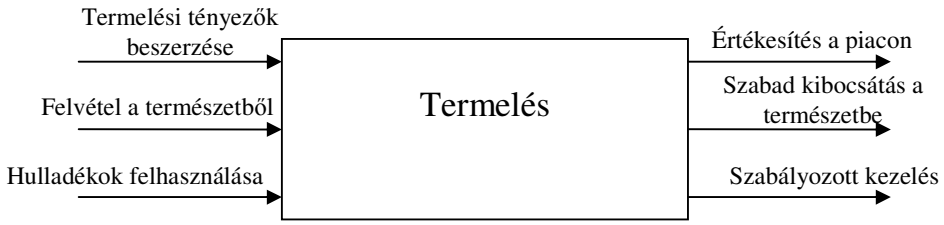
A kategóriák értékítélet szerinti felosztása ebben az értelmezésben a gazdasági racionalitáshoz kapcsolódik. Ezzel ezt a csoportosítási kísérletet lezárhatjuk.

Tárgyi kategóriák Folyamathoz kapcsolódás	JÓSZÁG	SEMLEGES	ROSSZ
INPUT	Termelési tényező	Melléktényezők	Megszüntetendő (Reduktum)
OUTPUT	Termék (Produktum)	Melléktermék	Hulladék

1.1. ábra. Input- és output kategóriák (Dyckhoff (1992))

A következő termelési tényező és termék rendszerzési javaslat Kistner-Steven szerzőpárostól származik. (Kistner-Steven (1993)) Lényegében három dimenzió mentén bővítik ki a termeléselmélet alapjait: mennyiségi szemlélet szerint, értékek szerint és összgazdasági kívánatosság szerint. Felfogásukban a környezet egyben jószág és termelési tényező is lehet egyben.

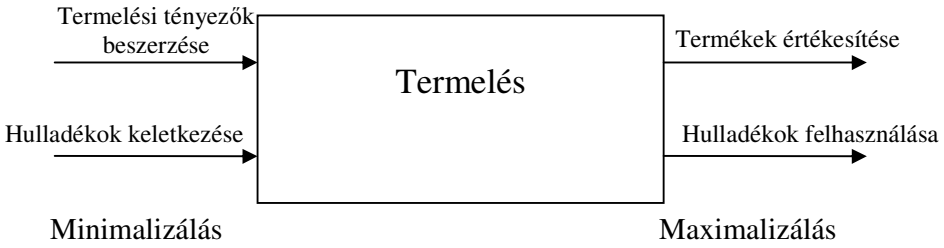
A termelés mennyiség szerint kiterjesztett változatát az 1.2. ábra mutatja.



1.2. ábra. A termelés mennyiségi kiterjesztett ábrázolása (Kistner-Steven (1993))

Az ábra a termelési folyamatokban lezajló tényleges anyagáramlási folyamatokat reprezentálja. Ez a klasszifikáció ebben a szemléletben semmilyen értékítéletet nem tartalmaz, így elsősorban egy mérnöki hozzáállást jelent.

A termelés értékalapú ábrázolása a fontosabb pénzáramlásokat szedi csokorba. (Lásd 1.3. ábra.)

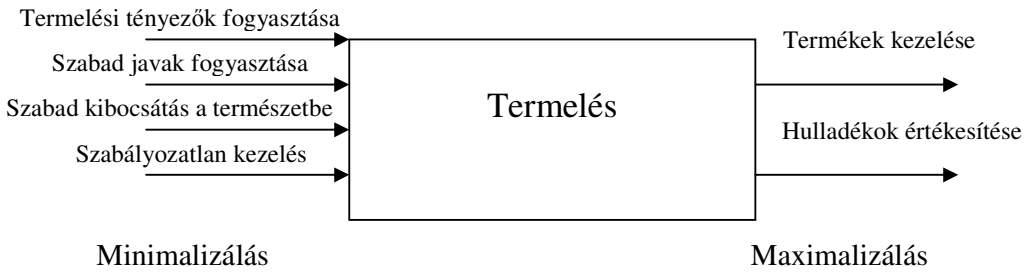


1.3. ábra. A termelés értékalapú ábrázolása (Kistner-Steven (1993))

Amint az ábra is érzékelteti, a vállalatok a termelési tényezők beszerzésére, valamint a hulladékok kezelésére fordított kiadásaikat akarják minimalizálni olyan mellékfeltétel mellett, hogy az eladásokat és a hulladékok felhasználását maximálják. A még hasznosítható hulladékok ugyanis a vállalat számára olyan erőforrást testesítenek meg, amelyekért bevételeket realizálhatnak.

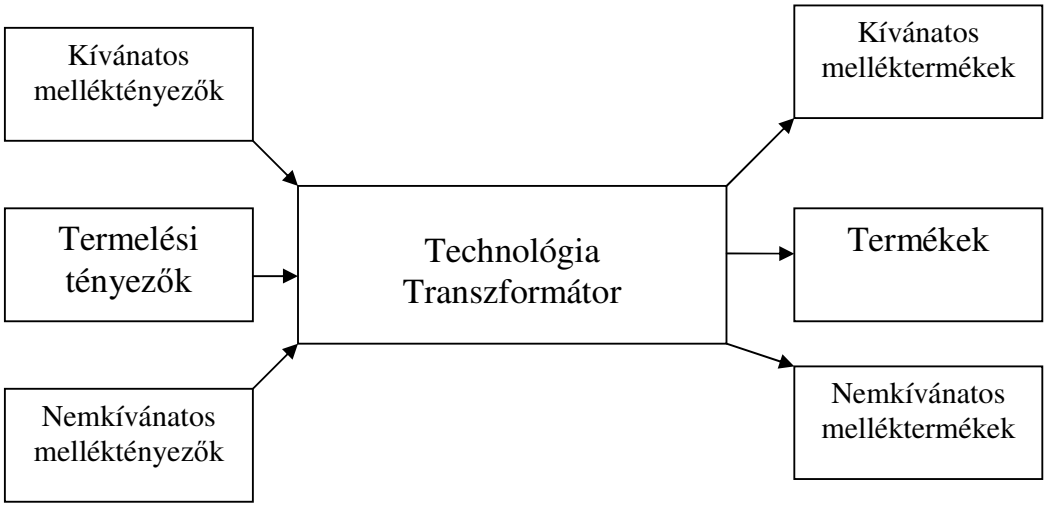
Végül a harmadik metszetben a javak összgazdasági kívánatossága szerint lehet a termékeket fogyasztásuk/keletkezésük alapján csoportosítani.

Ez a metszet mutatja, hogy az emberi fogyasztásra szánt termékek termelésén kívül az újrafelhasználás is maximalizálandó célként jelenik meg a gazdaságban, ugyanakkor a termelési tényezők fogyasztás, a szabad jószágok megsemmisítése, a természetbe történő bármilyen emisszió és a szabályozatlan hulladékkezelés mindenképpen elkerülendő a gazdaságban.



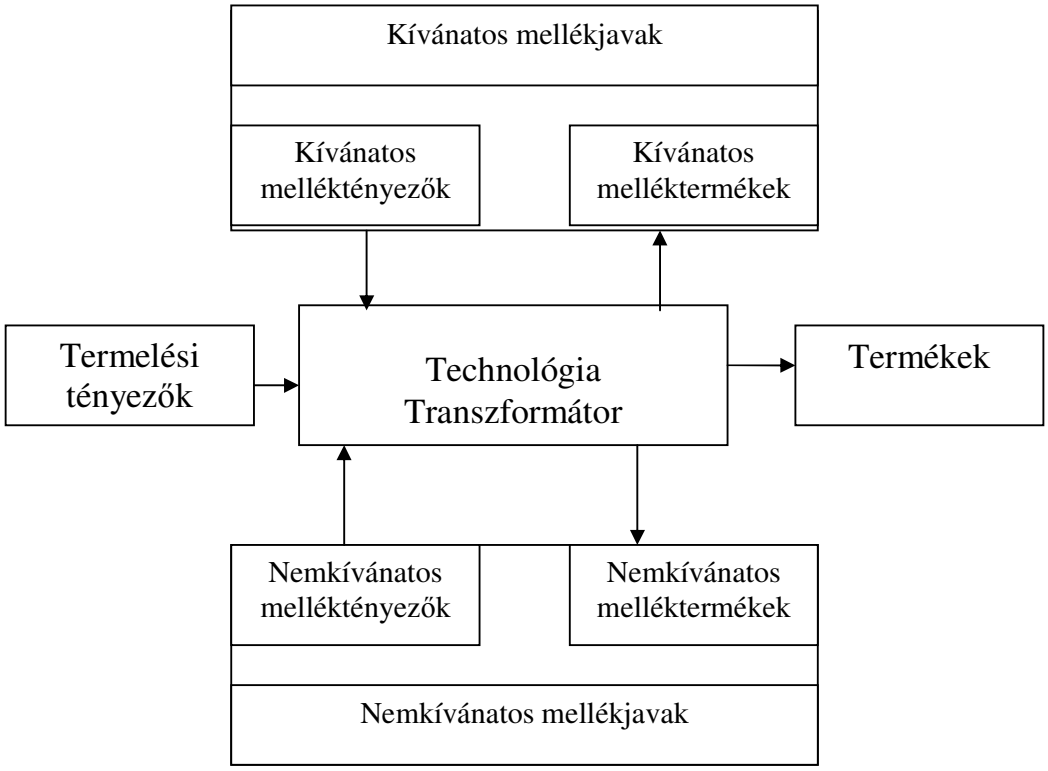
1.4. ábra. A javak összgazdasági kívánatossága (Kistner-Steven (1993))

Végezetül Dinkelbach és Rosenberg (1994) tényezőrendszerét mutatjuk be. Ők is több lépcsőben mutatják be a termékekre alkalmazható környezettudatos termeléselmélet alapjául szolgáló rendszert. Először a rendszerükben felosztották a termékeket a kívánatos és nemkívánatos kategóriáknak megfelelően. Természetesen, hogy valamilyen termelési tényező kívánatos-e, azt ebben az esetben csak a szándékosan előállítandó termékektől függetlenül értjük. Ezt az 1.5. ábrán mutathatjuk meg.



1.5. ábra. A termékek csoportosítása kívánatosság alapján (Dinkelbach-Rosenberg (1994))

Második lépésben attól függetlenül, hogy melléktermékről, vagy melléktényezőről van szó, összevonjuk azokat a kívánatosság és nemkívánatosság szerint. Ezt mutatja a 1.6. ábra.



1.6. ábra. A javak csoportosítása kívánatosság szerint (Dinkelbach-Rosenberg (1994))

Ez a csoportosítás azért nagyon kényelmes, mert modellezési szempontból hatról négyre csökkenti a modellezni kívánt termelési tényezők és termékek körét. Értékelési szempontból ugyanis a nemkívánatos termékek kezelés ráfordítással, azaz költséggel járhat, míg a kívánatos javak bevételt eredményezhetnek.

1.2.2. Technológiailag hatékony környezeti tevékenységek

A technológiailag hatékony jószágkombinációk, és ezzel környezetorientált termelési függvények konstruálásához először a környezettudatos technológiát kell meghatároznunk. A vizsgálatainkat a továbbiakban Dinkelbach-Rosenberg (1994) munkája alapján mutatjuk be.

Az előző fejezetben láttuk, hogy a tényezőket és termékeket négy csoportba lehet osztani. Tételezzük most fel, hogy csak egy szándékolt végtermékünk van, n darab szándékolt termelési tényezőnk, valamint m darab nemkívánatos mellékjószágunk, és o darab kívánatos mellékjószággal modellezzük a termelési folyamatot. Ekkor kihasználva a technológiánk lineáris mivoltát, a következő környezetorientált technológiai halmazt írhatjuk fel:

$$UT = \left\{ (-r, -v, u, x) \in \Re_+^{n+m+o+1} \middle| Az \le r, Cz \le v, Bz \ge u,\ x = 1^T z,\ z \in \Re_+^l \right\},$$

ahol egy környezetorientált folyamatot a $(-\underline{a}_i, -\underline{c}_i, \underline{b}_i, 1)$ négyessel írhatjuk le, amelyben a vektorok az $\underline{A}$, $\underline{C}$ és $\underline{B}$ mátrixok i-ik oszlopát jelöli.

Az *UT* technológiához tartozó termelési függvényt a következő lineáris programozási feladattal állíthatjuk elő:

$$x^o = 1^T z \to \max$$
$$Az \le r^o,$$
$$Cz \le v^o,$$
$$Bz \ge u^o$$
$$z \ge 0.$$

Amint látjuk, ez a modell lényegében megegyezik a környezeti hatások nélküli modellel. A termelési függvény így a következő formában áll elő: $x^o = F(\underline{r}^o, \underline{v}^o, \underline{u}^o)$. Erről a termelési függvényről is megállapítható, hogy folytonos, szakaszosan folytonosan differenciálható, és konkáv. Tehát megtartotta azokat a tulajdonságokat, amiket az eredeti lineáris tevékenységelemzéssel alkotott modellünk rendelkezett. Mindez ugyanakkor azt is megengedi, hogy a gazdasági hatékonyságot is teljesen hasonlóan értelmezzük a modellünkben.

Ezzel a környezettudatos termeléselmélet technológiai hatékonyságát teljesen bemutattuk.

1.2.3. Gazdaságilag hatékony környezeti tevékenységek

A gazdaságilag hatékony termelési tervek előállítására ebben az esetben is két út áll rendelkezésünkre. Itt most elemezzük a minimális költség kombinációhoz vezető utat, mert az csak növeli az optimumszámítási feladatok számát, ezért csak a közvetlen nyereségmaximalizáló feladatot írjuk fel. A megoldása ennek a modellnek is teljesen analóg azzal, amit az előzőekben tettünk.

Tételezzük fel, hogy a kívánatos és nem kívánatos jószágok árai ismertek, mégpedig a nemkívánatos javak árvektora $\underline{q}^{NK}$, míg a kívánatos jószágok ára $\underline{p}^{K}$. Ekkor a nyereséget optimalizáló feladat alakja:

$$px + \underline{p}^{K}\underline{u} - \underline{q}\,\underline{r} - \underline{q}^{NK}\underline{v} \to \max$$

$$x = F(\underline{r}, \underline{v}, \underline{u}).$$

Ennek a problémának a megoldása adja a nyereségmaximális környezetorientált termelési tervet.

1.3. A kormányzati környezetvédelmi politika hatásai a vállalat termelésére

Ebben a részben az ismertetett vállalatgazdasági termeléselmélet alkalmazását mutatjuk be a vállalati gyakorlatban alkalmazott kormányzati környezetvédelmi politika tekintetében. Amint a bevezetésben említettük, három fontosabb alkalmazási területet tekintünk át:

- alkalmazkodás a határérték- és környezeti adók szabályozásra (közvetett és közvetlen szabályozás),
- szennyezési jogok bevezetése és hatása a vállalati termelési politikára,
- újrafelhasználási folyamatok.

A szennyezési jogok alkalmazását nagyon sokszor a normatív és gazdasági szabályozás speciális eseteként interpretálják. Mégis teljesen más megoldást szolgáltat a szennyezési jogok alkalmazása, ugyanis amíg a határértékszabályozás- és adók, díjak rendszere a kormányzat és megfelelő szervei által kívülről meghatározott paramétereket jelentenek, amire a vállalatnak alkalmazkodnia kell, addig a szennyezési jogok politikája arra az előfeltételezésre épül, hogy a vállalat maga dönti el, hogy mekkora szennyezést képes beszerezni, arra mennyi pénzeszköze van. Ekkor a szennyezési jog ára a piacon dől el, tehát piaci mechanizmus alakítja ki annak az árát. Összegezve, a szennyezési jogok politikája egy piackonform megoldás, míg a közvetett és közvetlen kormányzati szabályozás nem piackonform megoldást nyújtanak, mert az ilyen szabályozási rendszer eltéríti a piaci árakat a beavatkozás révén. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a normatív és gazdasági szabályozásra a vállalat csak reagál, alkalmazkodik, míg a szennyezési jogok esetén a vállalat aktívan reagál, maga dönt szennyezés mértékéről. Az egyetlen probléma a szennyezési jogok bevezetésével talán az, hogy a gazdaságra adott kvótákat a kormányzat adja meg az egyes vállalatoknak. (Ez a kiosztási folyamatot hívják grandfathering-nek.) Ezzel a kormányzat megadhatja a gazdaság összes maximális szennyezési lehetőségét. Azonban a továbbiakban piacon, vagy egy szennyezési anyag tőzsdén folyhat tovább a szennyezési jogok árazása, tehát piaci módszerekkel.

Az újrafelhasználást alapvetően egy piackonform eszköznek tekinthetjük még akkor is, ha a szükséges tevékenységeket elég nagy kormányzati szabályozást tételez fel. Az újrahasznosítás gyakorlatilag egy piacon alakul ki, ezért ez a tevékenység is aktív vállalati döntési szabadságot kell, hogy jelentsen.

1.3.1. Közvetlen és közvetett környezetvédelmi szabályozás hatása a vállalati termelésre

Ennek a részfejezetnek a célja a normatív és gazdasági szabályozások beillesztése az ismertetett termeléselméleti modellbe. A két szabályozási típust szokták még mennyiségi (normatív) ás ár- (gazdasági) szabályozásnak is nevezni. Vizsgáljuk először a mennyiségi szabályozást.

A mennyiségi szabályozás azt jelent, hogy egy bizonyos kibocsátásra a vállalat a kormányzattól egy szennyezési felső határértéket kap, tehát a vállalati nyereségmaximalizálási feladatot „eltéríti” a szennyezőanyag kibocsátásra adott korlátozás. Ekkor a vállalat a következő feladatot kell, hogy megoldja:

$$px + \underline{p}^{K}\underline{u} - \underline{q}\,\underline{r} - \underline{q}^{NK}\underline{v} \rightarrow \max$$

$$x = F(\underline{r}, \underline{v}, \underline{u}),$$

$$\underline{v} \leq \underline{v}_0,$$

ahol $\underline{v}_0$ a kormányzat által megadott szennyezési felső határérték, amelyet a vállalat nem léphet át. Már ebből a feladatból is látható, hogy ezzel a korlátozással a kormányzat eltéríti a vállalati termelést a gazdasági optimumtól. Ha a vállalati árképzésre gondolunk, akkor az ilyen korlátozás nem lesz piackonform, még akkor sem, ha a gyakorlatban szélesen alkalmazott eljárás az egyszerűsége miatt.

Az árszabályozás azt jelent, hogy egy bizonyos kibocsátás után a vállalat egy adószerű befizetést eszközöl az államháztartásba, tehát a vállalati nyereségmaximalizálási feladatot

ebben az esetben „eltéríti” a fizetendő összeg. (Ezt a szabályozást gyakran hívják kormányzati környezetvédelmi politikának államháztartási bevétel mellett.) Ekkor a vállalat az alábbi feladatot megoldja meg:

$$px + \underline{p}^{K}\underline{u} - \underline{q}\,\underline{r} - \underline{q}^{NK}\underline{v} - \underline{\alpha}\,\underline{v} \rightarrow \max$$

$$x = F(\underline{r}, \underline{v}, \underline{u}),$$

ahol $\underline{\alpha}$ a kormányzat által meghatározott szennyezési díj, nevezhető adónak az adott szennyező anyagra. Ebből a feladatból is látható, hogy ezzel a korlátozással a kormányzat eltéríti a vállalati termelést a gazdasági optimumtól. Ez a szabályozás is szélesen alkalmazott eljárás az egyszerűsége miatt a gyakorlatban.

1.3.2. A szennyezési jogok hatása a vállalati termelési politikára

A szennyezési jogok politikája, amint megállapítottuk, piackonform megoldásnak tartható. Ekkor a vállalat a szennyezési jogok piacán szerzi be a számára szükséges szennyezési mennyiséget, aminek az ára egy piacon kialakuló érték. A vállalat számára megoldandó feladat a következő módon áll elő:

$$px + \underline{p}^{K}\underline{u} - \underline{q}\,\underline{r} - \underline{q}^{NK}\underline{v} - \underline{\beta}\,\Delta\underline{v} \rightarrow \max$$

$$x = F(\underline{r}, \underline{v}, \underline{u}),$$

ahol $\underline{\beta}$ a szennyezőanyag kibocsátás egységének beszerzési ára. Amint a nyereségfüggvényből látható, nem teljes mennyiséget, hanem egy $\Delta\underline{v}$ növekménynyi szennyezési jogot szerez be a vállalat. Ebből a szempontból a szennyezési jogok politikája egy dinamikus karakterrel is bír, hiszen a már meglévő szennyezési jog mellé szerez be a vállalat egy növekményt, amit az adott tervezési periódusban használ fel.

Könnyen úgy tűnhet, hogy a szennyezési jogok politikája egy árszabályozási módszer. Erre hívja fel a figyelmet Dinkelbach-Rosenberg (1994) és Dethloff-Seelbach (1998). Ők úgy interpretálják a szennyezési jogot, mint egy oszthatatlan jószágot; azaz csak egy meghatározott egységnyi szennyezést és annak többszörösét lehet beszerezni, de ezt az egységet nem lehet tovább osztani. Ők úgy érvelnek, hogy a megvásárolt, de fel nem használt szennyezési jog egy olyan meg nem valósult szennyezést testesít meg, amely a környezet szennyezettségi szintjét csökkenti, amivel javítja a környezet állapotát.

Ezzel befejeztük a közvetlen és közvetett környezeti szabályozás, valamint a szennyezési jogok hatásának vizsgálatát a vállalati termelési politikára. A következő részben az úrafelhasználást, vagy recycling vállalati termelésre gyakorolt hatását mutatjuk be.

1.3.3. Az újrafelhasználás hatása vállalati termelésre

A szennyezési jogok politikája, amint megállapítottuk, piackonform megoldásnak tartható. Ekkor a vállalat a szennyezési jogok piacán szerzi be a számára szükséges szennyezési mennyiséget, aminek az ára egy piacon kialakuló érték. A vállalat számára megoldandó feladat a következő módon áll elő:

$$px + \underline{p}^{K}\underline{u} + \underline{p}^{R}\underline{x}^{R} - \underline{q}\,\underline{r} - \underline{q}^{R}\,\underline{r}^{R} - \underline{q}^{NK}\underline{v} \rightarrow \max$$

$x = F(\underline{x}^R, \underline{r}, \underline{r}^R, \underline{v}, \underline{u})$,

ahol bevezettük a recycling folyamatokat, amelyek egy újabb tevékenységet jelentenek ($-\underline{r}^R$, $\underline{x}^R$) jelöléssel. Az újrafelhasználási folyamat ekkor $\underline{r}^R$ termelési tényező felhasználása mellett $\underline{x}^R$ újrahasznosított anyagból készült terméket eredményez. Az újrahasznosítás költségét a $\underline{q}^R$ vektor jelöli, míg az újrahasznosításból nyert végtermékek piaci ára $\underline{p}^R$ lesz.

1.4. Összefoglalás

Ebben a dolgozatban összefoglaltuk a német nyelvterületen oktatott és kutatott vállalatgazdasági termeléselmélet lineáris tevékenységelemzésen alapul alapjait. Megmutattuk, hogy viszonylag kis átalakítással a lineáris tevékenységelemzésre épülő termeléselméletbe különösebb nehézség nélkül integrálhatóak a környezeti elemek a termelési tényező és termék rendszer természetes kiterjesztésével. Az ilyen jellegű általánosítás lehetővé teszi, hogy a vállalati termelési politikában vizsgálhatóvá váljon többek között a kormányzati környezetvédelmi szabályozás hatásainak elemzése, és még az újrafelhasználás (recycling) is modellezhető.

Ez az alapmodell alapvetően statikus, amivel beruházási folyamatok nem vizsgálhatóak. Az idő, valamint a készletállományok bevezetésével a gazdasági valóságot pontosabban leíró hatásmechanizmusok is elemezhetővé válnak a lineáris tevékenységelemzési modellben.

2. A kormányzati környezetvédelmi szabályozás hatása a vállalati termelési-készletezési stratégiára

Az előző fejezetben bemutattuk, hogy a direkt és indirekt kormányzati környezetvédelmi szabályozást hogyan lehet a vállalatgazdaságtani termeléselméletbe beépíteni. A direkt, vagy normatív szabályozás – matematikai szempontból – azt jelenti, hogy a kibocsátásokra (emissziókra) egy felsőkorlátot építünk be a vállalati modellbe. Ezzel szemben az indirekt, vagy gazdasági szabályozás során a vállalat költségfüggvényébe épül be egy pótlólagos költségelem, ami lehet termékdíj, amit tekinthetünk akár szennyezési adónak is. A korábbi vizsgálatok e két szabályozási eszköz vállalati termelési politikára gyakorolt hatását statikus körülmények között elemezték. Arra nem adtak választ, hogy milyen időbeli kihatása van e két fontosabb szabályozási eszköznek.

A bemutatásra kerülő három modell ezt az időben lezajló folyamatot vizsgálja. Ha az időben tovagyűrűző folyamatokat akarjuk elemezni, akkor azt a kérdést tehetjük fel, hogy ezek a kormányzati környezetvédelmi szabályozási eszközök milyen irányba terelik a vállalatok termelési stratégiáját, a szennyezés kibocsátási értékek időben milyen irányba térnek el ezen eszközök bevezetése után. Az ilyen típusú vizsgálatok tehát komparatív statikai elemzésnek is tekinthetőek. A szabályozási eszköz bevezetésével a döntéshozó valamilyen célt követ, esetünkben ez a kibocsátások minimalizálását, csökkentését jelenti. Mivel itt időben lezajló folyamatokról van szó, ezért a kibocsátások „csúcsainak" lefaragása, csökkentése is céllá válhat. Ezt nevezi a termelésmenedzsment irodalom simítási problémának, vagyis egyféle kiegyenlítési feladatnak. A termeléssimítás (production smoothing) a vállalat célja, hogy a kapacitásait időben viszonylag állandó szinten tartsa, amivel a kapacitáskihasználtság egyenletessé válik, azaz jobban tervezhető. A környezet szempontjából az ilyen simítás azt jelenti, hogy a környezetnek leadott kibocsátások válnak egyenletessé, ami megkönnyítheti a környezet emissziós felvevő képességét, öntisztulását. A vállalat szempontjából ismert az a tény, hogy mindenféle szabályozás eltéríti a piacon kialakuló árakat, így most annak mértékével nem foglalkozunk.

A fejezet három modellje közül az első kettő a két szabályozási eszköz működését mutatja be két különböző célfüggvényt feltételezve. Az első, HMMS-típusú modellben a céloktól történő eltérést, vagyis egy célprogramozási probléma keretei között tekintjük. A második modellben azt tételezzük fel, hogy a vállalat a releváns termelési költségeit minimalizálja egy konkáv modellben. A konkáv termelési költségek feltételezése általános a termelésmenedzsmentben, de a készletgazdálkodásban is, mivel egy pótlólagos termék legyártásának határköltsége csökkenő a fixköltség problematika miatt. A két cikket természetesen össze is lehetett volna dolgozni a szabályozási eszközök, azaz a határérték- és környezetterhelési díj szabályozás szerint is. Azért nem a szabályozási eszközök szerint csoportosítottam a fejezet alfejezeteit, hogy megtarthassam a publikálásnak megfelelő struktúrát.

A harmadik alfejezet a két szabályozási eszköz egy keverékét elemzi egy Arrow-Karlin-féle, konvex modell keretei között. Itt azzal a feltételezéssel élünk, hogy a környezetterhelési díjat csak akkor kell fizetni, ha az előírt szennyezési normát a vállalat átlépi.

A fejezet eredménye, hogy a vállalatnak ugyan többletköltségeket okoz a szabályozási eszközöknek történő megfelelés, de a környezet szennyezési terhelése egyenletesebb lesz, vagyis a simítási tulajdonság teljesül.

2.1. A környezeti szabályozás hatása a termelési-készletezési rendszerekre egy HMMS-típusú modellben

2.1.1. Bevezetés

A környezeti szabályozás hatását Wirl (1991) és Xepapadeas (1992) elemezte. Tanulmányaikban a kibocsátási díjakat és a kibocsátási normákat vizsgálták. Wirl az Arrow-Karlin termelés-készletezési modellt dolgozta át, hogy megmutassa a környezeti szabályozások hatását. Xepapadeas kutatása a termelési funkciókon alapszik. Mindkét modell a maximum szabályt alkalmazza, mint matematikai eszközt

Tanulmányunkban Wirl (1991, 1995) eredményeit fogjuk általánosítani egy HMMS modellben, amit a termeléstervezési és az anyagellátás-tervezési rendszer közötti hasonlóságok miatt választottunk. Az MRP rendszerekben megtalálhatóak a jövőbeni keresletre és biztonsági készletszintre vonatkozó előrejelzések, valamit az egyes egységekre vonatkozó termelési tervek. A célfüggvény méri a készlet- és a termelési szint eltérését a megfelelő célértéktől. Ebben a modellben fogjuk vizsgálni a környezeti szabályozás hatásait.

A második részben bevezetjük a HMMS modellt és megvizsgáljuk a diszkontráta hatását az optimális termelési és készletezési stratégiára. A harmadik részben elemezzük a szennyezési díjakat és bemutatunk néhány, a vállalat termelési stratégiájára ható feltételt. A negyedik részben vizsgáljuk a kibocsátási normákat. Végezetül összefoglaljuk eredményeinket.

2.1.2. A modell

Egy homogén terméket gyártó, készleteit raktáron tartó vállaltot feltételeztünk. A modellhez a következő változókat definiáljuk:

$I(t)$	a készlet szintje t időpontban (állapot változó),
$P(t)$	a termelés szintje t időpontban (irányítási változó),
$S(t)$	kereslet t időpontban (exogén változó); pozitív és folytonosan deriválható,
T	a tervezési időszak hossza,
I_0	kezdeti készletszint,
h	készlettartási koefficiens,
c	termelési költség koefficiens,
ρ	konstans, nemnegatív diszkontráta,
$p(P(t))$	szennyezési szint; konvex, monoton növekvő, és kétszer folytonosan deriválható,
τ	lineáris, szennyezési egységre jutó szennyezési díj.

Így az optimális irányítási probléma $[0,T]$ intervallumon a következő:

$$\int_0^T e^{-\rho t}\left[\frac{h}{2}\left(I(t)-I_1(t)\right)^2+\frac{c}{2}\left(P(t)-P_1(t)\right)^2\right]dt \to min$$

$$\dot{I}(t)=P(t)-S(t), I(0)=I_0,$$

$$I(t)\geq 0,$$

$$P(t)\geq 0.$$

A probléma hamiltoni jelenértéke úgy definiálható, mint

$$H\left(I(t),P(t),\psi(t).\lambda(t),t\right)=-\left(\frac{h}{2}\left(I(t)-I_1(t)\right)^2+\frac{c}{2}\left(P(t)-P_1(t)\right)^2\right)+\psi(t)\left(P(t)-S(t)\right)+\lambda(t)I(t)$$

A feladat megoldásának tekintsük $(I^0(t),P^0(t))$-t. A Pontrjagin-féle maximumelv alkalmazásával a következő tétel szükséges (és elégséges) feltételt biztosít az optimális irányítási feladat megoldásához.

2.1.1. Tétel: Ahhoz, hogy $(I^0(t),P^0(t))$ optimális legyen a feladatban, szükséges, hogy létezzen egy szakaszosan folytonos $\psi(t)$, ahol minden $0\leq t\leq T$ –re teljesül, hogy $\psi(t)\neq 0$, mivel $0\leq t\leq T$

(1) $\dot{\psi}(t)=\rho\psi(t)+h\left(I(t)-I_1(t)\right)-\lambda(t)$,

(2) $\max\limits_{0\leq P(t)}\left\{\psi(t)P(t)-\frac{c}{2}\left(P(t)-P_1(t)\right)^2\right\}=\psi(t)P^o(t)-\frac{c}{2}\left(P^o(t)-P_1(t)\right)^2$,

(3) $\lambda(t)\,I^0(t)=0,\ \lambda(t)\geq 0,$

(4) $\psi(T)=c\left(P^o(T)-P_1(T)\right)\geq 0,\quad \psi(T)I^o(T)=0$.

A (2) feltételből következően igaz az is, hogy:

$$P^o(t)=\begin{cases}0 & \psi(t)<-cP_1(t)\\ \frac{1}{c}\psi(t)+P_1(t) & \psi(t)\geq -cP_1(t)\end{cases},$$

ami a *lineáris optimális döntési szabály.*

Ha a termelési időszakban az optimális termelési szint pozitív, akkor

$$\psi(t) = c\left(P^o(t) - P_1(t)\right).$$

$\psi(t)$-t az (1) feltételbe behelyettesítve, a szükséges feltételek felírhatóak mátrix formában:

$$\begin{pmatrix} \dot{P}^o(t) \\ \dot{I}^o(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & \frac{h}{c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P^o(t) \\ I^o(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) - \rho\, P_1(t) - \frac{h}{c} I_1(t) \\ -S(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} I(0) &= I_0, \\ P^o(T) &= P_1(T) \end{aligned}.$$

A környezeti szabályozás hatásának vizsgálatakor erre a mátrixformát fogjuk használni.

Most definiáljuk a termelési terv simítását!

2.1.1. Definíció (Bensoussan-Proth (1984)): $P^1(t)$ termelési terv simább, mint $P^2(t)$, ha $P^1(t)$ távolsága a termelési terv görbétől kisebb, mint $P^2(t)$ távolsága:

$$\int_0^T \sqrt{1 + \left(\dot{P}^1(t)\right)^2} < \int_0^T \sqrt{1 + \left(\dot{P}^2(t)\right)^2}.$$

Ez a definíció magában foglalja Wirl definícióját. Ha a termelési költség függvény pozitív monoton nem csökkenő, akkor a termelési szint nem csökkenő és a következő különbség pozitív:

$$\sqrt{1 + \left(\dot{P}^2(t)\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\dot{P}^1(t)\right)^2} = \frac{\left(\dot{P}^2(t)\right)^2 - \left(\dot{P}^1(t)\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\dot{P}^2(t)\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\dot{P}^1(t)\right)^2}} > 0,$$

mivel a számláló is pozitív. Ez a feltétel azonban, sajnos, nehezen számítható.

Következőnek azt vizsgáljuk meg, hogy az optimális termelési terv, hogyan függ a diszkontrátától. Arra keressük a választ, hogy a diszkont ráta növekedése, simábbá teszi-e a termelési stratégiát.

2.1.1. Lemma (Feichtinger-Hartl (1986)): Ha J Jakobi-mátrix determinánsa negatív, akkor

$$\frac{\partial\, I(t,\rho)}{\partial\, \rho} < 0,$$

$$\frac{\partial\, P(t,\rho)}{\partial\, \rho} < 0, \qquad t \in [0, t_1), \qquad t_1 < T$$

ahol

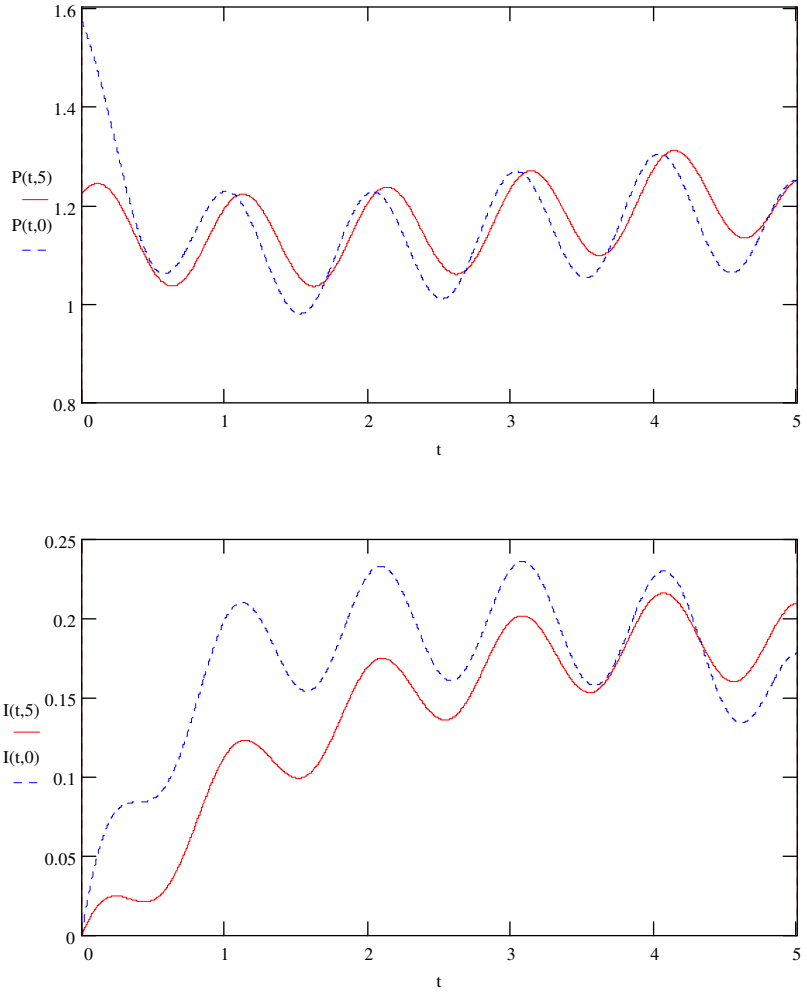
$$J = \begin{bmatrix} \rho & \frac{h}{c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A lemma magyarázata, hogy a jövő kevésbé értékelt, a készlet- és termelési szint az időszak elején alacsonyabb lesz, ha a diszkontráta növekszik. A termelési szint változhat.

2.1.1. táblázat A 2.1. fejezet példáiban használt paraméterek

Paraméter	Leírás
kereslet	$S(t)=(1+0.05t)(1+0.2\sin 2\pi t)$
a termelés célszintje	$P_1(t)= 1+0.05t$
a készlet nagyság cél szintje	$I_1(t)= 0.2+0.2\sin 2\pi t$
termelési költség koefficiens	$c=4$
készlettartási koefficiens	$h=20$
diszkontráta	$\rho=0.05$
szennyezés - lineáris - négyzetes	P $0.5P^2$
szennyezési adó koefficiens - lineáris - négyzetes	 $\tau=40$ $\tau=5$
maximális kapacitás	1.2
tervezési időszak	$T=5$

2.1.1. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben (ρ=0; 5)



2.1.3. Szennyezési díjak

Tegyük fel, hogy a kormány szennyezési díjat vezet be a környezetkárosítás csökkentésére. Így a vállalatok most már a termelés, a készletezés és a környezeti adók figyelembe vételével fogják minimalizálni a költségeiket. A modell a következő:

$$\int_0^T e^{-\rho t}\left[\frac{h}{2}\left(I(t)-I_1(t)\right)^2+\frac{c}{2}\left(P(t)-P_1(t)\right)^2+\tau\ p(P(t))\right]dt \to min$$

$$\dot{I}(t)=P(t)-S(t),\quad I(0)=I_0$$

$$I(t)\geq 0$$

$$P(t)\geq 0\,,$$

ahol $\tau\, p(P(t))$ függvény többletköltséget jelent, τ paraméter pedig a szennyezési egységre jutó lineáris díj.

Az optimalitás szükséges és elégséges feltételei a következő formában írhatóak föl:

$$\begin{pmatrix} \dot{P}^o(t) \\ \dot{I}^o(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\, \dfrac{cP^o(t)+\tau\, p'\left(P^o(t)\right)}{c+\tau\, p''\left(P^o(t)\right)} + h\dfrac{I^o(t)}{c+\tau\, p''\left(P^o(t)\right)} + \dfrac{c\dot{P}_1(t)-\rho\, cP_1(t)-hI_1(t)}{c+\tau\, p''\left(P^o(t)\right)} \\ P^o(t)-S(t) \end{pmatrix},$$

$$I(0) = I_0,$$

$$P^o(T) + \frac{\tau}{c}\, p'\left(P^o(T)\right) = P_1(T).$$

A következőkben azokat az eseteket fogjuk megvizsgálni, ahol a szennyezés lineáris vagy négyzetes.

2.1.3.1. Lineáris szennyezés

Ha *p(P(t))* szennyezési függvény lineáris, akkor az optimalitási feltétel egyszerű. Tegyük fel, hogy *p(P(t))=P(t).* A szennyezési függvény első deriváltja egyenlő 1-gyel, a második derivált pedig 0.

Behelyettesítve az első és a második derivált értékét a szükséges feltételekbe, azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} \dot{P}^o(t) \\ \dot{I}^o(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & \dfrac{h}{c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P^o(t) \\ I^o(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) - \rho\, P_1(t) - \dfrac{h}{c} I_1(t) + \rho\dfrac{\tau}{c} \\ -S(t) \end{pmatrix},$$

$$I(0) = I_0,$$

$$P^o(T) = P_1(T) - \frac{\tau}{c}.$$

2.1.1. Állítás: A lineáris szennyezési díj a HMMS modellben csökkenti a termelési és készletezési szintet.

Bizonyítás: Vizsgáljunk meg két optimális pályát τ_1 and τ_2 ($\tau_1 < \tau_2$) díj esetén. Ez esetben a két rendszer különbsége

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_2(t) - \dot{P}_1(t) \\ \dot{I}_2(t) - I_1(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & \dfrac{h}{c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_2(t) - P_1(t) \\ I_2(t) - I_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{c}(\tau_2 - \tau_1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$I_2(0) - I_1(0) = 0,$$

$$P_2(T) - P_1(T) = -\frac{\tau_2 - \tau_1}{c} < 0.$$

Most definiáljuk

$$\rho_1 = \frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \frac{h}{c}}, \quad \rho_2 = \frac{\rho}{2} - \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \frac{h}{c}}.$$

Ennek a differenciál egyenletnek a megoldása

$$\begin{pmatrix} P_2(t) - P_1(t) \\ I_2(t) - I_1(t) \end{pmatrix} = e^{\rho_1 t} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + e^{\rho_2 t} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\tau_2 - \tau_1}{h} \end{pmatrix}$$

Itt x_1 és x_2 konstansok ismeretlenek, és mi határozzuk meg a paramétereket. A differenciálegyenlet kezdeti értéke ismert

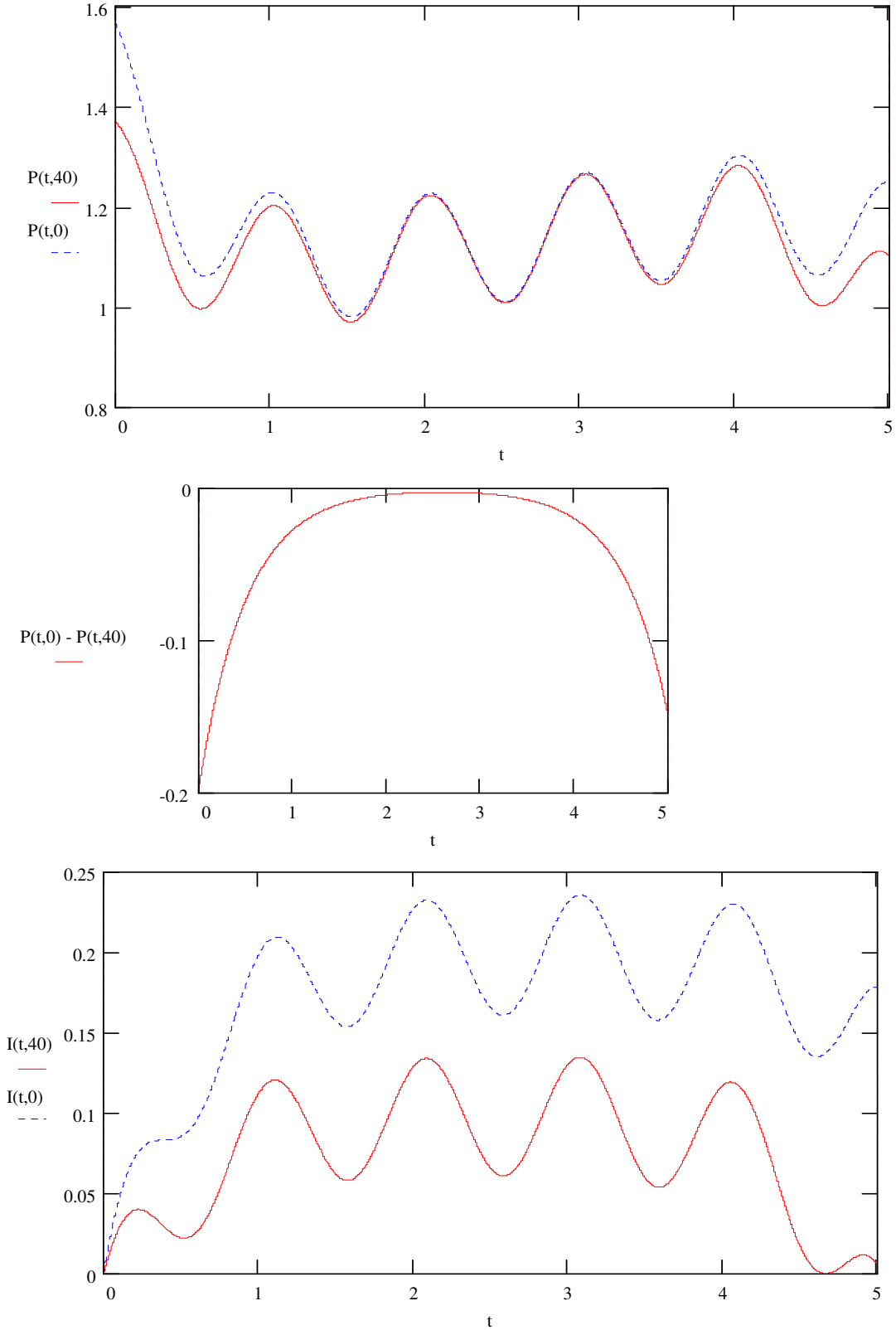
$$\begin{pmatrix} e^{\rho_1 T} \rho_1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} e^{\rho_2 T} \rho_2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = -\begin{pmatrix} \frac{\tau_2 - \tau_1}{c} \\ \frac{\tau_2 - \tau_1}{h} \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenlet megoldása

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{hc} \frac{1}{e^{\rho_1 T} \rho_1 - e^{\rho_2 T} \rho_2} \begin{pmatrix} c e^{\rho_2 T} \rho_2 - h \\ h - c e^{\rho_1 T} \rho_1 \end{pmatrix},$$

ahol $x_1 < 0$, és ezzel bizonyítottuk az állítást.

2.1.2. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben lineáris díj esetén (τ=0; 40)



2.1.3.2. Négyzetes szennyezés

Ha *p(P(t))* szennyezési függvény négyzetes, akkor az optimalitás feltétel egyszerű lesz. Tegyük fel, hogy $p(P(t))=0.5P^2(t)$. A szennyezési függvény első deriváltja egyenlő lesz *P(t)*-vel, a második derivált pedig 1.

Behelyettesítve az első és a második derivált értékét a szükséges feltételekbe, azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} \dot{P}^o(t) \\ \dot{I}^o(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & \frac{h}{c+\tau} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P^o(t) \\ I^o(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c}{c+\tau}\left[\dot{P}_1(t) - \rho\, P_1(t) - \frac{h}{c} I_1(t)\right] \\ -S(t) \end{pmatrix},$$

$$I(0) = I_0,$$

$$P^o(T) = \frac{c}{c+\tau} P_1(T)$$

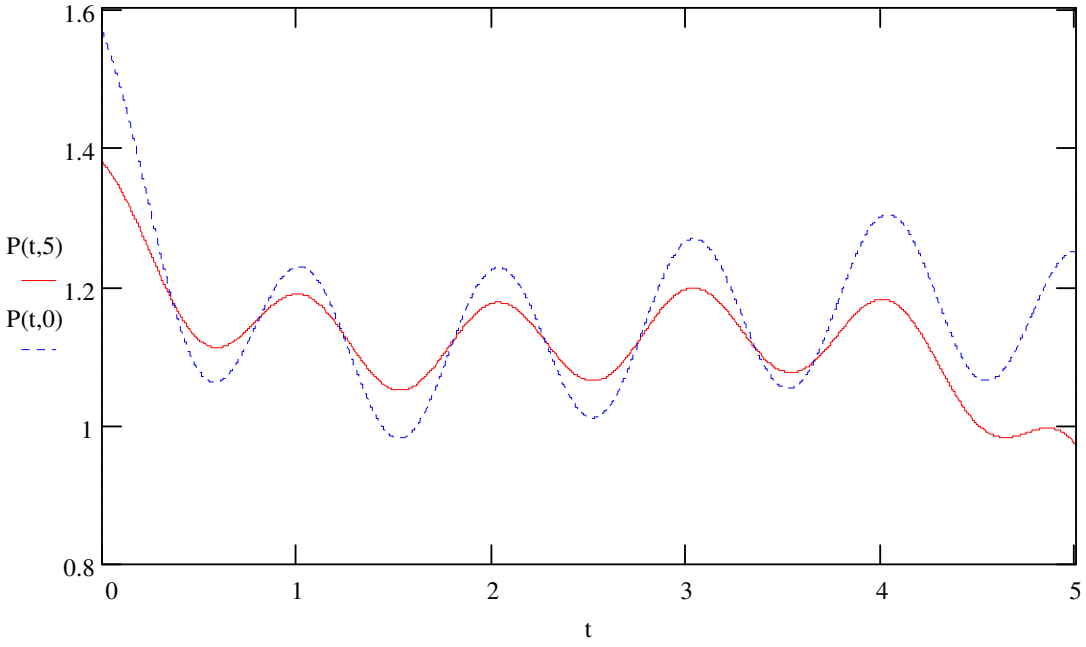
Ennek a differenciálegyenletnek nehéz általános megoldást találni. A díjak hatását a következő két példán fogjuk szemléltetni. (Lásd 2.1.3. és 2.1.4. ábra)

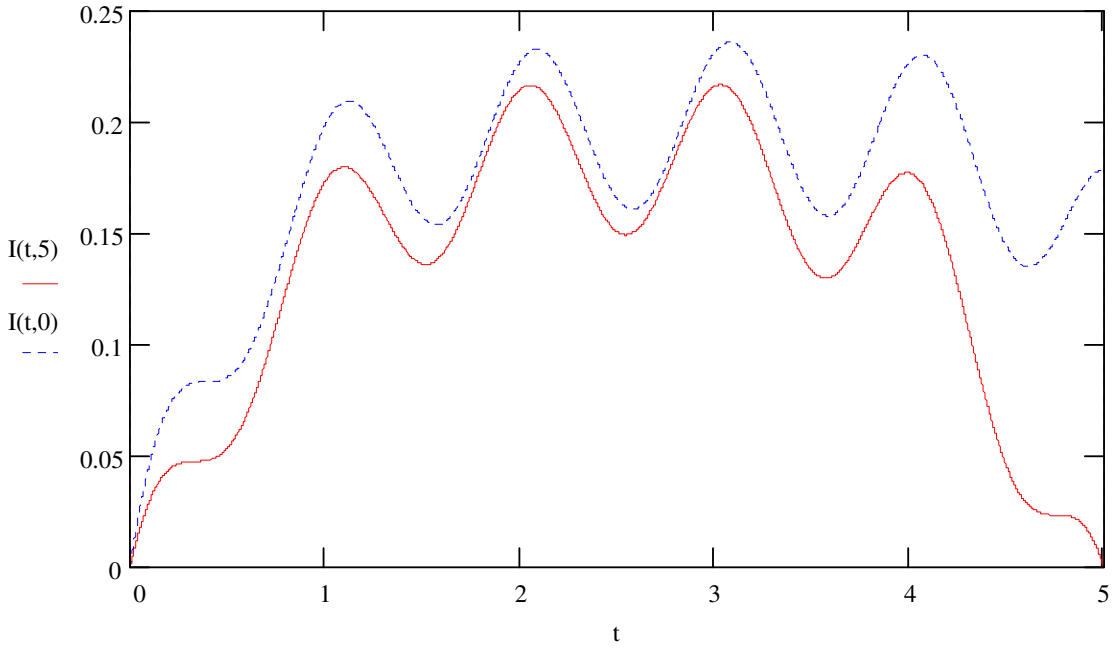
Az első példához az 2.1.1. táblázatban megadott paramétereket használtuk. A termelés ebben az esetben simább, mint amilyen szennyezési díj kivetése nélkül lenne. Látható, hogy a készlettartási szint is csökkent.

Ha a kereslet, a termelési és készletezési célszint konstans *T* időszakban, akkor a termelés simábbnak mutatkozik, a készletszint pedig csökkenőnek.

A két példa azt mutatja, hogy a szennyezési díj bevezetése négyzetes esetben csökkenti a készletek szintjét és a termelés simább, mint amilyen a díj nélkül lenne.

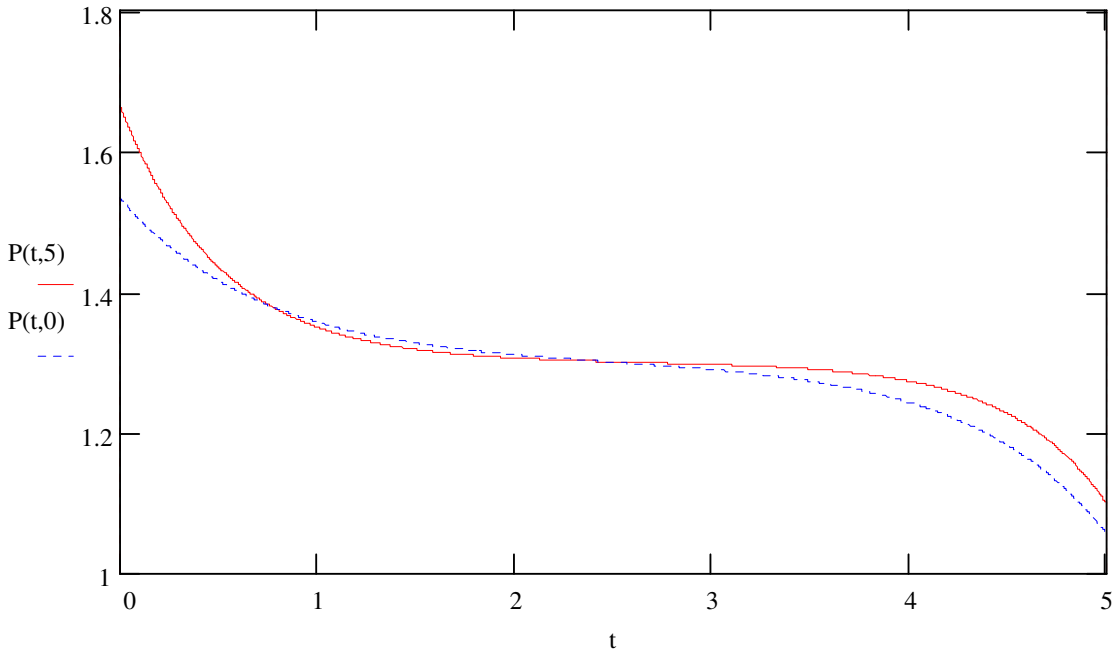
2.1.3. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben négyzetes esetben (τ=0; 5)

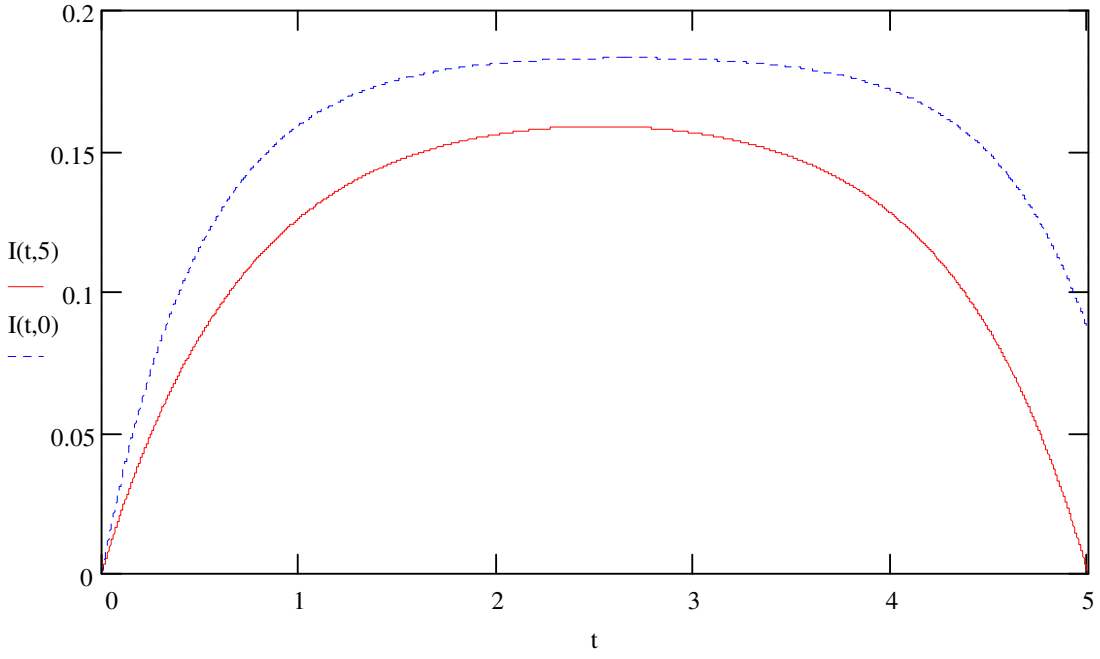




2.1.4. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben négyzetes esetben (τ=0; 5)

($I_1(t)=0.2$; $P_1(t)=1.1$; $S(t)=1.3$)





2.1.4. Szennyezési normák

Ahogy Wirl (1991) megmutatta, mind az abszolút, mind a relatív környezeti normák felülről korlátozzák a termelést.

$$\int_0^T e^{-\rho t}\left[\frac{h}{2}\left(I(t)-I_1(t)\right)^2+\frac{c}{2}\left(P(t)-P_1(t)\right)^2\right]dt \to min$$

$$\dot{I}(t)=P(t)-S(t), \quad I(0)=I_0$$

$$I(t)\geq 0$$

$$0\leq P(t)\leq P^{st}$$

ahol P^{st} a kormány által meghatározott kibocsátási norma.

A szükséges és elégséges optimalitási feltételeket a következő formában írjuk föl:

$$\begin{pmatrix}\dot{\psi}(t)\\ \dot{I}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\ \psi(t)+hI(t)-hI_1(t)\\ P\left(\psi(t)\right)-S(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\psi(T)=0\\ I(0)=I_0\end{matrix},$$

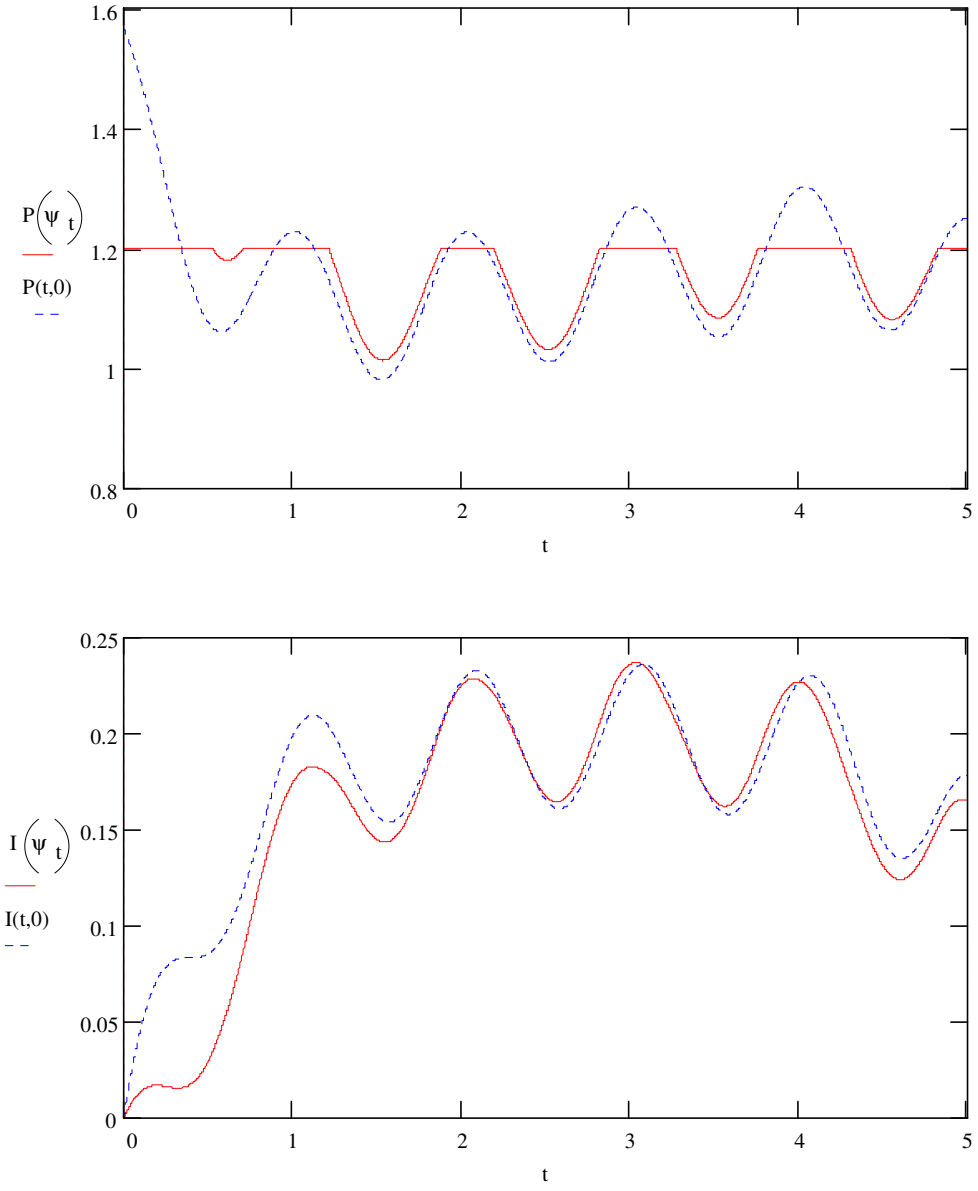
ahol

$$P\left(\psi(t)\right)=\begin{cases}0 & \psi(t)<-cP_1(t)\\ \frac{1}{c}\psi(t)+P_1(t) & -cP_1(t)\leq\psi(t)\leq c\left(P^{st}-P_1(t)\right)\\ P^{st} & \psi(t)>c\left(P^{st}-P_1(t)\right)\end{cases}.$$

Definiáljunk egy belső termelési pályát. Egy termelési pályát akkor tekintünk belső pályának, ha a termelési szint nem egyenlő az adott szennyezési normával.

2.1.2. állítás: A környezeti normák leszűkítik a lehetséges termelési stratégiák körét. Ennek következtében a vállalatoknak többet és tovább kell belső pályák mentén termelnie, hogy ellensúlyozni tudja a kínálati oldalon jelentkező deficitet.

2.1.5. ábra Az optimális termelési stratégia a modellben szennyezési normák esetén



2.1.5. Következtetések

A cikkben a környezeti szabályozás vállalati stratégiákra gyakorolt hatását vizsgáltuk. Wirl (1991) tanulmányával ellentétben HMMS modellt használtunk.

Ha feltételezzük, hogy a környezeti szabályozás miatt jelentkező többlet költség konvex, akkor a termelési és a készletezési szint lineáris esetben csökken. Négyzetes szennyezés esetén pedig a készlet szint akkor csökken, ha a szennyezési adó koefficiens növekszik.

A szennyezési normák bevezetése csökkenti a lehetséges termelési stratégiák számát, a termelés simább lesz.

2.2. A környezeti szabályozás hatása a termelési stratégiára: Folytonos idő modell, konkáv költségekkel

2.2.1. Bevezetés

A környezeti szabályozás hatását Wirl (1991, 1995), Xepapadeas (1992) és Dobos (1998, 1999) elemzi. Munkáikban a kibocsátási díjakat és a kibocsátási normákat vizsgálták. Wirl (1991, 1995) és Dobos (1999) egy módosított Arrow-Karlin termelési és készletezési modellen mutatta meg az előbbi két szabályozó hatását, Xepapadeas pedig a termelési függvényt használta. Mindhárom szerző a maximum elvet alkalmazta matematikai eszközként a modelljében.

Wirl azzal a – sokak által vitatott- feltevéssel élt, hogy a termelési költség a termelési szint konvex függvénye. Ellentétben ezzel, a Wagner-Whitin modellben (1958) a termelési költségek konkávok, ami megfelel a termelés és irányítás menedzsment területén általánosan használt feltevésnek. Így mi is azt fogjuk feltételezni jelen tanulmányunkban, hogy a termelési költség a termelés konkáv függvénye és a környezeti szabályozás hatását egy hasonló modellt használva fogjuk vizsgálni.

A cikk második részében bevezetjük a konkáv termelés-készletezési modellt és bemutatunk egy algoritmust a Pontrjagin-féle maximumelven alapuló optimális termelési stratégia konstrukciójára. A harmadik részben a szennyezési díjakat elemezzük, és levezetjük azokat a feltételeket, amelyek teljesülése esetén a vállalat módosítja a termelési stratégiáját. A negyedik rész foglalkozik a kibocsátási normákkal. Végül értékeljük az eredményeinket.

2.2.2. A modell

Feltételezzünk egy homogén terméket gyártó, készleteit egyszerűen raktáron tartó vállalatot.

A modellhez a következő változókat definiáljuk:

$I(t)$	a készlet szintje t időpontban (állapot változó),
$P(t)$	a termelés szintje t időpontban (irányítási változó),
$S(t)$	kereslet t időpontban (exogén változó); pozitív és folytonosan deriválható,
T	a tervezési időszak hossza,
I_0	kezdeti készletszint,
h	egységnyi készlettartási költség egységnyi időre,
$F(P(t))$	termelési költség, szigorúan konkáv, monotonon növekvő és kétszer folytonosan deriválható,
$p(P(t))$	szennyezés; szigorúan konvex, monotonon növekvő, és kétszer folytonosan deriválható,
P^c	maximális kapacitás konstans
ρ	konstans, nem negatív diszkontráta,
τ	lineáris, szennyezési egységre jutó szennyezési díj.

Vizsgáljuk meg a következő optimális irányítási problémát $[0,T]$ intervallumon:

$$\min_{\substack{0\le P(t)\le P^c,\\ t\in[0,T]}} \int_0^T e^{-\rho t}\left[hI(t)+F(P(t))\right]dt \qquad (2.2.1)$$

$$\dot{I}(t)=P(t)-S(t),\quad I(0)=I_0 \qquad (2.2.2)$$

$$I(t)\ge 0 \qquad (2.2.3)$$

Lehetséges megoldás csak akkor létezik, ha $t\in[0,T]$ időpontig a teljes kereslet kisebb vagy egyenlő, mint a kezdeti készlet nagysága és a *t* időpontig lehetséges maximális termelés, azaz, ha:

$$I_0+P^c t-\int_0^t S(\tau)d\tau \;\ge\; 0,\ \textit{minden}\ t\in[0,T]\ \textit{időpontra.}$$

Ennek a problémának a megoldását korábban Bensoussan és Proth (1984) vizsgálta - az optimális megoldás matematikai struktúráját elemezték és levezettek egy dinamikus programozáson alapuló algoritmust az optimális trajektória konstrukciójára. A megoldáshoz mi a maximumelvet fogjuk alkalmazni, hogy megmutassuk, hogy mindkét eljárás ugyanahhoz a megoldáshoz vezet.

A probléma hamiltoni jelenértéke úgy definiált mint

$$H\big(I(t),P(t),\psi(t).\lambda(t),t\big)=-\big(hI(t)+F(P(t))\big)+\psi(t)\big(P(t)-S(t)\big)+\lambda(t)I(t).$$

A hamiltoni jelenérték három tagból áll, ezek: a költségfüggvény, a súlyozott stock-flow azonosság, és a készletszint nemnegativitása. Az első tag jeleníti meg a direkt, a második és a harmadik pedig az indirekt hozzájárulást rövidtávon a saját tőkéhez, ahol a termelés és készletszint rögzített. $\psi(t)$ adjungált változó úgy definiálható, mint a készlettartás határköltsége. A $\lambda(t)$ függvény pedig egy Lagrange multiplikátor vagy árnyékár, ami megmutatja az elérhető költségmegtakarítást, ha a készletezési kapacitást egy egységgel növeljük. (Lásd Sethi és Thompson (1981).)

Legyen $(I^0(t),P^0(t))$ a problémának egy optimális megoldása. Felhasználva a Pontrjagin-féle maximumelvet, a következő szükséges feltételek adódnak az irányítási problémához (Seierstad, A., Sydsaeter, K. (1987)):

2.2.1. tétel. Ahhoz, hogy $(I^0(t),P^0(t))$ az (1)-(3) probléma optimális megoldása legyen, szükséges, hogy létezzen egy szakaszosan folytonos $\psi(t)$ függvény, ahol minden $0\le t\le T$ esetében teljesül, hogy $\psi(t)\ne 0$

(a)

$$\dot{\psi}(t) = \rho\ \psi(t) - \frac{\partial\ H(I(t), P(t), \psi(t).\lambda(t), t)}{\partial\ I(t)} \Rightarrow ,$$

$$\dot{\psi}(t) = \rho\ \psi(t) + h - \lambda\ (t)$$

(b)

$$\max_{0 \le P(t) \le P^c} \left\{ H\left(I^0(t), P(t), \psi(t).\lambda(t), t\right) \right\} = H\left(I^0(t), P^0(t), \psi(t).\lambda(t), t\right) ,$$

$$\Rightarrow \left\{ \psi(t) P(t) - F\left(P(t)\right) \right\} = \psi(t) P^0(t) - F\left(P^0(t)\right)$$

(c) $\lambda(t)\, I^0(t) = 0,\ \lambda(t) \ge 0,$

(d) $\psi(\bar{t}_i^{\,-}) \ge \psi(\bar{t}_i^{\,+})$, ahol $\psi(t)$ és $I^0(\bar{t}_i) = 0,\ i = 1,2,\ldots,k$ szakadási pontjai $0 < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \ldots < \bar{t}_k \le T$

(e) $\psi(T) I^0(T) = 0,\ \psi(T) \ge 0$.

A tétel (a) feltétele a mozgási szabály $\psi(t)$ adjungált változóra. A következő feltétel azt mondja ki, hogy az optimális megoldáshoz a termelésnek optimálisnak kell lennie. A (c) egyenlőség a készletszint kiegészítő eltérése. A konkavitás miatt nem biztos, hogy az adjungált változó folytonos. A (d) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy a szakadási pontokban a baloldali korlát nem kisebb, mint a jobboldali. Ugrási (váltó-) pontok keletkezhetnek, ha a készlet adott időintervallumon eléri vagy meghaladja a korlátot, vagyis a készlet eléri a nulla szintet.

Most vizsgáljuk meg a tétel (b) feltételét, amiből következik, hogy

$$P^0(t) = \begin{cases} 0 & \psi(t) < F'(\bar{P}) \\ nem\, definiált & \psi(t) = F'(\bar{P}) \\ P^c & \psi(t) > F'(\bar{P}) \end{cases}$$

ahol $\bar{P} \in \left(0, P^c\right)$ konstans kielégíti azt az egyenlőséget, hogy

$$F'(\bar{P}) = \frac{F(P^c) - F(0)}{P^c}.$$

Könnyen belátható, hogy a készletszint nagyobb, mint nulla, ha $P^0(t)=0$, vagy $P^0(t)=P^c$. Ha az $F'(\bar{P})$ konstans egyenlő a $\psi(t)$ adjungált változóval (t_1,t_2) intervallumon, akkor

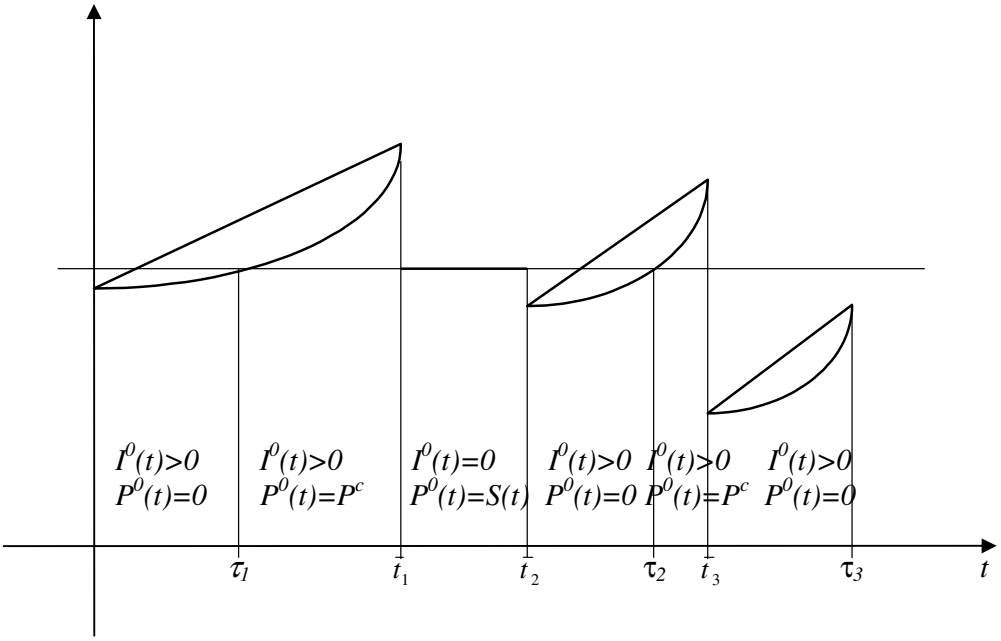
$$0 = \dot{F}'(\bar{P}) = \rho\ F'(\bar{P}) + h - \lambda\ (t).$$

Ez azt jelenti, hogy $\lambda(t) = \rho F'(\overline{P}) + h > 0$ és $I^0(t) = 0$ ezen az intervallumon és az optimális termelési szint megegyezik a kereslet szintjével: $P^0(t) = S(t)$. Az ugrási feltétel szükségessége a következőképpen mutatható meg: az adjungált változóra a megoldás pozitív készletszint esetén $(\lambda(t) = 0)$

$$\psi(t) = \psi_0 e^{\rho t} - \frac{h}{\rho}.$$

A függvény monotonon növekvő, ha a konstans - ψ_0 - pozitív. (Az az eset, ahol a konstans nemnegatív, figyelmen kívül hagyható. Ilyenkor, ugyanis, az adjungált változó nem negatív és a termelési szint nulla lenne. Ami egy olyan speciális esethez vezet, ahol a keresletet ki lehet elégíteni a kezdeti készletekből.) Ha a $\psi(t)$ függvény kisebb, mint $F'(\overline{P})$ konstans, akkor az optimális termelési szint nulla, és ha $\psi(t) > F'(\overline{P})$, akkor a vállalt a maximális kapacitás szintjén termel. Azt a tartományt, ahol a termelés maximális, egy olyan tartomány követi, ahol a vállalat vagy a keresletnek megfelelő mennyiséget állít elő, vagy egyáltalán nem termel. Mindkét esetben teljesül, hogy $\psi(t)$ adjungált változó nem nagyobb, mint $F'(\overline{P})$ konstans, így a váltópontos függvénynek, $\psi(t)$, szakadási pontja van. Az 2.2.1. ábra $\psi(t)$ függvény egy lehetséges útját mutatja.

2.2.1. ábra A $\psi(t)$ változó egy lehetséges útja



Így azt kapjuk, hogy

2.2.2. tétel: A probléma optimális megoldása kiegyenlíti a következő egyenlőséget:

$$I^0(t)\ \left(P^c - P^0(t)\right)\ P^0(t) = 0.$$

Ezt a tételt korábban Bensoussan és Proth (1984) is bizonyította. A 2.2.2. tételt úgy interpretálhatjuk, hogy a készletszint egyenlő nullával, azaz a termelés megegyezik a kereslettel azon az intervallumon, ahol a termelés szintje pozitív, de nem maximális. Értelemszerűen adódik, hogy ha a kereslet nem haladja meg a kapacitási korlátot és a kezdeti készletszint nulla a tervezési időszakban, akkor az az optimális termelési stratégia a vállalat számára, hogy pont annyit termel, mint amennyi szükséges és a készletszintet nullán tartja.

Másrészről, ha egy adott időpontban a készletszint pozitív, akkor a termelés vagy nulla vagy a maximális kapacitással egyezik meg. Könnyen belátható, hogy a vállalat a kapacitási korlát szintjén termel, ha a kereslet nagyobb, mint a rendelkezésre álló kapacitás. Ebből rögtön következik az első lemma.

2.2.1. lemma. A modellünkben az optimális termelési stratégia független a termelési költségek konkrét formájától és a diszkontrátától.

Most adjuk meg az optimális termelési stratégia konstrukcióját. Először a következő lemmát bizonyítjuk.

2.2.2. lemma. Az optimális megoldásban $P^0(t) = 0$ előfordulhat a tervezési időszak elején, de máshol nem.

Bizonyítás: A lemma bizonyításához az 2.2.1. ábrát használjuk. Tegyük fel, hogy a tervezési időszakon belül létezik egy olyan intervallum, ahol a termelési szint nulla, például, $\left[\bar{t}_i, \tau_i\right)$, ($i=2,3$) az 2.2.1. ábrán. Ebben az esetben egy nulla készletszinthez tartozó váltópont, $\bar{t}_i$, választja el azt az intervallumot, ahol nem nulla a termelés a nulla termelési szinthez tartozó intervallumtól. Meg fogjuk mutatni, hogy egy olyan intervallumot, ahol vagy $P^0(t) = P^c$, vagy $P^0(t) = S(t)$ teljesül, nem követhet egy olyan intervallum, ahol $P^0(t) = 0$. Legyen t_1 a váltópont, azaz $I^0(t_1) = 0$ és $\psi\left(t_1^-\right) > \psi\left(t_1^+\right)$. Vizsgáljuk meg az optimális termelési stratégiát $(t_1,t_1+\varepsilon)$ intervallumon, ahol ε tetszőlegesen kicsi szám. Ha $(t_1,t_1+\varepsilon)$ intervallumon a termelési stratégia $P^0(t) = 0$, akkor

$$I^0(t) = I^0(t_1) + \int_{t_1}^{t} \left(P^0(\tau) - S(\tau)\right) d\tau = -\int_{t_1}^{t} S(\tau) d\tau < 0, \quad \forall t \in \left(t_1, t_1 + \varepsilon\right),$$

így ellentmondásra jutottunk, mivel, azt feltételeztük, hogy a készletszint nem negatív.

Most már megkonstruálhatjuk az optimális termelési stratégiát. Az első lépés egy lehetséges trajektória konstrukciója:

$$P_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, t_1\right) \\ P^c & t \in \left[t_1, T\right] \end{cases}$$

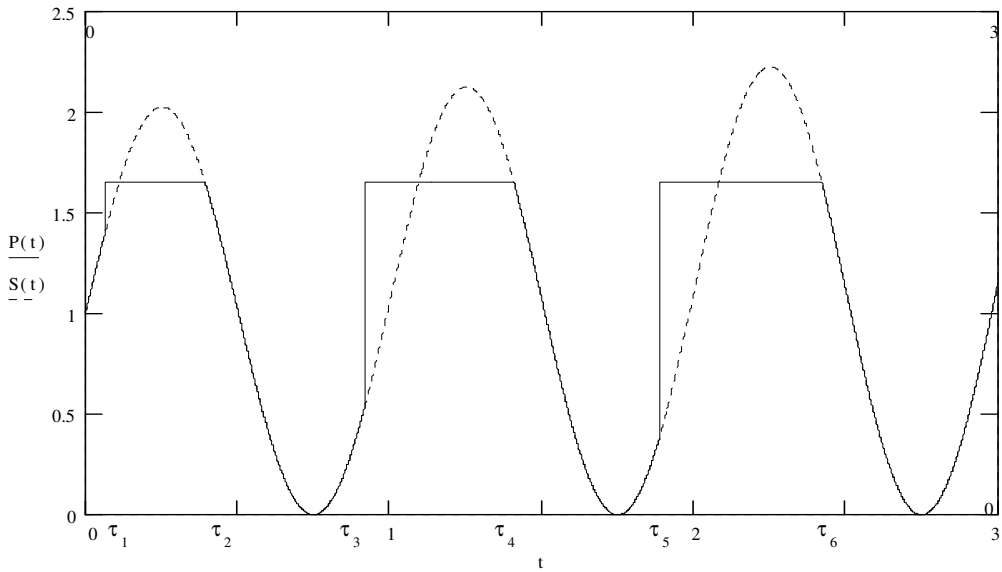
így

$$I_1(t) = I_0 + \int_0^t \left(P_1(\tau) - S(\tau)\right) d\tau \geq 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Legyen $\tilde{t}_1$ egyenlő t azon legmagasabb értékével, amire teljesül, hogy $I_1(t) \geq 0$. Ha $\tilde{t}_1 = 0$, akkor az optimális megoldásnak nincs olyan intervalluma, ahol $P^0(t) = 0$. Legyen $\tilde{t}_2$ t olyan legnagyobb értéke, amire igaz, hogy $I_1(\tilde{t}_2) = 0$ és $I_1(t) > 0$, $[\tilde{t}_2, T]$ intervallumon. Legyen

$$P_2(t) = \begin{cases} P_1(t) & t \in [0, \tilde{t}_2) \\ S(t) & t \in [\tilde{t}_2, \tilde{t}_3) \\ P^c & t \in [\tilde{t}_3, T] \end{cases}.$$

2.2.2. ábra Az optimális termelési stratégia az általános konkáv modellben



t legnagyobb értékét azon a $[\tilde{t}_2, T]$ intervallumon találjuk, amelyikre

$$I_2(t) \geq 0, \quad \forall t \in [\tilde{t}_2, T],$$

ahol $\tilde{t}_3$ a legnagyobb érték. Ahogy $\tilde{t}_3$ elérte a legmagasabb értéket, el kezdjük keresni a $\tilde{t}_4$, és így tovább. Az algoritmus alkalmazását az 2.2.1. ábra szemlélteti. A megoldás a következő:

$$P^o(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \tilde{t}_1) \\ P^c & t \in [\tilde{t}_{2i-1}, \tilde{t}_{2i}) \\ S(t) & t \in [\tilde{t}_{2i}, \tilde{t}_{2i+1}] \end{cases},$$

ahol $i \in I^+$ és I^+ valós, pozitív számok indexhalmaza.

Az algoritmust magát a 2.2.2. ábra mutatja. (Részletesen, lásd a 2.2.F.1. függeléket.) A termelési szint nullával egyenlő a tervezési időszak elején. Mivel a kezdeti készletszint

nagyobb, mint nulla, a vállat nem termel. Ezután három ciklus következik, ezek mindegyike két részből áll. Először a vállalat maximális kapacitáson termel, hogy készleteket halmozzon föl arra az esetre, ha a kereslet magasabb lenne, mint a rendelkezésre álló kapacitás. Ezután a keresletnek megfelelően termel és a készletszintet nullán tartja.

2.2.3. Szennyezési díjak

Tegyük fel, hogy a kormány kibocsátási díjat vezet be, hogy csökkentese a környezetszennyezést. Így a vállalatok most már a termelés, a készletezés és a szennyezés költségét fogják minimalizálni. Tekintsük a következő modellt:

$$\min_{\substack{0\le P(t\le P^c \\ t\in[0,T])}} \int_0^T e^{-\rho\, t}\left[hI(t)+F(P(t))+\tau\ \ p(P(t))\right]dt \qquad (2.2.1´)$$

(2.2.2)-(2.2.3) feltételek mellett.

A módosított termelési költség, $F(P(t))+\tau p(P(t))$, lehet konkáv, konvex vagy szakaszosan konkáv-konvex függvény. A következő lemma jellemzi a lineáris díjakat:

2.2.3. lemma. A módosított termelési költségek (2.2.1´)-(2.2.3) modellben:

(a) konkáv, ha $\tau\le\tau_1$,

(b) szakaszosan konkáv-konvex, ha $\tau_1\le\tau\le\tau_2$,

(c) konvex, ha $\tau\ge\tau_2$, ahol

$$\tau_1 = \min_{0\le P\le P^c}\left\{-\frac{F''(P)}{p''(P)}\right\},$$

$$\tau_2 = \max_{0\le P\le P^c}\left\{-\frac{F''(P)}{p''(P)}\right\}.$$

A bizonyítás nyilvánvaló. Deriváljuk kétszer a módosított termelési költséget. τ_1 és τ_2 konstansok pozitívak.

2.2.1. állítás. A kormány környezeti szabályozása nem hatékony, ha a lineáris, egységnyi szennyezésre jutó díj kisebb, mint τ_1.

Ha a termelési költségek konkávok, akkor a vállalat a lineáris szennyezési díj bevezetésének hatására nem módosítja a termelési, készletezési stratégiáját. Ha a termelési költségek konvexek $(\tau \ge \tau_2)$, akkor a termelési stratégia simább lesz, és a következő állítás teljesül:

2.2.2. állítás. A környezeti szabályozás, akkor hatékony, ha a szennyezési egységre jutó, lineáris díj nagyobb, mint τ_2.

A példánkon szemléltetve,

$$\tau\ (P) = -\frac{F''(P)}{p''(P)} = \frac{0.25}{(P+1)^2}, \quad 0 \le P \le 1.65 .$$

Ha $\tau_1 \le 0.016$ *(1.6 %)*, akkor a vállalat nem változtat a termelési stratégiáján. Ha $\tau_2 \ge 0.25$ *(25 %)*, akkor a termelési költségek konvexek és a termelési stratégia simított.

Vizsgáljuk meg a következő modellt $\tau = 0.12$ esetén, ami 0.016 és 0.25 közé esik. (lásd a Függelék 1. táblázatát):

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^3 \left[0.15 I(t) + \left\{ 0.25 \ln(P(t)+1) + 0.12 \frac{1}{2} P^2(t) \right\} \right] dt \to \min \\ \\ \dot{I}(t) = P(t) - (1+0.05t)(1+\sin 2\pi \mathrm{t}), \quad I(0) = 0.14 \\ I(t) \ge 0 \\ 0 \le P(t) \le 1.65 \end{array}\right\} \quad \text{(P)}$$

Ebben a modellben a termelési költségek konvexek, ha $0.2315 < \psi(t) < 0.2923$, máskülönben konkávok. Az optimális termelési stratégiák:

$$P^o(t) = \begin{cases} 0 & ha \quad \psi(t) < 0.2315 \\ nemdefiniált & ha \quad \psi(t) = 0.2315 \\ P(\psi(t)) & ha \quad 0.2315 < \psi(t) < 0.2923 \quad (0.713 < P^o(t) < 1.65) \\ 1.65 & ha \quad \psi(t) \ge 0.2923 \end{cases},$$

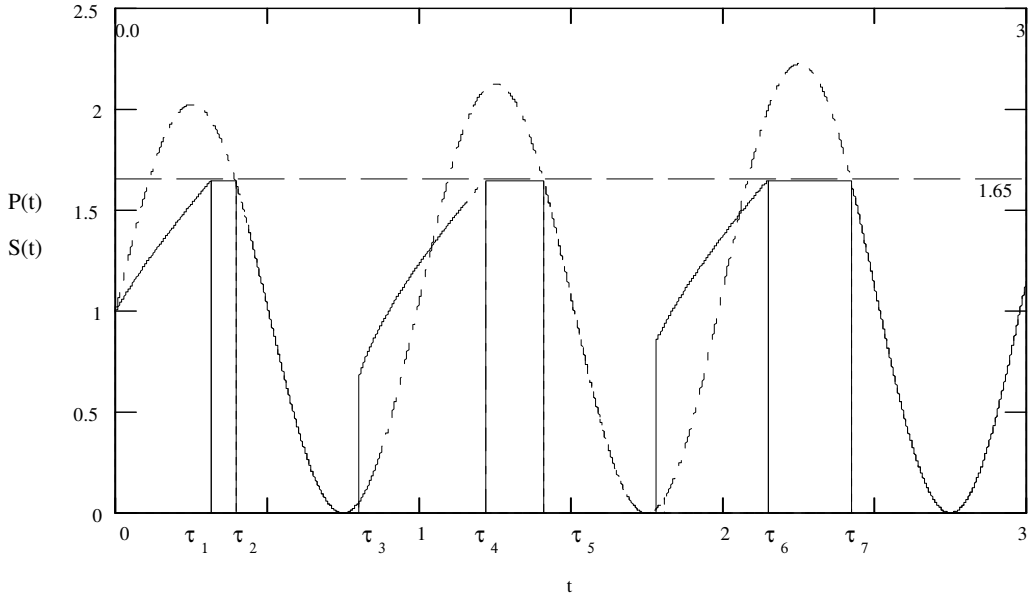
ahol

$$\psi(t) = 0.15t + \psi_0$$

az adjungált változó. Könnyű belátni, hogy, ha $\psi_0 = 0.2315$, akkor a vállalat számára az optimális stratégia a kereslet szintjének megfelelő termelés. Az optimális termelési stratégiát a 2.2.3. ábra mutatja.

Ezt a termelési stratégiát egy vegyes eljárással állíthatjuk elő. Az optimális megoldás, a 2.2.F.1. függelékben található adatokat felhasználva, három ciklusból áll. A ciklusok pedig két részre oszthatóak. Először a készlet szint nagyobb, mint nulla, ami készlet felhalmozást, majd csökkenést jelent. A pozitív készlet szint melletti termelési stratégia szintén két részre osztható. Először a termelési költségek függvénye konvex és a termelés simított, azután a termelési költségek konkávra váltanak, és a vállalat a maximális kapacitáson termel. Másodszor, a készletszint nulla és a termelés szintje a kereslettel egyezik meg.

2.2.3. ábra Az optimális termelési stratégia a számpéldában



2.2.4. Szennyezési normák

Ahogy, azt Wirl (1991) megmutatta, mind az abszolút, mind a relatív szennyezési normák pótlólagos felső korlátot jelentenek,

$$P(t) \leq P^{st},$$

ahol P^{st} a kormány által meghatározott kibocsátási norma.

2.2.3. állítás. A kormányzati szabályozás nem hatékony, ha a kibocsátási norma nagyobb a vállalat maximális kapacitásánál ($P^c \leq P^{st}$).

A bizonyítás értelemszerűen adódik. Az állítás azt mondja ki, hogy az újonnan bevezetett szennyezési norma akkor lehet hatékony, ha megfelel a vállalat termelési kapacitás korlátjának. Tegyük fel, hogy a szabályozás valóban hatékony, azaz

$$P^{st} < P^c,$$

és a szennyezési norma egy lehetséges termelési stratégia

$$I(t) = I_0 + P^{st}t - \int_0^t S(\tau)d\tau \;\geq\; 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Ebben az esetben, az (1)-(3) problémát

$$0 \leq P(t) \leq P^{st}$$

feltétel mellett vizsgáljuk,

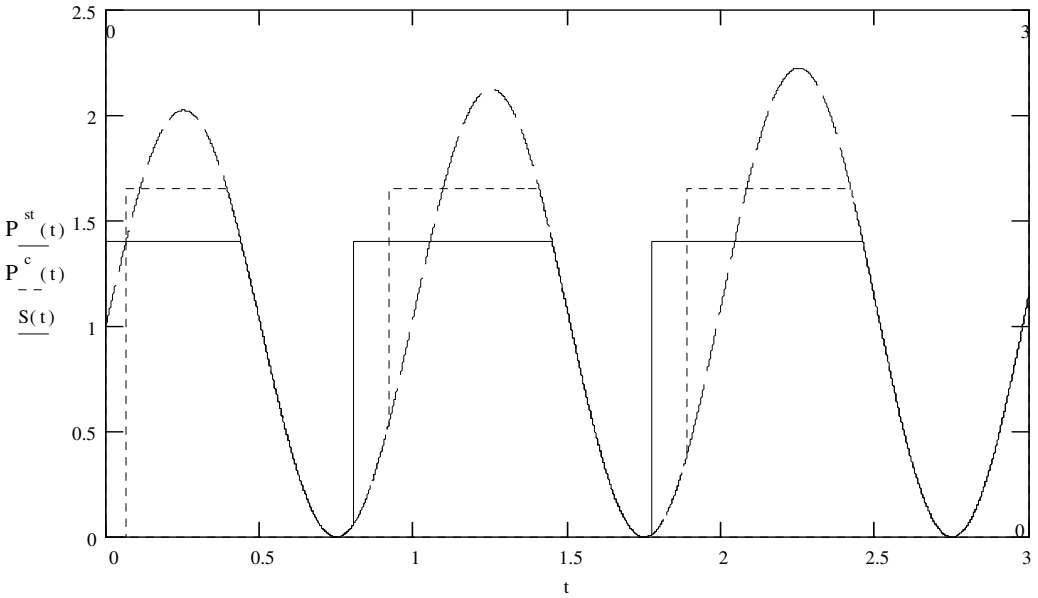
$$0 \le P(t) \le P^c$$

feltétel helyett.

A konkáv modellnél alkalmazott algoritmust felhasználva, megkonstruálhatjuk az optimális termelési stratégiát. Legyen a számpéldánkban $P^{st} = 1.4$. A szennyezési normák bevezetésének hatására a vállalat tovább termel a maximális szinten, mint normák nélkül.

Ezt szemlélteti a 2.2.4. ábra.

2.2.4. ábra Az optimális termelési stratégia szennyezési norma mellett és nélkül



A termelés-készletezési stratégia hasonló ahhoz, amit a 2.2.2. részben levezettünk: először a vállalat maximális kapacitáson termel és a készletszint pozitív, majd pontosan a keresletnek megfelelő mennyiséget állít elő, hogy ne kelljen készleteznie. Ha a kormány hatékony szennyezési normát vezet be, a vállalat válaszképpen nem módosítja a termelés-készletezési stratégiáját, de hosszabb ideig fog a normának megfelelő szinten termelni, és ezzel egy időben lerövidül az az intervallum, amikor a készletszint nulla.

2.2.5. Következtetés

Tanulmányunkban azt vizsgáltuk, hogy a környezeti szabályozás, milyen hatást gyakorol a vállalat stratégiájára. A cikkben konkáv termelési költséget feltételeztünk.

Ha feltételezzük, hogy a kormány környezet politikájából adódó többletköltség konvex, akkor létezik egy olyan adószint, ahol a szennyezési díj nem hat a vállalat termelési stratégiájára. Másrészről viszont, ha az adókulcs magas, akkor a termelési stratégia simább lesz. Ellentétben a konvex termelési költség esetével (Wirl, 1991), itt a simítás az adókulcstól függően fog változni.

A szennyezési normák akkor lesznek hatással a vállalat termelési stratégiájára, ha a megengedett kibocsátás mértéke kisebb, mint a vállalat maximális kapacitása. Az

eredményeink azt mutatják, hogy a szennyezési normák simítják a termelést, függetlenül a termelési költségek konkrét formájától. Ezt konvex esetre Wirl (1991) bizonyította be.

2.2.F.1. Függelék

F.2.2.1. táblázat A példaként alkalmazott paraméterek leírása

Paraméter	Leírás
kereslet	$S(t)=(1+0.05t)(1+\sin 2\pi t)$
termelési költség	$F(P)=0.25\ln(P+1)$
készlettartási költség (egy egységre)	$h=0.15$
diszkontráta	$\rho=0.15$
szennyezési adó	$\tau=0.12$
szennyezés	$0.5P^2$
maximális kapacitás	1.65

2.3. A környezeti szabályozás hatása a termelési stratégiára az Arrow–Karlin modellben

2.3.1. Bevezetés

Wirl (1995) és Xepapadeas (1992) azt elemezték, hogy a környezeti szabályozás milyen hatását gyakorol vállalati stratégiára. A szabályozók közül a kibocsátási díjakat és a kibocsátási normákat vizsgálták. Wirl az Arrow-Karlin termelési-készletezési modellt dolgozta át, hogy megmutassa a két szabályozó hatását. Xepapadeas a termelési függvényt alkalmazta. Mindketten a Pontrjagin-féle maximum elvet használták, és a kibocsátási díjakat és normákat egymástól függetlenül vizsgálták.

Jelen tanulmányban a két szabályozó együttes hatását vizsgáljuk. A legtöbb esetben a vállalatok számára a határérték alatti kibocsátás ingyenes, csak az a fölötti szennyezésért kell a kormánynak díjat fizetniük.

A dolgozat 2.3.2. részében bevezetjük a módosított Arrow–Karlin modellt és megállapítjuk az optimalitás szükséges és elégséges feltételeit. A 2.3.3. rész elemzi az optimális termelési és készletezési stratégiát. Itt vezetjük le az optimalitási feltételeket arra az esetre, amikor a vállalat módosít a termelési tervén. Végül összefoglaljuk az eredményeinket.

2.3.2. A modell

Feltételezzünk egy homogén terméket gyártó vállalatot, amely a készleteit raktáron tartja. Legyenek adottak a következő paraméterek:

$I(t)$ készletszint t időpontban (állapotváltozó),

$P(t)$ termelési szint t időpontban (irányítási változó),

$S(t)$ kereslet t időpontban (nem negatív),

T tervezési időszak hossza,

I_0 kezdeti készletszint,

h egy készletegységre jutó készletezési költség,

$F(P(t))$ termelési költség; konvex, monoton növekvő, és kétszer folytonosan deriválható,

$H(P(t))$ szennyezés; konvex, monoton növekvő, és kétszer folytonosan deriválható,

P^{st} a kibocsátási norma,

τ egy szennyezési egységre jutó, lineáris kibocsátási díj.

Definiáljuk az együttes kibocsátási díj-norma függvényt a következőképpen (2.3.1. ábra):

$$G(P(t)) = \begin{cases} 0 & P(t) < P^{st} \\ H(P(t)) & P(t) \geq P^{st} \end{cases},$$

ahol *G(P(t))* függvény *P(t)* pontban folytonos , és folytonosan differenciálható, kivéve P^{st} pontban. Így az optimális irányítási probléma [*0, T*] intervallumon a következő:

$$\min_{\substack{0 \leq P(t \leq P^c \\ t \in [0,T]}} \int_0^T \left[hI(t) + F(P(t)) + \tau G(P(t)) \right] dt ,$$

$$\dot{I}(t) = P(t) - S(t), \quad I(0) = I_0 ,$$

$$I(t) \geq 0,\ P(t) \geq 0.$$

A probléma hamiltoni jelenértéke úgy definiálható, mint,

$$H\big(I(t), P(t), \psi(t), \lambda(t), t\big) = -\big(hI(t) + F(P(t)) + \tau G(P(t))\big) + \psi(t)\big(P(t) - S(t)\big) + \lambda(t) I(t) .$$

Legyen *(I*(t), P*(t))* a probléma megoldása. Felhasználva a Pontrjagin-féle maximumelvet a következő szükséges (és elégséges) feltételek biztosítják az irányítási probléma optimalitását.

2.3.1. tétel. *Ha I*(t) és P*(t) kielégíti a következő összefüggést, és létezik olyan ψ(t) és λ(t) függvény, amire teljesül, hogy:*

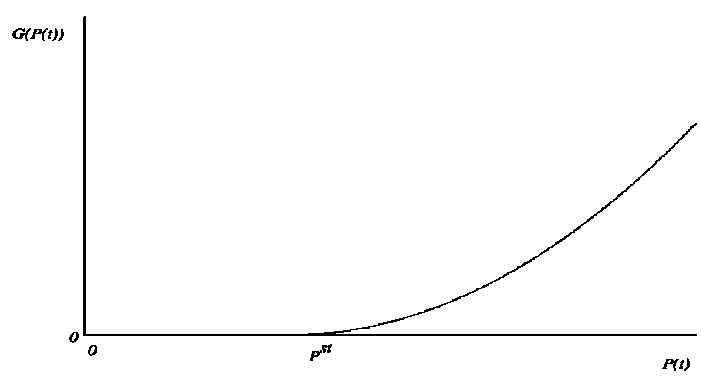
(a) $\dot{\psi}(t) = h - \lambda(t)$,

(b) $\max_{0 \leq P(t)} \{\psi(t)P(t) - F\big(P(t)\big) - \tau G(P(t))\} = \psi(t)P^*(t) - F\big(P^*(t)\big) - \tau G(P^*(t))$,

(c) $\lambda(t)\, I^*(t) = 0,\ \lambda(t) \geq 0,$

(d) $I^0(T) = 0,\ \lambda(T) \geq 0$.

akkor I(t) és P*(t) minimalizálja a költségfüggvényt.*



2.3.1. ábra Az együttes kibocsátási díj-norma függvény

Érdemes hangsúlyoznunk az együttes állapotváltozók árnyékárként való értelmezését. Így $\lambda(t)$ értelmezhető a készletek nemnegativitási korlátjának árnyékköltségként, míg $\psi(t)$ a további egy egység output árnyékértéke.

A (2) feltételből adódóan igaz, hogy:

$$P^*(t) = \begin{cases} 0 & \psi(t) < F'(0) \\ [F']^{-1}(\psi(t)) & F'(0) \le \psi(t) < F'(P^{st}) \\ P^{st} & F'(P^{st}) \le \psi(t) < F'(P^{st}) + \tau H(P^{st}) \\ [F' + \tau H]^{-1}(\psi(t)) & F'(P^{st}) + \tau H(P^{st}) \le \psi(t) \end{cases}$$

Ezek alapján a modellünkben $P^*(t)$ outputra négy lehetséges megoldási tartomány adódik. Először is lehetnek olyan periódusok, amikor $\psi(t)$ output árnyékértéke annyira alacsony, hogy a vállalat nem termel. A második esetben $\psi(t)$ értéke valamivel magasabb ($F'(0) \le \psi(t) < F'(P^{st})$), ekkor a vállaltnak már megéri termelni, de a kibocsátás nem fogja elérni a küszöbértéket. Harmadszor $\psi(t)$ értéke még magasabb, ezért az output mennyisége eléri a küszöbértéket, de azt nem lépi át. Végül, amikor az output árnyékértéke kellően magas ($F'(P^{st}) + \tau H'(P^{st}) \le \psi(t)$) szinten van, a termelés átlépi a küszöbértéket (lásd. 2.3.2. ábra)

A megoldás konstrukciója: a kulcsmegfigyelésünk az, hogy $P^*(t)$ ugyanazt a szerepet tölti be a mi esetünkben, mint a termelés Arrow és Karlin alap modelljében. Kihasználva ezt a megfigyelést, a következő algoritmust alkothatjuk (Lásd Arrow-Karlin (1958)).

2.3.3. Optimális termelési stratégia

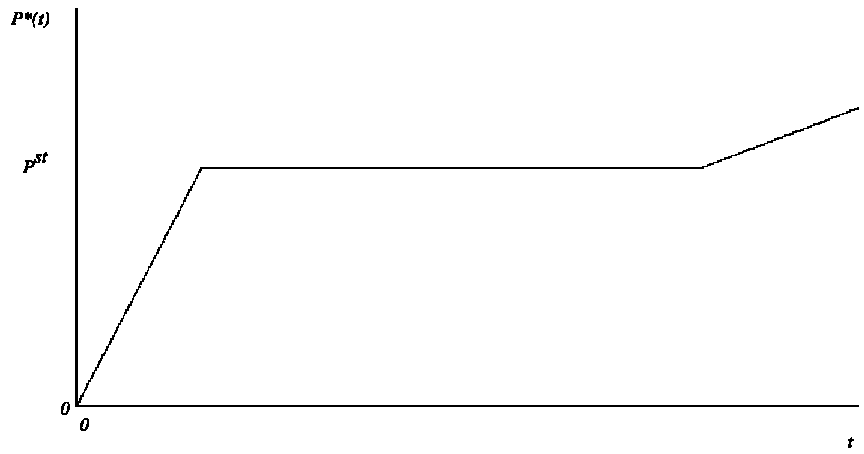
A következő részben a modell speciális eseteit vizsgáljuk.

Tegyük fel, hogy a vállalat optimális termelési stratégiája az általános Arrow–Karlin modellben, kibocsátási díj nélkül $P^*_{\text{ć}}(t)$. Ez esetben teljesül, hogy:

2.3.1. állítás. A vállalat nem módosítja a termelési tervét, amennyiben

$$\max_{t \in [0,T]} P^*(t) \le P^{st} .$$

A tétel jelentése az, hogy a kormányzati beavatkozás nem hatékony, ha a kibocsátási norma magasabb, mint a tervezett maximális termelés, az állami környezeti szabályozás költségei nélkül.



2.3.2. ábra Egy lehetséges termelési stratégia

Tegyük fel, hogy a kibocsátási norma megfelel egy lehetséges termelési stratégiának. Ebben az esetben:

$$I_0 + P^{st}t - \int_0^t S(\tau)d\tau \geq 0, \forall t \in [0,T].$$

Ekkor a következő tétel is teljesül.

2.3.2. állítás A τ *kibocsátási díj nem hat a termelésre, ha*

$$\max_{t\in[0,T]} \psi(t) \leq [F' + \tau H'](P^{st}).$$

E szerint az állítás szerint, a magasabb, lineáris kibocsátási díj növeli azt az intervallumot, ahol a környezeti szabályozás hatékony.

2.3.3. állítás *a vállalat a kibocsátási normánál nagyobb szennyezést fog kibocsátani, amennyiben*

$$\max_{t\in[0,T]} P^*(t) > P^{st}.$$

Ez az állítás azt mutatja meg, hogy, ha a környezeti szabályozás túl szigorú, a vállalatok nem tudnak termelni a kibocsátási norma megsértése nélkül.

2.3.4. Következtetés

Cikkünkben azt tanulmányoztuk, hogy a környezeti szabályozás hogyan befolyásolja az optimális termelési stratégiát. Wirl (1991) cikkével ellentétben, mi egy együttes kibocsátási díj-norma rendszert vizsgáltunk. Ebben a kiterjesztett modellben vezettük le az optimalitás szükséges és elégséges feltételeit.

Bemutattunk néhány speciális esetet is, amikor a kormány környezeti politikája nem bizonyult hatékonynak.

3. A szennyezési jogok bevezetésének hatása a vállalati termelési stratégiára

A szennyezési jog bevezetését két fázisban hajtják végre. Először minden vállalat egy adott szennyezőanyag, pl. CO_2 piacán kap egy induló mennyiséget. Az induló szennyezési kibocsátást leosztó eljárást angolul „grandfathering"-nek hívják. Ennek megállapítása alapulhat az elmúlt néhány év megfigyelési alapján. A második fázisban a vállalatok a rendelkezésre bocsátott szennyezési emisszióval kereskedhetnek, azt adhatják-vehetik, de szigorúan be kell tartaniuk azt a szabályt, hogy a náluk maradt szennyezési jognál többet nem szennyezhetnek egy adott időperiódusban. Ezzel a szennyezést piaci áruvá alakíthatjuk át. Ettől a mechanizmustól az várható, hogy a környezetbarát technológiával rendelkező vállalatok szennyezési jogot adnak el, amivel pótlólagos bevételhez jutnak, míg a szennyezőbb technológiával rendelkező vállalatoknak jogot kell venniük, amivel költségesebben tudják a termékeiket előállítani. Tehát az a várakozás a szennyezési jogokkal szemben, hogy olyan technológiák irányába tolja a vállalatokat, amelyek környezetkímélőek.

A szennyezési jogokat és azok piacát a közgazdasági szakirodalom a játékelmélet segítségével modellezi. Azonban kevés dolgozat foglalkozik azzal, hogy a vállalatok hogyan reagálnak a szennyezési jogok bevezetésére, hogyan módosul a termelési stratégiájuk a bevezetés után. Ebben a fejezetben a szennyezési jogok vállalatokra gyakorolt hatását elemezzük.

A vállalatok szempontjából – matematikai oldalról – a szennyezési jogok egy kombinált környezetterhelési díj – norma szabályozásnak tekinthetőek, azzal az eltéréssel, hogy a szennyezési jog beszerzés/eladás költsége kerül a költségfüggvénybe, és nem a környezetterhelési díj összege.

Az első részfejezetben azt vizsgáljuk, hogy a vállalati termeléselméletbe hogyan építhető be a szennyezési jogok politikája. A második és harmadik alfejezet a szennyezési jogokat egy Arrow-Karlin modellben vizsgálja, és arra keres választ, hogy vajon ez a piaci alapú módszer a környezet szempontjából kímélőbb megoldás-e, mint a kormányzati szabályozási technikák. A két részfejezet közötti különbség abban áll, hogy az utóbbi cikkben megengedtük az árváltozást is időben.

Az utóbbi két fejezettel foglalkozó dolgozatot az utóbbi időben neves folyóiratokban hivatkozták, és Tom Tietenberg, a szennyezési jogok „pápája" által a szennyezési jogokat tárgyaló cikkeket gyűjtő WEB-oldalra is felkerült:

Tradable Permits Bibliography compiled by Tom Tietenberg, General Background/Modeling Issues, (updated 11/2006), www.colby.edu/personal/thtieten/tradable_permits_backgroun.htm

3.1. Szennyezési jogok a vállalati termeléselméletben

3.1.1. Bevezetés

A szennyezési jogok bevezetését vizsgáljuk a mikroökonómia nyereségmaximalizáló vállalatára. A szennyezési jog egy olyan környezetvédelmi szabályozási eszköz, ami a határérték megoldás és a környezetvédelmi adók működési mechanizmusát egyesíti. E szabályozási eszköz részletes leírását Cropper és Oates (1992) cikke tartalmazza, de környezetgazdaságtani tankönyvek is külön fejezetet szentelnek e témának. (Lásd Field (1997).)

A piacosítható szennyezési jogok az externáliák, pl. kén-dioxid vagy szén-dioxid kibocsátás, káros hatásait próbálja internalizálni, azaz ezen környezeti jószágokat teszi piaci jószággá (Varian (1991)). Arrow megmutatta, hogy a jószágok körének kibővítésével a környezeti javak is az árrendszer befolyása alá vonhatóak egy általános egyensúlyelméleti vizsgálatban (Montgomery (1972)). Ezt úgy interpretálhatjuk, hogy a környezeti jószágok a vállalatok termelési függvényébe beépíthetőek, azok termelési tényezőnek tekinthetőek (Cropper-Oates (1992), Dinkelbach-Rosenberg (2002), Feldmann (2002)). Ugyanakkor a környezetszennyezés (emisszió) a vállalatok melléktermékeként jelenik meg, tehát ikerterméke a termelésnek (Dinkelbach-Rosenberg (2002)).

A szennyezési jogok gazdasági vizsgálatánál a főbb kérdések a jogok piacának működése, a jogok kereskedelme kerül az érdeklődés homlokterébe (Kling-Rubin (1997), Majláth (2002)). Kevés szó esik arról, hogy a vállalatok hogyan reagálnak a szennyezési jogok bevezetésére. A szerzők, ha érintik is a vállalati reakciókat, azt csak egy első lépcsőnek tekintik a piac működésének leírásához (Montgomery, Kling-Rubin (1997), Cronshaw-Kruse (1996)).

A vállalati reakciókat először Dinkelbach és Rosenberg (2002) vizsgálta egy Cobb-Douglas típusú termelési függvény és egyetlen jog esetén. Előállították a vállalat nyereségfüggvényét azon feltételezés mellett, hogy a vállalat nem osztható szennyezési jogot szerezhet csak be. A megvásárolt, de a vállalat által fel nem használt jogot úgy interpretálták, mint amivel a környezet „egészségesebbé” válik a csökkenő emisszió miatt. Feldmann (2002) a Koopmans-féle lineáris tevékenységelemzési modellben a jogok csomagját vizsgálja, és megállapítja, hogy a technológiák és jogi csomagok között nem létesíthető mindig helyettesíthetőség. Majláth (2002) egy egyszerű mikroökonómiai modellben azt mutatja meg, hogy a szennyezési jogok bizonyos esetekben kontraszelekcióhoz vezethetnek, amikor éppen a környezetkímélő vállalatok csökkentik a termelésüket.

Ettől a szabályozási (piaci) eszköztől azt várják, hogy a bevezetése a vállalatokat technológiaváltásra készteti, azaz olyan új technológiát alkalmaznak a vállalatok, amely hatékonyabb és a környezetet is kevésbé terheli. A cikk ezt a várt hatásmechanizmust teszteli egy mikroökonómiai modellben.

Két alapesetet vizsgálunk: a vállalat nem vált technológiát és technológiát vált a szennyezési jogok bevezetése után. Először azt kérdezzük, hogy mi történik akkor, ha a szennyezési jog bevezetése után a vállalat nem változtat a technológiáján; hogyan alakul ekkor a vállalat termelési stratégiája. A második kérdés azt az esetet vizsgálja, amikor a szennyezési joggal együtt technológiát is vált a vállalat, ami három lehetséges módon mehet végbe. Vagy csak a termelési technológiát teszi hatékonyabbá, míg a szennyezőanyagok kibocsátása változatlan marad, vagy a technológia változatlan, de az emisszió csökken, és végül a termelési

technológia hatékonyabbá válik és ezzel egyidőben a szennyezés is alacsonyabbá válik. Az a kérdés merül fel a technológiaváltással kapcsolatban, hogy ezen megoldások közül melyik esetén lesz a nyereség a legmagasabb. Ez után azt kérdezzük, hogy a legnyereségesebb technológia bevezetése esetén vásárolni, vagy eladni kell-e szennyezési jogot. A három kérdésre komparatív statikai vizsgálattal keresünk választ. Ezzel eldönthetővé válik az a kérdés, hogy a szennyezési jogok bevezetése valóban környezettudatos technológiák bevezetésére sarkallja-e a vállalatokat.

3.1.2. A vizsgált modellek

A klasszikus mikroökonómia vállalatát vizsgálva azzal a feltételezéssel élünk, hogy a vállalat árelfogadó, tehát az árak alakulására semmilyen hatással nincs, vagyis exogén árakkal szembesül. Az elérhető termelési technológiákat ismertnek tételezzük fel, a szennyezési jog bevezetése előtt és után is. Ezen mellékfeltétel mellett maximalizálja a vállalat a nyereségét. A modell paraméterei és jelölései:

- y a kibocsátás, nemnegatív,

- α a szennyezőanyag kibocsátás, nemnegatív,

- $\Delta\alpha$ a vásárolt vagy eladott szennyezési jog, negatív eladás és nempozitív vásárlás esetén,

- $\underline{x}$ a termeléshez felhasznált inputok vektora, nemnegatív,

- $f_b(\underline{x})$ az $\underline{x}$ inputhoz tartozó maximális kibocsátás a szennyezési jog bevezetése előtt, kétszer folytonosan differenciálható, $\underline{x}$-ben nemnegatív, monoton növekvő és szigorúan konkáv, (termelési függvény),

- $g_b(y)$ a kibocsátástól függő szennyezőanyag emisszió a szennyezési jog bevezetése előtt, kétszer folytonosan differenciálható, y-ban nemnegatív, monoton növekvő és szigorúan konvex, $\alpha = g(y)$,

- $f_a(\underline{x})$ az $\underline{x}$ inputhoz tartozó maximális kibocsátás a szennyezési jog bevezetése után, kétszer folytonosan differenciálható, $\underline{x}$-ben nemnegatív, monoton növekvő és szigorúan konkáv, (termelési függvény),

- $g_a(y)$ a kibocsátástól függő szennyezőanyag emisszió a szennyezési jog bevezetése után, kétszer folytonosan differenciálható, x-ban nemnegatív, monoton növekvő és szigorúan konvex, $\alpha = g_a(y)$,

- p egységnyi végtermék eladási ára, pozitív,

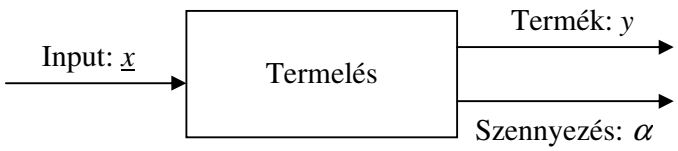
- $\underline{q}$ egységnyi input beszerzési ára, pozitív,

- d egységnyi szennyezési jog piaci ára, pozitív.

A továbbiakban feltesszük, hogy

$$f_b(\underline{x}) < f_a(\underline{x})$$
$$g_b(y) > g_a(y),$$

ami azt jelenti, hogy az új termelési technológiával azonos input esetén többet lehet előállítani, és a bevezetett új környezetvédelmi technológiával a szennyezőanyag emissziója is csökken, azonos mértékű kibocsátás mellett. A modell anyagáramlási folyamatát az 3.1.1. ábra mutatja.



3.1.1. ábra: Anyagáramlás a modellben

Az (F) alapmodellt a szennyezési jog bevezetése előtt a klasszikus mikroökonómia termeléselméleti optimalizálási modellje képviseli:

$$\text{(F)} \quad \begin{aligned} & y \geq 0,\ \underline{x} \geq \underline{0} \\ & y \leq f_b(\underline{x}) \\ & p \cdot y - \underline{q} \cdot \underline{x} \to \max \end{aligned} \quad .$$

Tételezzük fel, hogy az optimalizálási problémát megoldottuk, és legyen az optimális megoldás: $(y^b, \underline{x}^b)$. A szennyezési jog bevezetésénél az induló állapot – feltevésünk szerint - a bevezetést megelőző termelési szint, amely ekkor a maximális nyereséghez tartozó emisszió. Az ekkor még szabad szennyezés mértéke az optimumban $g_b(y^b)=\alpha^b$, amit az induló rendelkezésre álló szennyezésnek tekintünk.

A szennyezési jog bevezetése után a vállalatnak két döntési alternatívája van: technológiát vált, vagy sem. Ha a vállalat nem változtat sem a termelési, sem az emissziós technológián, akkor a módosított (F1) feladat a következő formában írható fel:

$$\text{(F1)} \quad \begin{aligned} & y \geq 0,\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \Delta\alpha \in \Re \\ & y \leq f_b(\underline{x}) \\ & g_b(y) \leq \alpha^b + \Delta\alpha \\ & p \cdot y - \underline{q} \cdot \underline{x} - d \cdot \Delta\alpha \to \max \end{aligned} \quad .$$

A harmadik egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a szennyezőanyagok kibocsátása nem lehet nagyobb, mint a jogok kiosztásánál megállapított mennyiség és annak beszerzett/eladott mennyiséggel növelve/csökkentve értéke. Legyen ennek a feladatnak az optimális megoldása $(y^{a_1}, \underline{x}^{a_1}, \Delta\alpha^{a_1})$.

Térjünk rá azokra az esetekre, amikor a vállalat technológiát vált. A technológiaváltásra három lehetősége van a vállalatnak. Az egyik az, ha csak a szennyezőanyag kibocsátását csökkenti az új technológiával, de a termelési technológiáján nem változtat. Ezt az esetet az (F2) probléma szemlélteti:

$$\text{(F2)} \quad \begin{array}{l} y \geq 0,\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \Delta\alpha \in \Re \\ y \leq f_b(\underline{x}) \\ g_a(y) \leq \alpha^b + \Delta\alpha \\ p \cdot y - \underline{q} \cdot \underline{x} - d \cdot \Delta\alpha \to \max \end{array} .$$

Tegyük fel, hogy az optimumot ebben az esetben a $(y^{a_2}, \underline{x}^{a_2}, \Delta\alpha^{a_2})$ vektornál éri el a vállalat.

A következő vizsgálandó modellben a szennyezőanyag kibocsátása változatlan marad, de hatékonyabb termelési technológiát választ a vállalat:

$$\text{(F3)} \quad \begin{array}{l} y \geq 0,\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \Delta\alpha \in \Re \\ y \leq f_a(\underline{x}) \\ g_b(y) \leq \alpha^b + \Delta\alpha \\ p \cdot y - \underline{q} \cdot \underline{x} - d \cdot \Delta\alpha \to \max \end{array} .$$

Erre az esetre az optimális megoldást a $(y^{a_3}, \underline{x}^{a_3}, \Delta\alpha^{a_3})$ vektor képviseli.

Az utolsó modellben megváltoztatjuk az emissziós és a termelési technológiát is:

$$\text{(F4)} \quad \begin{array}{l} y \geq 0,\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \Delta\alpha \in \Re \\ y \leq f_a(\underline{x}) \\ g_a(y) \leq \alpha^b + \Delta\alpha \\ p \cdot y - \underline{q} \cdot \underline{x} - d \cdot \Delta\alpha \to \max \end{array} .$$

Ehhez a feladathoz tartozó optimum $(y^{a_4}, \underline{x}^{a_4}, \Delta\alpha^{a_4})$.

Technológiaváltás esetén felmerül a kérdés, hogy a három lehetséges fejlesztés közül melyik jár a legnagyobb nyereségnövekedéssel. Mivel ebben a dolgozatban eltekintünk a technológiaváltással járó fix költségek beruházásra gyakorlott hatásától, ezért csak a legjobb fejlesztés utáni technológia nyereségszintjét vetjük össze a technológiaváltás nélküli esettel.

A feltett kérdések megválaszolásához az (F1), valamint az (F2)-(F4) problémák optimális megoldását kell összehasonlítanunk az (F) feladat optimális megoldásával ahhoz, hogy válaszolni tudjunk arra a kérdésre, hogy hogyan módosul a termelési stratégia a szennyezési jog bevezetése után. Mielőtt a vizsgálódásainkra rátérnénk, a szennyezési jog bevezetése után adódó problémákat analizáljuk együttes szerkezetben, eltekintve attól, hogy történt-e technológiai változás.

3.1.3. A problémák matematikai struktúrája szennyezési joggal

Mielőtt az optimális termelési stratégiákat előállítanánk, az (F1)-(F4) problémák matematikai struktúráját vizsgáljuk. Ehhez egy általános feladatcsoportot tekintünk, eltekintve attól, hogy a szennyezési jog bevezetése után éppen a termelési összefüggést, vagy a szennyezőanyag kibocsátását teszi hatékonyabbá a vállalat. Vizsgáljuk általánosan a következő problémát:

$$\begin{aligned} & y \geq 0,\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \Delta\alpha \in \Re \\ & y \leq f_i(\underline{x}) \\ & g_j(y) \leq \alpha^b + \Delta\alpha \\ & p \cdot y - \underline{q} \cdot \underline{x} - d \cdot \Delta\alpha \to \max \end{aligned} \qquad (i=b,a;\ j=b,a).$$

Először a mellékfeltételeket tekintjük. Azt fogjuk belátni, hogy optimum esetén a termelési összefüggést leíró egyenlőtlenség egy termelési függvénnyé válik; valamint azt, hogy éppen annyi szennyezési jogot vásárol a vállalat, amennyi a maximális nyereség termeléséhez szükséges.

Tételezzük fel, hogy a termelési összefüggés az optimumban szigorúan nagyobbra teljesül, vagyis a termelési halmaz belsejében van az optimum: $y^o < f_i(\underline{x}^o)$, ahol jelölje $(y^o,\underline{x}^o,\Delta\alpha^o)$ az általános optimális megoldást. Ha ez így lenne, akkor még lehetne csökkenteni a felhasználást, amivel növelhető lenne a nyereség a költségcsökkentésen keresztül. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy $(y^o,\underline{x}^o,\Delta\alpha^o)$ vektor optimális, tehát az összefüggésnek szigorú egyenlőség formájában kell teljesülnie. Hasonló érveléssel bizonyítható, hogy $g_j(y^o) = \alpha^b + \Delta\alpha^o$. Ebben az esetben a szennyezési jog célfüggvényben lévő linearitását kell kihasználnunk. Ezzel beláttunk a következő lemmát.

3.1.1. lemma. A $(y^o,\underline{x}^o,\Delta\alpha^o)$ optimális termelési stratégia a következő probléma megoldásaként adódik:

$$\begin{aligned} & y \geq 0,\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \Delta\alpha \in \Re \\ & y = f_i(\underline{x}) \\ & g_j(y) = \alpha^b + \Delta\alpha \\ & p \cdot y - \underline{q} \cdot \underline{x} - d \cdot \Delta\alpha \to \max \end{aligned} \qquad (i=b,a;\ j=b,a).$$

Megjegyzés. Mivel feltételeztük, hogy a termelési függvény minden nemnegatív $\underline{x}$ vektor esetén szintén nemnegatív, ezért a problémát az

$$\begin{aligned} & y = f_i(\underline{x}) \\ & \Delta\alpha = g_j(y) - \alpha^b \end{aligned}$$

helyettesítéssel egyszerűbb alakra hozhatjuk:

$$\begin{aligned} & \underline{x} \geq \underline{0} \\ & p \cdot f_i(\underline{x}) - \underline{q} \cdot \underline{x} - d \cdot g_j(f_i(\underline{x})) + d \cdot \alpha^b \to \max \end{aligned}.$$

Az optimális megoldásokat egyszerű differenciálással meghatározhatjuk, felhasználva a nemnegativitást az $\underline{x}$ vektorra:

$$p \cdot \frac{d}{d\underline{x}} f_i\left(\underline{x}^o\right) - \underline{q} - d \cdot \frac{d}{dy} g_j\left(f_i\left(\underline{x}^o\right)\right) \cdot \frac{d}{d\underline{x}} f_i\left(\underline{x}^o\right) \leq \underline{0},$$

valamint

$$\underline{x}^o \cdot \left[p \cdot \frac{d}{d\underline{x}} f_i\left(\underline{x}^o\right) - \underline{q} - d \cdot \frac{d}{dy} g_j\left(f_i\left(\underline{x}^o\right)\right) \cdot \frac{d}{d\underline{x}} f_i\left(\underline{x}^o\right) \right] = 0.$$

Ez a két feltétel nem csak szükséges, hanem elégséges feltétele is az optimumnak, mivel az $f_i(\underline{x})$ szigorúan konkáv és $g(y)$ szigorúan konvex függvények. Azonnal látható, hogy a vállalat teljesen leáll a termeléssel, ha

$$p \cdot \frac{d}{d\underline{x}} f_i(\underline{0}) - \underline{q} - d \cdot \frac{d}{dy} g_j(0) \cdot \frac{d}{d\underline{x}} f_i(\underline{0}) \leq \underline{0},$$

vagyis ekkor a nyereség kizárólag a szennyezési jog teljes eladásából fog származni: $\Delta\alpha^o = -\alpha^b$.

Tételezzük most fel, hogy a szennyezési jog bevezetése utáni kiosztásnál induló α^b szennyezést kifejezhetjük a szennyezés függvényében, vagyis

$$\alpha^b = g_j(\tilde{y}) \qquad (j=b,a),$$

ahol $\tilde{y} = y^b$, ha a szennyezési jog bevezetése után nem változtat a vállalat az emisszióján ($j=b$), míg $\tilde{y} > y^b$, ha a vállalat a szennyezési technológiáját környezetbaráttá teszi. Ez utóbbi összefüggés az alábbi egyenlőtlenségből következik:

$$\alpha^b = g_b\left(y^b\right) = g_a(\tilde{y}) > g_a\left(y^b\right),$$

mivel feltételeztük, hogy az új technológia kevesebb szennyezőanyag kibocsátásával jár.

A továbbiakban nem fogjuk az optimális megoldásokat expliciten kifejezni, hanem e helyett az optimumok kvalitatív tulajdonságait fogjuk vizsgálni; feltételezve, hogy nem kell a termelést beszüntetni.

3.1.4. Az új technológiák összehasonlítása

Ebben a részben az (F2)-(F4) feladatok optimális megoldásait fogjuk összevetni annak eldöntéséhez, hogy melyik fejlesztési alternatíva hordozza a legtöbb nyereséget. Az összehasonlítást két lépésben hajtjuk végre. Első lépésben az (F2) és (F4) problémák optimális megoldását tekintjük, majd az (F3) és (F4) problémák nyereség maximumait hasonlítjuk össze. Az optimális eredmények összevetése az 3.1.1. lemmára alapozódik.

Az (F2) probléma optimális megoldása a $(y^{a_2}, \underline{x}^{a_2}, \Delta\alpha^{a_2})$ vektor, míg az (F4)-é $(y^{a_4}, \underline{x}^{a_4}, \Delta\alpha^{a_4})$. Ekkor a $(y^{a_2}, \underline{x}^{a_2}, \Delta\alpha^{a_2})$ vektor egy lehetséges megoldása az (F4) feladatnak, mert

$$\begin{aligned} & y^{a_2} \geq 0, \underline{x}^{a_2} \geq \underline{0}, \Delta\alpha^{a_2} \in \Re \\ & y^{a_2} = f_b\left(\underline{x}^{a_2}\right) < f_a\left(\underline{x}^{a_2}\right) \\ & g_a\left(y^{a_2}\right) = \alpha^b + \Delta\alpha^{a_2} \end{aligned} .$$

Ez abból következik, hogy az új technológiával azonos inputok mellett több végterméket lehet előállítani. Azonban ez nem optimális, így

$$p \cdot y^{a_2} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_2} - d \cdot \Delta\alpha^{a_2} < p \cdot y^{a_4} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_4} - d \cdot \Delta\alpha^{a_4},$$

ami azt jelenti, hogy az (F4) feladat optimális megoldása nagyobb, mint az (F2) problémáé.

Legyen most az (F3) probléma optimális megoldása a $(y^{a_3}, \underline{x}^{a_3}, \Delta\alpha^{a_3})$ vektor, míg az (F4)-é $(y^{a_4}, \underline{x}^{a_4}, \Delta\alpha^{a_4})$. Ebben az esetben a $(y^{a_3}, \underline{x}^{a_3}, \Delta\alpha^{a_3})$ vektor egy lehetséges megoldása az (F4) feladatnak, mert

$$\begin{aligned} & y^{a_3} \geq 0, \underline{x}^{a_3} \geq \underline{0}, \Delta\alpha^{a_3} \in \Re \\ & y^{a_3} = f_a\left(\underline{x}^{a_3}\right) \\ & g_a\left(y^{a_3}\right) < \alpha^b + \Delta\alpha^{a_3} = g_b\left(y^{a_3}\right) \end{aligned} ,$$

de az új technológiával az emisszió csökken. Így ez nem lehet optimális program:

$$p \cdot y^{a_3} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_3} - d \cdot \Delta\alpha^{a_3} < p \cdot y^{a_4} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_4} - d \cdot \Delta\alpha^{a_4},$$

ami azt jelenti, hogy az (F4) feladat optimális megoldása nagyobb, mint az (F3) problémáé.

Ezzel bizonyítást nyert a

3.1.2. lemma. Ha a vállalat a szennyezési jog bevezetése után technológiaváltásra szánja el magát, akkor a legtöbb nyereséget azzal éri el, ha mind a termelési, mind az emissziós technológiát lecseréli.

Ezután az előzetes választás után azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen hatással van a technológia (nem) választás a nyereségre, és ez szennyezési jog beszerzéssel, vagy eladással jár-e.

3.1.4.1. Optimális termelési stratégiák a szennyezési jog bevezetése után

3.1.4.1.1. A vállalat nem változtat a technológián a szennyezési jog bevezetése után

Ebben az esetben az (F) feladat és az (F1) feladat optimális megoldását kell összevetnünk. Tételezzük fel, hogy az (F1) feladat optimális megoldása adott, amit $(y^b, \underline{x}^b)$ kibocsátás és

ráfordítás jelöl. A szennyezőanyagok emissziója ekkor $\alpha^b = g_b(y^b)$ mennyiség lesz, amit a következő periódusban a vállalat használhat.

Tegyük fel, hogy a vállalat megoldotta az (F1) problémát, aminek a megoldása $(y^{a_1}, \underline{x}^{a_1}, \Delta\alpha^{a_1})$. A megoldásokat két lépésben vetjük össze. Az (F1) feladat felírásából következik, hogy annak egy lehetséges megoldása a $(y^b, \underline{x}^b, 0)$ vektor, ami egy olyan tevékenységet jelent, amikor a vállalat maximalizálja a nyereségét és nem vesz részt a szennyezési jogok adás-vételében, ugyanis

$$\begin{aligned} y^b &= f_b\left(\underline{x}^b\right) \\ g_b\left(y^b\right) &= \alpha^b + 0 \end{aligned}.$$

Ez azt is jelenti, hogy a $(y^b, \underline{x}^b, 0)$ vektor nem lehet optimális megoldása az (F1) feladatnak, így

$$p \cdot y^b - \underline{q} \cdot \underline{x}^b - d \cdot 0 < p \cdot y^{a_1} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_1} - d \cdot \Delta\alpha^{a_1}.$$

Ugyanakkor az $(y^{a_1}, \underline{x}^{a_1})$ vektor egy lehetséges, de nem optimális megoldása az (F) feladatnak, mivel

$$y^{a_1} = f_b\left(\underline{x}^{a_1}\right).$$

Ezzel azt láttuk be, hogy

$$p \cdot y^{a_1} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_1} < p \cdot y^b - \underline{q} \cdot \underline{x}^b.$$

A két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$p \cdot y^{a_1} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_1} < p \cdot y^b - \underline{q} \cdot \underline{x}^b < p \cdot y^{a_1} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_1} - d \cdot \Delta\alpha^{a_1}.$$

Rendezve az egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy $\Delta\alpha^{a_1} < 0$, ami azt jelenti, hogy a szennyezési jog kiosztásakor rendelkezésre álló α^b szennyezési mennyiségből elad a vállalat. Eredményünket a következő lemma foglalja össze.

3.1.3. lemma. Ha a vállalat nem változtat technológiáján a szennyezési jog bevezetése után, akkor a nyeresége nő, mégpedig oly módon, hogy csökken az alaptevékenységéből származó profit, amit a szennyezési jog eladásából származó bevétellel kompenzál.

A lemmából az is következik, hogy a vállalat csökkenti a végtermék kibocsátását is, mert

$$g_b\left(y^{a_1}\right) = \alpha^b + \Delta\alpha^{a_1} < g_b\left(y^b\right),$$

ahonnan a $g_b(y)$ függvényre tett monotonitási tulajdonság miatt teljesül az állítás, vagyis $y^{a_1} < y^b$.

Figyeljük meg, hogy a bizonyításhoz nem kellett kihasználnunk az $f_b(\underline{x})$ és $g_b(y)$ függvények differenciálhatóságát, csak szigorú konkavitását.

3.1.4.1.2. A vállalat a leghatékonyabb technológiát vezeti be

Ekkor az (F) és az (F4) feladat optimális megoldását kell összevetnünk. Az előbbi esettel szemben ekkor azzal módosul a probléma, hogy a termelési és emissziós technológia is hatékonyabb.

Tegyük fel, hogy az (F4) probléma $(y^{a_4}, \underline{x}^{a_4}, \Delta\alpha^{a_4})$ megoldása ismert. Az (F4) feladat felírásából következik, hogy annak egy lehetséges megoldása a $(y^b, \underline{x}^b, 0)$ vektor, ugyanis

$$\begin{aligned} f_b\left(\underline{x}^b\right) &= y^b < f_a\left(\underline{x}^b\right) \\ g_a\left(y^b\right) &< \alpha^b + 0 = g_b\left(y^b\right) \end{aligned}.$$

Ez itt is jelenti, hogy a $(y^b, \underline{x}^b, 0)$ vektor nem lehet optimális megoldása az (F4) feladatnak, így

$$p \cdot y^b - \underline{q} \cdot \underline{x}^b - d \cdot 0 < p \cdot y^{a_4} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_4} - d \cdot \Delta\alpha^{a_4}.$$

Ez azt jelenti, hogy az új, környezetkímélő technológia bevezetésével növekedni fog a vállalat nyeresége. A továbbiakban arra a kérdésre keresünk választ, hogy ez a növekedés miből származik: az alaptevékenységből származó nyereség növekedéséből, vagy abból, hogy a szennyezési jog értékesítéséből tesz szert többlet bevételre a vállalat, amint az a technológiaváltás elhanyagolásakor bekövetkezik.

A kérdés megválaszolásához az 3.1.1. lemma eredményeit használjuk fel. Vezessük be az (F4) probléma költségfüggvényét, amelyet az alábbi módon definiálhatunk:

$$C(y) = \min\left\{\underline{q} \cdot \underline{x} \middle| \; y = f_a(\underline{x}), \underline{x} \geq \underline{0}\right\}.$$

Ez a függvény monoton növekvő, differenciálható és konvex függvény. (Mas-Collel et al. (1995)) Ennek ismeretében az (F4) feladat $\Pi(y)$ célfüggvényét (nyereségfüggvény) a következő formában írhatjuk fel:

$$\Pi_a(y) = p \cdot y - C_a(y) + d \cdot \left[g_a(\tilde{y}) - g_a(y)\right],$$

ahol $g_a(\tilde{y}) = \alpha^b$ a kiosztott induló szennyezési jogot jelenti, de az új technológia kibocsátásának függvényében. Ez azt jelenti, hogy ha a vállalat éppen $\tilde{y}$ nagyságot termel, akkor nem kell sem eladnia, sem beszereznie szennyezési jogot. A $\Pi_a(y)$ függvénynek, amely szigorúan konkáv a feltevések szerint, a maximuma az y^{a_4} pontban fekszik. Differenciáljuk ezt a nyereségfüggvényt a kibocsátás szerint

$$\Pi'_a(y) = p - C'_a(y) - d \cdot g'_a(y).$$

A vállalatnak az össznyereség maximalizálásához akkor kell szennyezési jogot beszereznie, ha ez a nyereségfüggvény a $\tilde{y}$ pontban pozitív, vagyis itt a profitfüggvény monoton növekvő,

míg eladás akkor történik, ha itt negatív a függvény, vagyis a teljes nyereségfüggvény monoton csökkenő e pontban. Ha a függvény deriváltja nulla e pontban, vagyis az induló kiosztás nyereségmaximumot tesz lehetővé, akkor a vállalat nem vesz részt a szennyezési jogok kereskedelmében, mert az induló szennyezési jog éppen fedi az emisszió mértékét.

Ha a vállalatnak nem kell eladnia szennyezési jogot, azaz vásárolnia kell, akkor az alaptevékenységből származó nyeresége is nő, hiszen

$$p \cdot y^b - \underline{q} \cdot \underline{x}^b - d \cdot 0 < p \cdot y^{a_4} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_4} - d \cdot \Delta\alpha^{a_4} \le p \cdot y^{a_4} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_4} .$$

Ha a vállalat szennyezési jogot kell eladjon a nyeresége maximalizálásához, akkor az alaptevékenységéből származó nyeresége lehet nagyobb és kisebb is, mint a szennyezési jog bevezetése előtt. Vizsgáljuk azt az esetet, hogy az eladás után mikor növekszik az alaptevékenységből származó nyereség. Ehhez tekintsük a következő módosított feladatot

$$\begin{aligned} & y \ge 0,\ \underline{x} \ge \underline{0} \\ & y \le f_a(\underline{x}) \\ & g_a(y) \le \alpha^b + \Delta\alpha^{a_4} \\ & p \cdot y - \underline{q} \cdot \underline{x} \to \max \end{aligned} .$$

Ennek a feladatnak az optimális megoldása $(y^{a_4}, \underline{x}^{a_4})$, hiszen az optimális szennyezési jog eladást/vásárlást szerepeltetjük a szennyezés korlátozásánál. Most arra a kérdésre akarunk választ kapni, hogy a szennyezési jog bevezetése előtti termelési stratégia $(y^b, \underline{x}^b)$ lehetséges megoldása-e ennek a problémának. Ha egy lehetséges megoldás, akkor

$$p \cdot y^b - \underline{q} \cdot \underline{x}^b \le p \cdot y^{a_4} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_4},$$

ami azt jelenti, hogy a szennyezési jog bevezetése után növekszik az alaptevékenységből származó nyeresége a vállalatnak. Ez akkor következik be, ha

$$\begin{aligned} & y^b < f_a(\underline{x}) \\ & g_a(y^b) \le \alpha^b + \Delta\alpha^{a_4} = g_a(y^{a_4}) \end{aligned},$$

hiszen a $(y^b, \underline{x}^b)$ termelési stratégia lehetséges a feltételezésünk szerint. Ez azt jelenti, hogy $y^b \le y^{a_4}$, vagyis a jog bevezetése utáni végtermék kibocsátásának nagyobbnak kell lennie, mint az azt megelőzőnek. Ezzel beláttuk a következő lemmát:

3.1.4. lemma. Technológiaváltás után a vállalat teljes nyeresége nő. Ha a termékkibocsátását is növeli a vállalat, akkor az alaptevékenységből származó nyereség is nő, eltekintve attól, hogy a vállalat szennyezési jogot elad vagy vesz.

Megjegyzés. A lemma bizonyításának gondolatmentét követve könnyen belátható, hogy ha nem változtat a technológiáján a vállalat, akkor mindenképpen el kell adnia szennyezési jogot, ugyanis ekkor a teljes profitfüggvény

$$\Pi_b(y) = p \cdot y - C_b(y) + d \cdot \left[g_b(y^b) - g_b(y)\right],$$

ami az y^b pontban negatív, mivel $p - C_b'(y^b) - d \cdot g_b'(y^b) = -d \cdot g_b'(y^b) < 0$, amiatt, hogy az y^b pontban az alaptevékenységből származó nyereség maximális, így annak differenciálja zérus lesz.

3.1.4.2. Váltson-e technológiát a vállalat a szennyezési jog bevezetése után?

Vessük végül össze a fenti két termelési stratégiát. Könnyen megmutatható, hogy a technológiaváltás nélküli optimális $(y^{a_1}, \underline{x}^{a_1}, \Delta\alpha^{a_1})$ stratégia a leghatékonyabb technológiaváltás utáni problémának egy lehetséges megoldása:

$$\begin{aligned} & y^{a_1} \geq 0,\ \underline{x}^{a_1} \geq \underline{0},\ \Delta\alpha^{a_1} \in \Re \\ & f_b\left(\underline{x}^{a_1}\right) = y^{a_1} < f_a\left(\underline{x}^{a_4}\right) \\ & g_a\left(y^{a_1}\right) < \alpha^b + \Delta\alpha^{a_1} = g_b\left(y^{a_1}\right) \end{aligned} .$$

Ez abból következik, hogy az új technológiával azonos inputok mellett több végterméket lehet előállítani és az emisszió is kisebb. Azonban ez nem optimális, így

$$p \cdot y^{a_1} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_1} - d \cdot \Delta\alpha^{a_1} < p \cdot y^{a_4} - \underline{q} \cdot \underline{x}^{a_4} - d \cdot \Delta\alpha^{a_4},$$

vagyis a vállalat nyeresége akkor lesz legnagyobb, ha azonos input mellett a legnagyobb kibocsátást és azonos output mellett a legkisebb szennyezőanyag kibocsátást mutató termelési technológiát vezeti be. Ezt az eredményt a 3.1.5. lemmában foglaljuk össze.

3.1.5. lemma. Egy termelő vállalat akkor maximalizálja legjobban a nyereségét a szennyezési jogok bevezetése után, ha olyan technológiát vezet be, amely növeli a végtermék kibocsátást, ugyanakkor a szennyezőanyag kibocsátást a minimálisra csökkenti.

Ezzel vizsgálódásaink végére értünk.

3.1.5. Összegzés

Ebben a dolgozatban a szennyezési jogok bevezetésének hatását vizsgáltuk egy nyereségét maximalizáló vállalat esetére. A komparatív statikai vizsgálatban az néztük, hogy technológiaváltással vagy anélkül reagáló vállalatnak hogyan alakul a nyeresége. A technológia megváltoztatására három lehetséges alternatívája van a vállalatnak: a termelési és/vagy emissziós technológiák cseréje.

A vizsgálatok arra az eredményre vezettek, hogy ha a vállalat technológiát vált, akkor a legnagyobb nyereségét akkor éri el, ha új, hatékonyabb termelési és emissziós technológiát vezet be, tehát a két technológia együttes bevezetése vezet a legjobb eredményre. Annak a kérdésnek az eldöntésére, hogy technológiaváltásra sarkallja-e a vállalatot a szennyezési jog bevezetése, igenlő választ adhatunk. A technológiaváltással érhető el a nyereség maximális növekedése. A vállalat az új technológia bevezetése után adhat és vehet is szennyezési jogot, míg ha nem vált technológiát csak a szennyezési jog eladásából származik a többlet nyereség.

Ebben a fejezetben eltekintettünk attól, hogy az új technológiák bevezetése pótlólagos beruházási költséggel járnak. Az alkalmazott vizsgálati keretet bővíteni lehet és kell is a

megelőzési költségek bevezetésével. Felmerül a kérdés, hogy ezen költségek bevezetése hogyan módosítja az új technológia megválasztását. Ugyanakkor a komparatív statikai vizsgálataink során azzal a feltételezéssel éltünk, hogy az árak nem változnak. Egy következő általánosítás ezt a feltevést oldhatná fel. Végül, figyelembe lehetne venni a szennyezési jogok piacán is jelenlevő tranzakciós költségeket, és azok hatásait.

3.2. Az emisszió kereskedelem hatása a vállalat termelés-készletezési stratégiájára az Arrow-Karlin modellben

3.2.1. Bevezetés

A tanulmányunk célja, hogy elemezzük az értékesíthető szennyezési jogok (emisszió kereskedelem vagy kibocsátási jogok piaca) hatását a termelés-készletezési döntésekre. A piacteremtés, mint környezeti szabályozás, a piaci és hatósági eszközök kombinációja (Field (1997)). A hatósági eszközöket - mint például a kibocsátási normák és a környezeti adók – az különbözteti meg a piaci szabályozóktól, hogy ezek által a kormány az egyes vállalatok működésébe avatkozik be, nem a piac egészét szabályozza. A szennyezési jogok piacának lényege, hogy a jogok kezdeti elosztása után a vállalat a piacon kereskedhet a szennyezési egységeivel, értékesíthet vagy beszerezhet jogokat, annak megfelelően, hogy mennyi káros anyagot kíván kibocsátani. A szennyezési egységek árát a piac határozza meg, ez a szabályozás piaci eleme. A hatósági jellegét az adja, hogy a megvásárolt/értékesített szennyezési szint a vállalat szempontjából egyrészről egy kibocsátási normának felel meg (felső korlát), másrészről pedig környezeti adónak (többletköltség vagy –bevétel). E fejezetben egy termelő vállalat szempontjából fogjuk vizsgálni az emisszió kereskedelem bevezetésének hatását.

A vizsgálatunkat a jól ismert Arrow-Karlin típusú dinamikus termelés-készletezési modellen alapszik (Arrow-Karlin (1958)). Ebben a modellben készlettartási költségek lineárisak és a termelési költségek a termelési szint nem csökkenő és konvex függvényei. Azt feltételezzük, hogy a szennyezési jogok kezdeti elosztása a szabályozás bevezetése előtti, minimális költségű termelés-készletezési stratégia melletti kibocsátási szint alapján történik. A szabályozó bevezetése után a vállalatnak lehetősége nyílik arra, hogy a meglévő jogai mellé további kibocsátási egységeket vásároljon vagy eladjon belőlük. Ez annyit jelent, hogy a klasszikus Arrow-Karlin modellt kiterjesztjük egy kibocsátási korláttal, amely a szennyezési egységek beszerzésével/értékesítésével módosítható. Az emisszió kereskedelem bevezetésének azonnali hatását fogjuk vizsgálni. Feltételezzük továbbá, hogy a jogok teljesen oszthatóak, a beszerzés/értékesítés költségei lineárisak, vagyis a szennyezési jogok ára a tervezési időszakban végig konstans. Azért indokolt ezzel a feltételezéssel élnünk, mert egy viszonylag rövid tervezési időszakot vizsgálunk, míg a modellünkben az árak rövidtávon nem változnak. A pillanatnyi szennyezés is a termelési szint nem csökkenő, konvex függvénye. A döntéshozók célja, hogy minimalizálják a megfelelő költségeket az új rendszer bevezetése után. Arra keressük a választ, hogy mennyi kibocsátási egységet kell beszerezni/eladni és mi lesz ennek a hatása a termelés-készletezési stratégiára.

E fejezet a következő felépítést követi. A második részben definiáljuk a változókat és a paramétereket és összehasonlítás céljából ismertetünk két rendszert: a klasszikus Arrow-Karlin modellt és a szennyezéssel módosított változatot. A következő részben bemutatjuk az optimális megoldás néhány jellemzőjét a klasszikus modellhez hasonlítva. Ezeknek a kvalitatív tulajdonságoknak a segítségével megmutatható, hogy az általunk elemzett modell átalakítható Wirl szennyezési adókkal vizsgált modelljévé (Wirl (1991, 1995)). Az optimális megoldást a 4. fejezetben adjuk meg. Meg fogjuk mutatni, hogy az emisszió kereskedelem simítja a vállalat termelését és a készletszint magasabb lesz. A következő részben egy számpélda segítségével szemléltetjük a korábban leírtakat. Végül összefoglaljuk a tanulmány eredményeit.

3.2.2. A modell értékesíthető szennyezési jogokkal

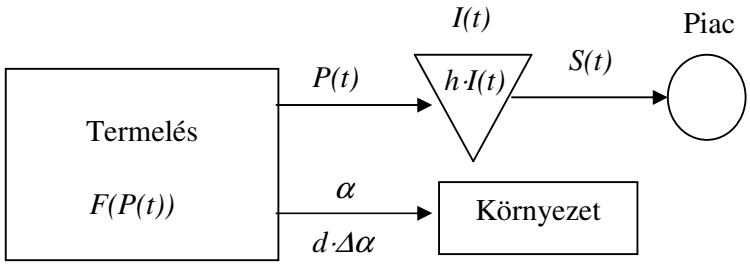
A cikkben a következő jelöléseket fogjuk alkalmazni:

Döntési változók:

- *I(t)* készletszint *t* időpontban, nem negatív,

- *P(t)* termelés *t* időpontban, nem negatív,

A modellben az irányítási változó *P(t)* termelés és az állapotváltozó *I(t)* készletszint.



3.2.1. ábra Az anyagok és költségek áramlása a modellben

Paraméterek:

- *T* a tervezési időszak hossza, pozitív,

- I_0 a kezdeti készletszint a tervezési időszak elején, nem negatív

- *S(t)* az ismert, determinisztikus kerslet *t* időpontban, nem negatív,

- *h* a lináris készlettartási költség, pozitív

- *F(P(t))* a termelés költsége *t* időpontban, nem csökkenő, szigorúan konvex függvény, nemnegatív,

- *d* egy egységnyi szennyezési jog lineáris költsége, pozitív,

- *g(P(t))* a kibocsátás szintje *t* időpontban, nem csökkenő, szigorúan konvex függvény, nemnegatív,

- α kummulált kibocsátás a tervezési időszakban, $\alpha = \int_0^T g(P(t))dt$,

- $\Delta\alpha$ az eladott/vásárolt szennyezési jogok a tervezési időszakban, negatív eladás, pozitív vásárlás esetén.

Az anyagok és költségek áramlását a modellben az 3.2.1. ábra szemlélteti.

A klasszikus Arrow-Karlin modell vagy a termelés-készletezési feladat környezeti szabályozás nélkül a következő alakban írható föl:

$$
(\mathrm{P}^{\mathrm{B}})\quad
\begin{aligned}
& I(t) \geq 0,\ P(t) \geq 0 \\
& \dot{I}(t) = P(t) - S(t), \quad I(0) = I_0\ . \\
& \int_0^T [h \cdot I(t) + F(P(t))]dt \to \min
\end{aligned}
$$

Az első két egyenlőség a készletek és a termelés nemnegativitási feltétele. A differenciálegyenlet a jól ismert stock-flow azonosság és a célfüggvény a készlettartási és termelési költségek összege. Tegyük föl, hogy a klasszikus Arrow-Karlin modell optimális megoldása $(P^b(t), I^b(t))$. Az ehhez a termelés-készletezési stratégiához tartozó szennyezési szint $\alpha^b = \int_0^T g(P^b(t))dt$. A feltételezésünknek megfelelően ez a vállalat kezdeti szennyezési joga az emisszió kereskedelem bevezetésekor. Azt feltételezzük, hogy a vállalat részt vesz az emisszió kereskedelemben, annak ellenére, hogy természetesen lehetősége volna a távolmaradásra is.

Az új szabályozás bevezetése után a vállalat feladata a következő:

$$
(\mathrm{P}^{\mathrm{L}})\quad
\begin{aligned}
& I(t) \geq 0,\ P(t) \geq 0,\ \Delta\alpha \in \Re \\
& \dot{I}(t) = P(t) - S(t), \quad I(0) = I_0 \\
& \int_0^T g(P(t))dt \leq \alpha^b + \Delta\alpha \\
& \int_0^T [h \cdot I(t) + F(P(t))]dt + d \cdot \Delta\alpha \to \min
\end{aligned}
$$

Most az (P^{L}) feladatban, a (P^{B}) feladathoz képest, bevezettük $\Delta\alpha$, eladott/megvásárolt szennyezési jogok mennyiségét, ami pozitív és negatív is lehet. A harmadik egyenlőtlenség azt mondja, ki, hogy a szennyezés a tervezési időszakban nem lehet nagyobb, mint α^b, a kezdeti jogok és az eladott/beszerezz jogok összege. Tegyük föl, hogy (P^{L}) feladat optimális megoldása $(P^a(t), I^a(t), \Delta\alpha^a)$. A gondolatmenetünknek ezen a pontján nem szerkesztjük meg az optimális megoldást, de a létezése biztosított, mivel a termelés költségfüggvénye konvex.

3.2.3. A modell néhány tulajdonsága

Ebben a részben a modell néhány kvalitatív jellemzőjét fogjuk bemutatni. Először azt látjuk be, hogy optimális a szükségesnek megfelelő mennyiségű szennyezési jogot eladni vagy beszerezni.

3.2.1. lemma: Optimális megoldás esetén teljesül, hogy: $\int_0^T g(P^a(t))dt = \alpha^b + \Delta\alpha^a$.

A bizonyítás nyilvánvaló. Ha a kibocsátási korlátozást nem kéne szigorúan betartani, akkor a vállalat csökkenthetné a költségeit a szennyezési jogai értékesítésével.

Következőnek arra próbálunk válaszolni, hogy a vállalat vajon eladja vagy értékesíti a jogait. (P^L) feladatnak emisszió kereskedelemmel $(P^b(t),I^b(t),0)$ lehetséges megoldása, de nem optimális $[0,T]$ tervezési időszakban. Ha lehetséges megoldás, akkor teljesül rá, hogy

$$\int_0^T \left[h \cdot I^a(t) + F\left(P^a(t)\right)\right]dt + d \cdot \Delta\alpha^a < \int_0^T \left[h \cdot I^b(t) + F\left(P^b(t)\right)\right]dt + d \cdot 0 ,$$

vagyis, a minimális költségszint az emisszió kereskedelem bevezetése után alacsonyabb, mint előtte.

Másrészről, $(P^a(t),I^a(t))$ termelés-készletezési stratégia (P^B) feladatat lehetséges megoldása. Így teljesül, hogy

$$\int_0^T \left[h \cdot I^b(t) + F\left(P^b(t)\right)\right]dt < \int_0^T \left[h \cdot I^a(t) + F\left(P^a(t)\right)\right]dt .$$

Ez annyit jelent, hogy a termelés és készletezés költségei magasabbak a szabályozás bevezetése után, mint előtte.

Most vizsgájuk meg a szennyezési jogokat. Ha megfigyeljük a két korábbi egyenlőtlenségünket, megállapíthatjuk, hogy ezek alapján az egyenlőtlenségek egy sorozatát képezhetünk:

$$\int_0^T \left[h \cdot I^a(t) + F\left(P^a(t)\right)\right]dt + d \cdot \Delta\alpha^a < \int_0^T \left[h \cdot I^b(t) + F\left(P^b(t)\right)\right]dt < \int_0^T \left[h \cdot I^a(t) + F\left(P^a(t)\right)\right]dt .$$

Láthatjuk, hogy a jogokat eladni optimális: $\Delta\alpha^a < 0$. (P^B) és (P^L) feladat optimális megoldásának $F(\cdot)$, termelési költségfüggvény szigorú konvexitása miatt, a termelés és készletszintben kell eltérnie egymástól. Ez a feltétel biztosítja az optimális irányítási feladatokban az optimális megoldások egyediségét és ez egyben azt is jelenti, hogy $(P^b(t),I^b(t))$ és $(P^a(t),I^a(t))$ egymástól különböző. Az egyenlőtlenségeknek ezzel a sorozatával bizonyítottuk, hogy

3.2.2. lemma: a modellünkben a szennyezési jogok bevezetése a termelés-készletezési költségek növekedését eredményezi és a vállalat a jogainak egy részét értékesíti. A teljes költség (termelési, készlettartási és a jogok költsége) alacsonyabb az emisszió kereskedelem bevezetése után.

A kvalitatív elemzés után, a következő részben megszerkesztjük a modell optimális termelés-készletezési stratégiáját.

3.2.4. A modell megoldása és néhány további jellemzője

Az 3.2.1. lemma segítségével a következőképpen tudjuk egyszerűsíteni a (P^L) modellt:

$$(P^{L1})\quad \begin{array}{l} I(t)\geq 0,\ P(t)\geq 0 \\ \dot{I}(t)=P(t)-S(t),\quad I(0)=I_0 \\ \int_0^T [h\cdot I(t)+F(P(t))+d\cdot g(P(t))]dt \to \min \end{array} .$$

Tegyük fel, hogy ennek a modellnek az optimális megoldása *($P^a(t)$,$I^a(t)$)*. Ekkor a jogok értékesítésének optimális szintje $\Delta\alpha^a = \alpha^b - \int_0^T g(P^a(t))dt$ módon számolható.

A (P^{L1}) feladat megoldásához a Pontrjagin-féle maximumelvet alkalmazzuk (Feichtinger-Hartl (1986), Seierstad-Sysaeter (1987)). A probléma Hamilton-függvénye úgy írható föl, mint

$$H(I(t),P(t),\psi(t),t)=-[h\cdot I(t)+F(P(t))+d\cdot g(P(t))]+\psi(t)(P(t)-S(t))$$

A feladatunk egy olyan optimális irányítási probléma, ahol a korlátozások tisztán az állapotváltozókra vonatkoznak. Az optimalitás szükséges és elégséges feltételeinek meghatározásához a Lagrange-függvényre van szükségünk:

$$L(I(t),P(t),\psi(t),t)=-[h\cdot I(t)+F(P(t))+d\cdot g(P(t))]+\psi(t)(P(t)-S(t))+\lambda(t)I(t)$$

Az optimalitás szükséges feltételeit az 1. tétel adja meg.

3.2.1. tétel Ahhoz, hogy a (P^{L1}) feladatnak $\{I^a(t),P^a(t)\}$ optimális megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy létezzen egy olyan folytonos $\psi(t)$ függvény, amire minden $0\leq t\leq T$ időpontban azt kapjuk, hogy $\psi(t)\neq 0$

(a)

$$\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial L(I^a(t),P^a(t),\psi(t),\lambda(t),t)}{\partial I(t)} \quad\Rightarrow\quad \dot{\psi}(t)=h-\lambda(t),$$

(b)

$$\begin{array}{l} \max\limits_{0\leq P(t)}\{H(I^a(t),P(t),\psi(t),t)\}=H(I^a(t),P^a(t),\psi(t),t) \\ \Rightarrow \max\limits_{0\leq P(t)}\{\psi(t)P(t)-F(P(t))-d\cdot g(P(t))\}=\psi(t)P^a(t)-F(P^a(t))-d\cdot g(P^a(t))' \end{array}$$

(c) $\lambda(t)I^a(t)=0,\quad \lambda(t)\geq 0$,

(d) $\psi(T)I^a(T)=0,\quad \psi(T)\geq 0$.

A (b) feltételből kiszámolhatjuk az optimális termelési szintet:

$$P^a(t) = \begin{cases} 0 & \psi(t) \le F'(0) + d \cdot g(0) \\ \left[F' + d \cdot g\right]^{-1}\left(\psi(t)\right) & \psi(t) = F'\left(P^a(t)\right) + d \cdot g'\left(P^a(t)\right) > F'(0) + d \cdot g(0) \end{cases}.$$

Az optimális trajektóriát az előrefele haladó Arrow-Karlin algoritmus segítségével határozhatjuk meg (Arrow-Karlin (1958)). Ennek lépéseit most nem mutatjuk be részletesen, az olvasót a hivatkozott tanulmányhoz utaljuk.

Hasonlítsuk össze a termelés és a készletezés optimális trajektóriáit a két modellünkben – emisszió kereskedelemmel és anélkül. Egy korábbi tanulmány (Wirl (1991)) megmutatta, hogy egy növekvő, konvex szennyezési (emissziós) adó simítja a termelés-készletezési stratégiát, abban az értelemben, hogy a készletszint magasabb lesz azokon az intervallumon, ahol a készletek nagysága előtte is pozitív volt és ezeken az intervallumokon a termelés alacsonyabb lesz. Ez azt jelenti, hogy a termelés simítottabb lesz, mint korábban. Ugyanezt az eredményt általánosították szennyezési normákkal és adókkal történő vegyes típusú szabályozás esetére is, ugyanilyen simítási tulajdonságokkal (Dobos (1999)).

A (P^{L1}) feladat megegyezik a Wirl (1991) által szennyezési adókra bevezetett modellel. Így ennek eredményeit alkalmazhatjuk a saját modellünkre is és emiatt teljesül a következő lemma.

3.2.3. lemma: Az emisszió kereskedelem bevezetése simítja a termelési tervet Arrow és Karlin modelljében, ha a szennyezés a termelés nem csökkenő, konvex függvénye.

Ezt a lemmát most nem bizonyítjuk. A lemma állítása elsőre meglepőnek tűnhet, de az emissziós irányítás a jogok beszerzésén vagy eladásán keresztül beépül a termelési stratégiába.

3.2.5. Számpélda

Először Arrow és Karlin klasszikus modelljét vizsgáljuk meg. Használjuk a következő paramétereket és költségfüggvényeket:

a kezdeti készletszint:	$I_0 = 1.0$,
tervezési időszak:	$T = 12$,
kereslet:	$S(t) = (1+0.05t)\cdot(1+\sin(t))$,
készlettartási költség:	$h = 2$,
termelési költség:	$F(P(t)) = 8 \cdot P^2(t)$.

A termelési költség konvex, nem csökkenő függvény. A modell ebben az esetben a következő alakot ölti:

$$I(t) \geq 0,\ P(t) \geq 0$$
$$\dot{I}(t) = P(t) - (1 + 0.05 \cdot t) \cdot (1 + \sin(t)), \quad I(0) = 1.0$$
$$\int_0^{12} \left[2 \cdot I(t) + 8 \cdot P^2(t)\right] dt \to \min$$

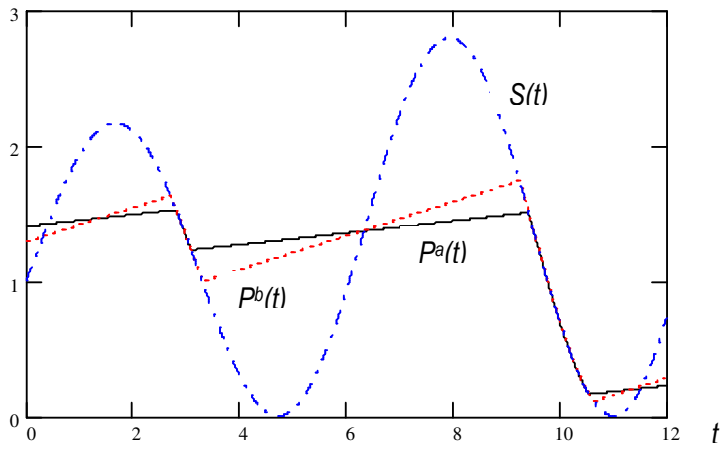
A modell $(P^b(t), I^b(t))$ optimális megoldása:

$$P^b(t) = \begin{cases} 0.125 \cdot t + 1.287 & 0 \leq t < 2.6961595 \\ (1 + 0.05 \cdot \mathrm{t}) \cdot (1 + \sin(\mathrm{t})) & 2.6961595 \leq \mathrm{t} < 3.29012 \\ 0.125 \cdot t + 0.581 & 3.29012 \leq \mathrm{t} < 9.2364691 \\ (1 + 0.05 \cdot \mathrm{t}) \cdot (1 + \sin(\mathrm{t})) & 9.2364691 \leq \mathrm{t} < 10.618 \\ 0.125 \cdot t - 1.219 & 10.618 \leq \mathrm{t} \leq 12 \end{cases}$$

és

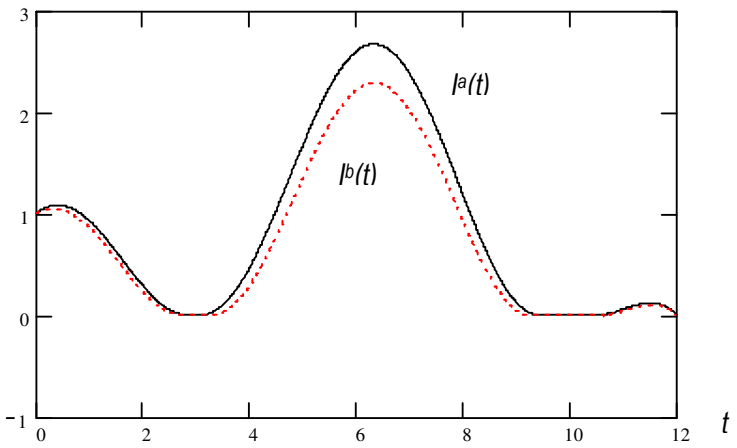
$$I^b(t) = \begin{cases} 1.0 + \int_0^t \left[P^b(t) - S(t)\right] dt & 0 \leq t < 2.6961595 \\ 0 & 2.6961595 \leq \mathrm{t} < 3.29012 \\ \int_{3.29012}^t \left[P^b(t) - S(t)\right] dt & 3.29012 \leq \mathrm{t} < 9.2364691 \\ 0 & 9.2364691 \leq \mathrm{t} < 10.618 \\ \int_{10.618}^t \left[P^b(t) - S(t)\right] dt & 10.618 \leq \mathrm{t} \leq 12 \end{cases}$$

Az optimális termelést és az optimális készletszintet a 3.2.2. és 3.2.3. ábra mutatja.



3.2.2. ábra Az optimális termelés és kereslet

dc_177_11



3.2.3. ábra Az optimális készletszint az emisszió kereskedelem bevezetése előtt és után

A minimális termelés-készletezési költség 172.189 egység. Most vizsgáljuk meg a modellt emisszió kereskedelemmel. A vállat szennyezési függvénye: $g(P(t)) = 3 \cdot P^2(t)$. Egy egység szennyezési jog piaci ára $d = 5$. Az értékesíthető jogok kezdeti készletét úgy számolhatjuk, hogy $\alpha^b = \int_0^{12} 3 \cdot \left(P^b(t)\right)^2 \, dt = 58.329$.

A módosított modell a következő formában írható föl:

$$I(t) \geq 0,\ P(t) \geq 0,\ \Delta\alpha \in \Re$$
$$\dot{I}(t) = P(t) - (1 + 0.05 \cdot t) \cdot (1 + \sin(t)), \quad I(0) = 1.0$$
$$\int_0^{12} 3 \cdot P^2(t)\, dt \leq 58.329 + \Delta\alpha$$
$$\int_0^{12} \left[2 \cdot I(t) + 8 \cdot P^2(t)\right] dt + 5 \cdot \Delta\alpha \to \min$$

Ennek a modellnek $(P^a(t), I^a(t))$ optimális megoldása:

$$P^a(t) = \begin{cases} 0.043 \cdot t + 1.399 & 0 \leq t < 2.80134587 \\ (1 + 0.05 \cdot \mathrm{t}) \cdot (1 + \sin(\mathrm{t})) & 2.80134587 \leq \mathrm{t} < 3.080385 \\ 0.043 \cdot t + 1.091 & 3.080385 \leq \mathrm{t} < 9.4048177 \\ (1 + 0.05 \cdot \mathrm{t}) \cdot (1 + \sin(\mathrm{t})) & 9.4048177 \leq \mathrm{t} < 10.5349575 \\ 0.043 \cdot t - 0.299 & 10.5349575 \leq \mathrm{t} \leq 12 \end{cases}$$

és

$$I^a(t) = \begin{cases} 1.0 + \int_0^t \left[P^b(t) - S(t)\right]dt & 0 \le t < 2.80134587 \\ 0 & 2.80134587 \le \mathrm{t} < 3.080385 \\ \int_{3.29012}^t \left[P^b(t) - S(t)\right]dt & 3.080385 \le \mathrm{t} < 9.4048177 \\ 0 & 9.4048177 \le \mathrm{t} < 10.5349575 \\ \int_{10.618}^t \left[P^b(t) - S(t)\right]dt & 10.5349575 \le \mathrm{t} \le 12 \end{cases}$$

Optimális megoldás esetén az értékesítendő jogok: $\Delta\alpha^a = -0.859$, ami azt jelenti, hogy a szennyezés 1.5%-kal csökken. Az optimális teljes költség (termelés-készletezés és a jogok) 169.404 egység az emisszió kereskedelem bevezetése után. A termelés-készletezési költség 173.698 egység, ami 0,9%-os növekedést jelent a szabályozás bevezetése előtti költségszinthez képest. A 2. ábra szemlélteti, hogy az emisszió kereskedelem simítja a termelési függvényt. A 3.2.3. ábráról pedig a készletszintek növekedése olvasható le.

3.2.6. Következtetés

Tanulmányunkban egy Arrow-Karlin modellben vizsgáltuk az emisszió kereskedelem bevezetésének hatását a vállalat termelés-készletezési stratégiájára. Megmutattuk, hogy a vállalat el fogja adnia a szennyezési jogainak egy részét, hogy minimalizálja a teljes költségét, feltéve, hogy az értékesíthető kibocsátási egységek oszthatóak. A maradék jogait pedig teljes mértékben felhasználja. A környezeti szabályozás hatására a termelés-készletezési költségek megnőnek és az optimális termelés-készletezési stratégia szintén simítottabb lesz.

A modellünkben feltételeztük, hogy az új rendszer bevezetésének hatására a vállalat nem vált technológiát, azaz a termelési költségek változatlanok maradnak. További kutatások lehetséges tárgya annak vizsgálata, ha a vállalat az emisszió kereskedelem hatására módosítja a technológiáját.

3.3. Értékesíthető szennyezési jogok és a vállalat termelés-készletezési stratégiája

3.3.1. Bevezetés

A tanulmányunk célja, hogy elemezzük az értékesíthető szennyezési jogok (emisszió kereskedelem vagy kibocsátási jogok piaca) hatását a termelés-készletezési döntésekre. A piacteremtés, mint környezeti szabályozás, a piaci és hatósági eszközök kombinációja (Field (1997)). A hatósági eszközöket - mint például a kibocsátási normák és a környezeti adók – az különbözteti meg a piaci szabályozóktól, hogy ezek által a kormány az egyes vállalatok működésébe avatkozik be, nem a piac egészét szabályozza. A szennyezési jogok piacának lényege, hogy a jogok kezdeti elosztása után a vállalat a piacon a többi vállalattal kereskedhet, értékesíthet vagy beszerezhet szennyezési egységeket, annak megfelelően, hogy mennyi káros anyagot kíván kibocsátani. A szennyezési egységek árát a piac határozza meg, ez a szabályozás piaci eleme. A hatósági jellegét az adja, hogy a megvásárolt/értékesített szennyezési szint a vállalat szempontjából egyrészről egy kibocsátási normának felel meg (felső korlát) (Dobos (1998)), másrészről pedig környezeti adónak (többletköltség vagy – bevétel) (Dobos (1999)). Ebben a fejezetben egy termelő vállalat szempontjából fogjuk vizsgálni az emisszió kereskedelem bevezetésének hatását.

Két alapmodellt ismerünk a vállalat termelés-készletezési döntési folyamatainak vizsgálatára. Mindkét modellben szerepet kap a stock-flow azonosság és a költségfüggvény. A különbség közöttük a költségfüggvény típusa. A jól ismert Wagner-Whitin készletnagyság modell (1958) konkáv költségfüggvényt vizsgál. A második alapmodell viszont konvexet. A vizsgálódásunk alapját a közismert Arrow-Karlin típusú dinamikus termelés-készletezési modell képezi (Arrow és Karlin, 1958). Ez a második kategóriához tartozik, ugyanis a készlettartási költség lineáris, amíg a termelési költség a termelés nem csökkenő, konvex függvénye. A legutóbbi empirikus kutatások azt mutatják, hogy a költségek konvexitását a gyakorlati tapasztalatok is visszaigazolják (Ghali (2003)). Ez indokolja, hogy a konvex Arrow-Karlin modell (1958) vizsgálata mellett döntöttünk.

Ahogy korábban említettük, a vállalat az emisszió kereskedelem bevezetése után további szennyezési jogokat szerezhet be a piacról vagy eladhat a meglévő készletéből. Ez azt jelenti, hogy a klasszikus Arrow-Karlin modell kibővül a jogok beszerzésének/eladásának költségével. Tegyük fel, hogy a jogok teljesen oszthatóak és a beszerzés/értékesítés költsége lineáris, de a piaci ár a tervezési időszakban az idő függvénye. A pillanatnyi szennyezési szint a termelés nem csökkenő és konvex függvénye. A döntéshozók célja a költségek minimalizálása. Arra keressük a választ, hogy a vállalatnak mennyi szennyezési jogot kell eladnia vagy beszereznie, és ez milyen hatással van a termelés-készletezési stratégiára.

Ebben a fejezetben a Dobos (2005) tanulmányban bemutatottakat általánosítjuk két irányba. Először azt feltételezzük, hogy a szennyezési egységek ára az időtől függ, ami új termékek, szolgáltatások bevezetése után nagyon gyorsan megváltozhat. A modell másik kiterjesztéseként kiszámítjuk a beszerzett kibocsátási jogok pillanatnyi költségét, amit a változó piaci ár befolyásol.

A fejezet a második részében definiáljuk a változókat és a paramétereket, továbbá bevezetjük a modellt. Az optimális megoldást a 3. részben adjuk meg. A következő részben egy

számpélda segítségével szemléltetjük a cikk eredményét. Végül összefoglaljuk a következtetéseinket.

3.3.2. A szennyezési jogokkal bővített modell.

A következő jelöléseket fogjuk használni:

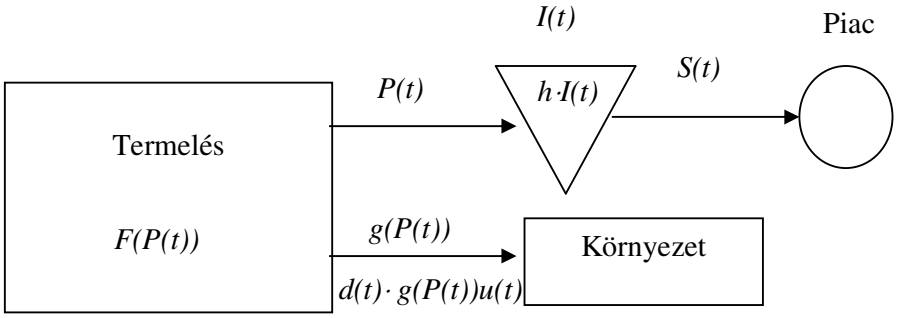
Döntési változók:

- $I(t)$ készletszint t időpontban, nem negatív,

- $P(t)$ termelés t időpontban, nem negatív,

- $u(t)$ a termelési szint változása.

Az irányítási változó a modellben az $u(t)$, az állapot változók pedig az $I(t)$ készletszint és a $P(t)$ termelés. Az anyagok és költségek áramlását az 3.3.1. ábra szemlélteti.



3.3.1. ábra Az anyagok és költségek áramlása a modellben

Paraméterek:

- T tervezési időszak hossza, pozitív,

- I_0 kezdeti készletszint a tervezési időszak elején, nem negatív,

- $S(t)$ az ismert, determinisztikus kerslet t időpontban, nemnegatív,

- h a lináris készlettartási költség, pozitív

- $F(P(t))$ a termelés költsége t időpontban, nem csökkenő, szigorúan konvex függvény, nemnegatív,

- $d(t)$ egy egységnyi szennyezési jog lineáris költsége, pozitív,

- $g(P(t))$ a kibocsátás szintje t időpontban, nem csökkenő, szigorúan konvex függvény, nem negatív

Az Arrow-Karlin modell szennyezési jogok költségével bővített változata a következő formában írható föl:

$$
\text{(P)}\qquad
\begin{aligned}
&I(t)\geq 0,\ P(t)\geq 0,\ u(t)\in\Re\\
&\dot{I}(t)=P(t)-S(t),\quad I(0)=I_0\\
&\dot{P}(t)=u(t)\\
&\int_0^T\left[h\cdot I(t)+F(P(t))+d(t)\cdot g'(P(t))\cdot u(t)\right]dt\to\min
\end{aligned}
\quad .
$$

Az első két egyenlőtlenség a készletszint és a termelés nemnegativitási feltétele. A termelési szint változása egyaránt lehet pozitív és negatív. Az első egyenlőtlenség a jól ismert stock-flow azonosság, a második pedig a termelési szint változása. A költségfüggvényt a készlettartási, a termelési és a jogok beszerzésének/értékesítésének költségének összege alkotja. Ha *u(t)* változó pozitív, akkor a vállalat $g'(P(t))\cdot\dot{P}(t)$ egység kibocsátási jogot vásárol. Máskülönben, ha *u(t)* negatív, akkor a vállalat elad a jogaiból. A modellünkben azt feltételezzük, hogy a vállalatnak lehetősége van a szükségletének megfelelő mennyiségű kibocsátási egység beszerzésére vagy értékesítésére.

3.3.3. A modell megoldása

A (P) feladat megoldásához a Pontrjagin-féle maximumelvet alkalmazzuk (Feichtinger and Hartl, 1986; Seierstad and Sydsaeter, 1987). A probléma Hamilton-függvénye úgy írható föl, hogy

$$
\begin{aligned}
&H\left(I(t),P(t),u(t),\psi_1(t),\psi_2(t),t\right)=\\
&-\left[h\cdot I(t)+F(P(t))+d(t)\cdot g'(P(t))\cdot u(t)\right]+\psi_1(t)\left(P(t)-S(t)\right)+\psi_1(t)u(t)
\end{aligned}
$$

A feladatunk egy olyan optimális irányítási probléma, ahol a korlátozások tisztán az állapotváltozókra vonatkoznak. Az optimalitás szükséges és elégséges feltételeinek meghatározásához a Lagrange-függvényt használjuk:

$$
\begin{aligned}
&L\left(I(t),P(t),u(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),t\right)=\\
&H\left(I(t),P(t),u(t),\psi_1(t),\psi_2(t),t\right)+\lambda_1(t)I(t)+\lambda_2(t)P(t)
\end{aligned}
$$

Az optimalitás feltételeit az 3.3.1. tétel adja meg.

3.3.1. tétel Ahhoz, hogy a (P) feladatnak $\left\{I^0(t),P^0(t),u^0(t)\right\}$ optimális megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy létezzen egy olyan folytonos $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$ függvény, amire minden $0\leq t\leq T$ időpontban azt kapjuk, hogy $\psi_i(t)\neq 0$ (i=1,2).

(a)

$$
\dot{\psi}_1(t)=-\frac{\partial L\left(I^0(t),P^0(t),u^0(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),t\right)}{\partial I(t)}\quad\Rightarrow\quad\dot{\psi}_1(t)=h-\lambda_1(t),
$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial L\left(I^0(t), P^0(t), u^0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), t\right)}{\partial P(t)}$$
$$\Rightarrow \quad \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) + F'\left(P^0(t)\right) + d(t) \cdot g''\left(P^0(t)\right) \cdot u(t) - \lambda_2(t)$$

(b)

$$\max_{u(t)\in\Re}\left\{H\left(I^0(t), P^0(t), u(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t\right)\right\} = H\left(I^0(t), P^0(t), u^0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t\right)$$
$$\Rightarrow \quad \max_{u(t)\in\Re}\left\{\left[\psi_2(t) - d(t) \cdot g'\left(P^0(t)\right)\right] \cdot u(t)\right\} = \left[\psi_2(t) - d(t) \cdot g'\left(P^0(t)\right)\right] \cdot u^0(t) = 0 \quad ,$$

(c)

$$\begin{aligned} &\lambda_1(t) I^0(t) = 0, \quad \lambda_1(t) \geq 0 \\ &\lambda_2(t) P^0(t) = 0, \quad \lambda_2(t) \geq 0 \end{aligned},$$

(d)

$$\begin{aligned} &\psi_1(T) I^0(T) = 0, \quad \psi_1(T) \geq 0 \\ &\psi_2(T) P^0(T) = 0, \quad \psi_2(T) \geq 0 \end{aligned}.$$

A (b) feltételből kiszámolhatjuk az optimális termelési szintet:

$$\psi_2(t) - d(t) \cdot g'\left(P^0(t)\right) = 0 .$$

Deriváljuk az egyenletet:

$$\dot{\psi}_2(t) = \dot{d}(t) \cdot g'\left(P^0(t)\right) + d(t) \cdot g''\left(P^0(t)\right) \cdot u(t) .$$

Ha ezt a most kapott egyenletet behelyettesítjük a (b) feltétel második egyenlőségébe, akkor láthatjuk, hogy

$$\psi_1(t) = F'\left(P^0(t)\right) - \dot{d}(t) \cdot g'\left(P^0(t)\right) - \lambda_2(t) .$$

Ennek és az (a) feltétel első egyenletének segítségével meghatározhatjuk az optimális trajektóriát, ha az előrehaladó Arrow-Karlin algoritmust alkalmazzuk (Arrow and Karlin (1958)). Ez az algoritmus ciklusokra osztható. Egy készletciklus egy olyan intervallumból áll, ahol a készletszint pozitív és egy olyanból, ahol nulla. Definiáljuk a $P(t, \psi_0)$ termelési szintet és az $I(t)$ készletszintet, mint a rendszer megoldását:

$$h \cdot t + \psi_0 = F'\left(P^0(t, \psi_0)\right) - \dot{d}(t) \cdot g'\left(P^0(t, \psi_0)\right)$$
$$I(t) = I_0 + \int_0^t \left(P^0(\tau, \psi_0) - S(\tau)\right) d\tau$$

Itt úgy választjuk meg ψ_0 értékét, hogy a termelés és a készletszint nemnegatív legyen. Ha a készletszint nulla, akkor a legkésőbbi t_1 időpontot választjuk, és keresünk egy t_2 időpontot. A készletszint t_1 és t_2 között nulla és a termelés egyenlő a kereslettel. Ezután áttérünk a következő ciklus kiválasztására. Ehhez hasonló, előrehaladó algoritmust mutatott be Dobos (1991).

3.3.4. Számpélda

Először Arrow és Karlin klasszikus modelljét vizsgáljuk meg. Használjuk a következő paramétereket és költségfüggvényeket:

- a kezdeti készletszint: $I_0 = 1.0$,
- tervezési időszak: $T = 12$,
- kereslet: $S(t) = (1+0.05t)\cdot(1+\sin(t))$,
- készlettartási költség: $h = 2$,
- termelési költség: $F(P(t)) = 4\cdot P^2(t)$.

A termelési költség konvex, nem csökkenő függvény. A modell ebben az esetben a következő alakot ölti:

$$I(t) \geq 0,\ P(t) \geq 0$$
$$\dot{I}(t) = P(t) - (1+0.05\cdot t)\cdot(1+\sin(t)), \quad I(0) = 1.0$$
$$\int_0^{12} \left[2\cdot I(t) + 4\cdot P^2(t)\right] dt \to \min$$

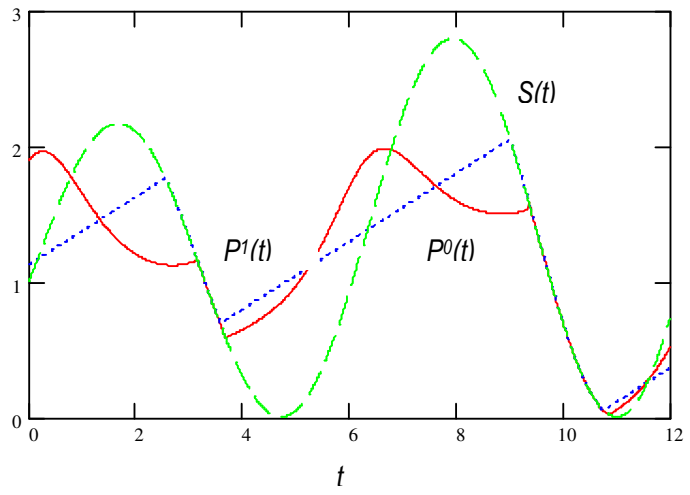
A modell $(P^0(t), I^0(t))$ optimális megoldása:

$$P^0(t) = \begin{cases} 0.125\cdot t + 1.123 & 0 \leq t < 2.5462406 \\ (1+0.05\cdot \mathrm{t})\cdot(1+\sin(\mathrm{t})) & 2.5462406 \leq \mathrm{t} < 3.56993 \\ 0.125\cdot t + 0.689 & 3.56993 \leq \mathrm{t} < 9.0007043 \\ (1+0.05\cdot \mathrm{t})\cdot(1+\sin(\mathrm{t})) & 9.0007043 \leq \mathrm{t} < 10.7429 \\ 0.125\cdot t + 0.049 & 10.7429 \leq \mathrm{t} \leq 12 \end{cases}$$

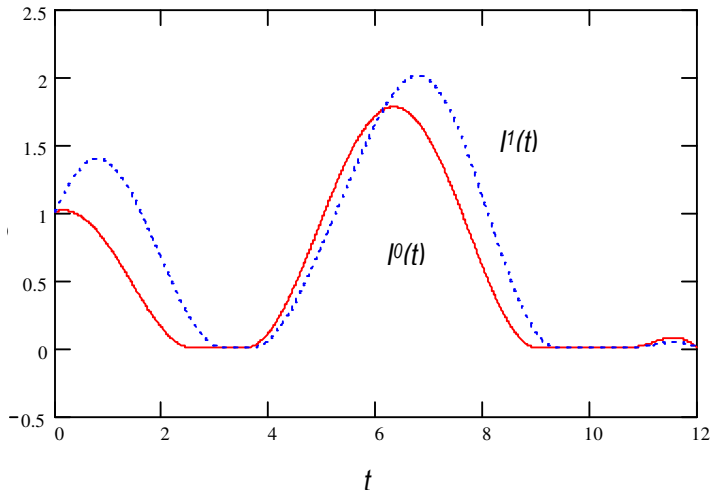
és

$$I^0(t) = \begin{cases} 1.0 + \int_0^t \left[P^0(t) - S(t)\right] dt & 0 \leq t < 2.5462406 \\ 0 & 2.5462406 \leq \mathrm{t} < 3.56993 \\ \int_{3.56993}^t \left[P^0(t) - S(t)\right] dt & 3.56993 \leq \mathrm{t} < 9.0007043 \\ 0 & 9.0007043 \leq \mathrm{t} < 10.7429 \\ \int_{10.7429}^t \left[P^0(t) - S(t)\right] dt & 10.7429 \leq \mathrm{t} \leq 12 \end{cases}$$

Az optimális termelést és az optimális készletszintet a 3.3.2. és 3.3.3. ábra mutatja.



3.3.2. ábra Az optimális termelés és kereslet



3.3.3. ábra Az optimális készletszint az emisszió kereskedelem bevezetése előtt és után

A minimális termelés-készletezési költség 93.649 egység. Most vizsgáljuk meg a modellt emisszió kereskedelemmel. A vállat szennyezési függvénye: $g(P(t)) = 2 \cdot P^2(t)$ és egy egység szennyezési jog piaci ára $d(t) = \sin(t)+1$. A modell a módosításokkal a következő alakot ölti:

$$I(t) \geq 0,\ P(t) \geq 0,\ u(t) \in \Re$$
$$\dot{I}(t) = P(t) - (1 + 0.05 \cdot t) \cdot (1 + \sin(t)), \quad I(0) = 1.0$$
$$\dot{P}(t) = u(t)$$
$$\int_0^{12} \left[2 \cdot I(t) + 4 \cdot P^2(t) + (\sin(t) + 1) \cdot 4 \cdot P(t) \cdot u(t)\right] dt \to \min$$

A modell $(P^1(t), I^1(t))$ optimális megoldása

$$P^1(t)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot t+7.57038}{4-2\cdot\cos(t)} & 0\le t<3.1436456\\ (1+0.05\cdot \mathrm{t})\cdot(1+\sin(\mathrm{t})) & 3.1436456\le \mathrm{t}<3.673404\\ \dfrac{2\cdot t-7.347}{4-2\cdot\cos(t)}+0.583 & 3.673404\le \mathrm{t}<9.3453493\\ (1+0.05\cdot \mathrm{t})\cdot(1+\sin(\mathrm{t})) & 9.3453493\le \mathrm{t}<10.849585\\ \dfrac{2\cdot t-21.699}{4-2\cdot\cos(t)}+0.016 & 10.849585\le \mathrm{t}\le 12\end{cases}$$

és

$$I^1(t)=\begin{cases}1.0+\int_0^t\left[P^1(t)-S(t)\right]dt & 0\le t<3.1436456\\ 0 & 3.1436456\le \mathrm{t}<3.673404\\ \int_{3.673404}^t\left[P^1(t)-S(t)\right]dt & 3.673404\le \mathrm{t}<9.3453493\\ 0 & 9.3453493\le \mathrm{t}<10.849585\\ \int_{10.849585}^t\left[P^1(t)-S(t)\right]dt & 10.849585\le \mathrm{t}\le 12\end{cases}.$$

Az emisszió kereskedelem bevezetése után az optimális teljes költség (termelés, készletezés és a szennyezési jogok) 83.347 egység. A termelés-készletezési költség 99.297 egység, ami 6.03 növekedést jelent. A 3.3.2. ábra mutatja az emisszió kereskedelem simító hatását a termelésre. A készletszint növekedés szemlélteti a 3.3.3. ábra.

3.3.5. Következtetés

Tanulmányunkban megvizsgáltuk az emisszió kereskedelem bevezetésének hatását egy vállalat termelés-készletezési döntéseire egy Arrow-Karlin modellben. Megmutattuk, hogy a vállalat a szennyezési jogainak egy részét eladja, hogy a teljes költségét minimalizálja, amennyiben a kibocsátási egységek oszthatóak. A megmaradó jogait a vállalat teljes mértékben felhasználja. A szabályozás bevezetésének hatására a termelés-készletezés költségei megnőnek.

A modellünkben azt feltételeztük, hogy a vállalat az emisszió kereskedelem hatására nem vált technológiát, azaz a termelési költségek változatlanok maradnak. Egy további kutatás tárgya lehet annak az esetnek a vizsgálata, amikor a vállalat az új szabályozás bevezetésével együtt áttér egy másik technológiára.

4. Termelési-készletezési politikák a visszutas logisztikában

A modern gazdaság egyre inkább szembesül a természetes erőforrások beszűkülésével. A meg nem újuló erőforrások készleteinek csökkenése a gazdaság szereplőit arra kényszeríti, hogy korlátozottan rendelkezésre álló ásványi anyagokat megkímélje. Ez a koncepció vezet a fenntartható fejlődés vállalati gazdálkodásba történő átültetésének szükségességéhez. A dolgozat ezen részének célja a környezettudatos anyag- és készletgazdálkodás matematikai modelljeinek vizsgálata.

A környezettudatos anyag- és készletgazdálkodást a magyar szakirodalomban az utóbbi időben nevezik visszutas logisztikának, inverz logisztikának, de néha hulladékkezelési logisztikának is. A magyar szóhasználat tehát nem egységes a terület megnevezésére. Angol elnevezése azonban meglehetősen egységes: „reverse logistics". E kifejezésnek legtalálóbb magyar megfelelője talán a visszutas, esetleg reverz logisztika. A jelenleg is használt inverz logisztika kifejezést azért nem javasolt használni, mert annak angolul az „inverse logistics" felel meg, amit csak nagyon szűk körben – főleg Japánban - használnak a nemzetközi irodalomban, ezért fordítási zavart okozhat. Európában és az Egyesült Államokban a „reverse logistics" terjedt el. Így a terület magyar elnevezését a dolgozatban visszutas logisztikának választom.

A fejezet három különböző, a visszutas logisztikához kapcsolódó készletmodellt mutat be. E készletmodellek viszonylag rövid múltra tekinthetnek vissza. A modellek visszutas logisztikai kiterjesztésének igénye főként az 1990-es évek közepén vált hangsúlyossá. A kutatási irány közelmúltbeli elhanyagoltságát mutatja, hogy az 1980-as években egyetlen dolgozat sem jelent meg ezen a területen. Az Európai Unió környezetvédelmi szabályozásának kapcsán a visszutas logisztika újra kiemelten fontossá vált. A nagy kutatóműhelyekben a modellek alkotása napjainkban is folyik, jelenleg a tételnagyság modellek területén a hiánykezeléses modellek kidolgozására fókuszálnak. A jelen dolgozatban kizárólag hiány nélküli modelleket mutatjuk be, nevezetesen az összes elérhetőt.

A bemutatott három modell mindegyike arra a kérdésre keres választ, hogy a termelés, újrafeladolgozás és hulladékkezelés tevékenységeket a tervezési időhorizonton milyen sorrendbe válassza meg a döntéshozó, és ennek a kérdésnek az eldöntésére adunk javaslatokat a cél- és költségfüggvények ismeretének ismeretében.

A fejezet első és harmadik részfejezetében a hulladékkezelés is döntésre váró tevékenység, míg a második részfejezetben minden visszaérkező használt termék újra feldolgozható, azaz a minősége jó. A fejezet első dolgozatában lineáris költségfüggvényt, míg a harmadikban HMMS-típusú, célprogramozási költségfüggvényt vizsgálunk. A második részfejezetben egy Arrow-Karlin-féle konvex költségfüggvényt tételezünk. A visszutas logisztikai tevékenységek egymásutániságának megállapítása után mind a három modellre az optimális pálya előállítását is bemutatjuk.

4.1. Termelés-készletezési stratégiák lineáris, visszutas logisztikai rendszerekben

4.1.1. Bevezetés

A visszutas logisztika fogalma alatt az anyagok megmunkálását és a piacról visszaküldött (visszavett), újra használható anyagok újramegmunkálását értjük. A keresletet az újonnan megmunkált (gyártott) és az újramegmunkált termékek egyaránt kielégítik, nincs különbség a kétféle termék között. Annak érdekében, hogy ne terheljék a környezetet fölöslegesen vagy fogyasszák a természetes erőforrásokat, a használt termékeket újból felhasználják, amennyiben ez gazdaságos.

Háromféle determinisztikus visszutas logisztikai rendszert különböztethetünk meg. Az EOQ-típusú visszutas logisztikai rendszereket az irodalom behatóan vizsgálata (Schrady (1967), Richter (1996a, 1996b, 1997), Richter-Dobos (1999), Teunter (1998), Dobos-Richter (1999a, 1999b)). Ebben a modellben a megmunkálás és újramegmunkálás egymást követik, és a hatékonyság mértéke az összes átlagos termelésátállítási és lineáris készlettartási költség. A fő kérdés a megmunkált és újramegmunkált termékek száma. Ezek a megközelítések előre adott irányítási rendszert feltételeznek, céljuk az optimális paraméterek meghatározása. Az optimális stratégia szerkezetét nem vizsgálják (Fleischmann et al. (1997)).

A második kutatási irány a klasszikus EOQ-alapú rendszerek „dinamizálása“. A Wagner-Whitin tételnagyság modell alapján a rendszer általánosítható két raktárra, amelyből a második raktárra egy „fordított” (visszaáramoló) Wagner-Within-modell vezethető be (Richter-Sombrutzki (2000)). Ez a kutatási irány azt mutatja, hogy egy adott időpontban vagy megmunkálás, vagy újramegmunkálás lehetséges.

A harmadik lehetséges megoldást a determinisztikus, egytermékes visszutas logisztikai rendszerek általánosítására az optimális irányítás elmélet adja. Az optimális irányítás az optimális trajektóriát írja le időben. Ezzel az eljárással kvalitatív információhoz jutunk az optimális útról és döntési szabályokról az időben. A problémát lineáris (Minner-Kleber (1999)) és konvex (Dobos-Kistner (1999)) megközelítésben is vizsgálták.

Célunk, hogy tanulmányozzuk a lineáris, visszutas logisztikai rendszert és felülvizsgáljuk Minner és Kleber (1999) korábbi eredményét. A kifejtés menete az alábbi szerkezetet követi. A második részben bemutatjuk a modellt. Majd levezetjük a szükséges és elégséges optimalitási feltételeket és megadjuk az explicit megoldást a modellre megmunkálással, újramegmunkálással és hulladékkezeléssel, illetve megvizsgáljuk mindkét raktárt. Ebben a részben foglalkozunk azzal, hogy az optimális stratégia, hogyan függ a költségparaméterektől. Végül összefoglaljuk az eredményeinket.

4.1.2. A modell

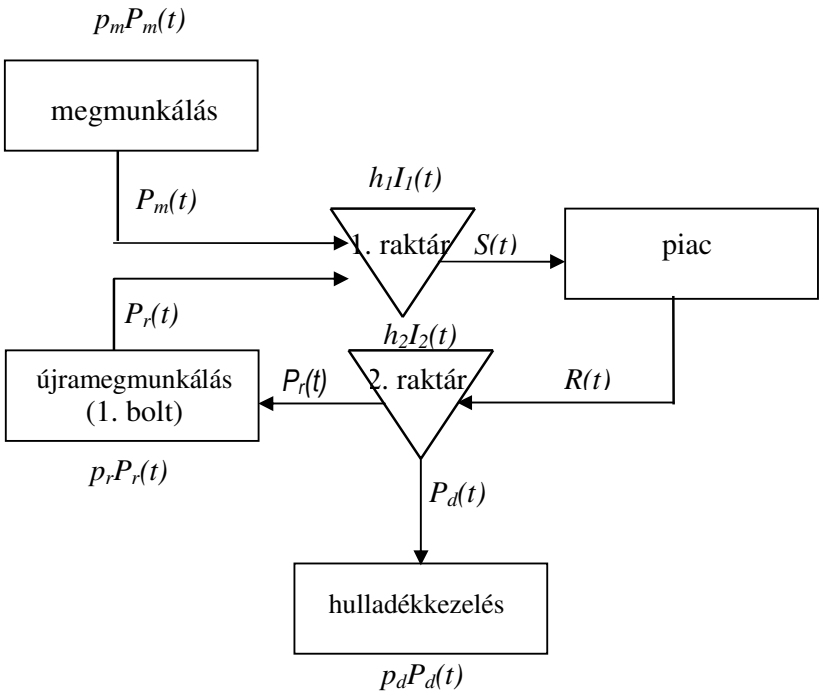
Egy kétraktáras, visszutas logisztikai rendszert fogunk vizsgálni, folyamatos hulladékkezeléssel. A modellt optimális irányítási problémaként két állapotváltozóval (készlet szint az 1. és 2. raktárban) és három irányítási változóval (megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta) írhatjuk le. A cél, hogy minimalizáljuk a raktárak készlettartási költségét és a megmunkálás, újramegmunkálás és hulladékkezelés költségét. A következő paramétereket fogjuk használni a modellhez:

- T tervezési időszak hossza,
- $S(t)$ kereslet, folyamatosan deriválható,
- r visszavételi ráta a 2. raktárban ($0 \le r \le 1$),
- τ a visszavétel késése, nem negatív,
- $R(t)$ visszavételi ráta, folytonosan deriválható, $R(t) = rS(t-\tau)$
- h_1 a készlettartási költség az 1. raktárban,
- h_2 a készlettartási költség a 2. raktárban,
- p_m megmunkálás költsége,
- p_r újramegmunkálás költsége,
- p_d hulladékkezelés költsége.

Döntési változók:

- $I_1(t)$ készletszint az 1. raktárban, nemnegatív,
- $I_2(t)$ készletszint a 2. raktárban, nemnegatív,
- $P_r(t)$ újramegmunkálási ráta, nemnegatív,
- $P_m(t)$ megmunkálási (gyártási) ráta, nemnegatív,
- $P_d(t)$ a hulladékkezelési ráta, nemnegatív.

A rendszer működését és a költségek áramlását az 4.4.1. ábra szemlélteti. A vevők keresletét (kiáramlás) az 1. raktárból elégítik ki. A megmunkált és újramegmunkált termékeket az 1. boltba szállítják (beáramlás). A visszaküldött termékeket a 2. raktárban gyűjtik (beáramlás), innen kerülnek újramegmunkálásra vagy hulladékkezelésre (kiáramlás). A 2. raktár alrendszerét tekinthetjük egy fordított termelés-készletezési rendszernek. Feltételezzük, hogy a vállalat nem veszi vissza az összes terméket és a visszaküldés egy állandó késési idővel történik.



4.1.1. ábra Anyag- és költségáramlás a lineáris modellben

A modellt a következő formában írhatjuk föl:

$$\int_0^T \left[h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + p_m P_m(t) + p_r P_r(t) + p_d P_d(t)\right] dt \to \min \tag{4.1.1}$$

úgy, hogy

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1(t) \\ \dot{I}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ R(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{10} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.1.2}$$

$$\begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.1.3}$$

$$\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1.4}$$

Feltételezzük, hogy a kezdeti készletszint a 2. raktárban egyenlő nullával. Ha nem nulla, akkor a feladatnak nem létezik megoldása, ahogy ezt a 4.1.3. részben belátjuk.

4.1.3. Segédproblémák

Ebben a fejezetben háromféle modellt fogunk megvizsgálni. Az első modellünkben nem szerepel megmunkálás és hulladékkezelés. Ezt az alapmodellt fogjuk általánosítani, két irányba: előbb megmunkálással, majd hulladékkezeléssel vizsgáljuk a modellt. Ezek a feladatok segítenek megérteni a rendszer működését, és hasznosak lesznek az optimális trajektória megszerkesztéséhez.

4.1.3.1. A lineáris újramegmunkálási modell megmunkálás és hulladékkezelés nélkül

A modellt a következő formában írhatjuk föl:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + p_r P_r(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\begin{aligned} &\dot{I}_1(t) = P_r(t) - S(t), \quad I_1(t_1) = 0 \\ &\dot{I}_2(t) = -P_r(t) + R(t), \quad I_2(t_1) = 0 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &I_1(t) \geq 0, \quad I_2(t) \geq 0, \\ &P_r(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Világos, hogy a feladatnak csak akkor létezik megoldása, ha

$$\int_{t_1}^{t} R(\tau) d\tau \geq \int_{t_1}^{t} S(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \ ,$$

ami azt mutatja, hogy a kumulált (visszavett) újramegmunkált termékek számának nagyobbnak kell lennie, mint a kumulált keresletnek.

Ezt a feladatot kétféleképpen egyszerűsíthetjük – a lineáris készlettartási költségtől függően és a nem negatív többletfüggvénnyel

$$\tilde{I}(t) = \int_{t_1}^{t} \left(R(\tau) - S(\tau) \right) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2] \ .$$

1. eset.: $h_1 \geq h_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(h_1 - h_2) I_1(t) + p_r P_r(t) \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} h_2 \tilde{I}(t)\, dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}_1(t) = P_r(t) - S(t), \quad I_1(t_1) = 0 \,,$$

$$0 \le I_1(t) \le \tilde{I}(t),$$
$$P_r(t) \ge 0$$

Ez a feladat egy klasszikus, "direkt" lineáris termelési-készletezési modell, ahol a raktárkapacitás a szűk keresztmetszet. Lineáris esetben a raktári kapacitás korlát mindig szabad (inaktív) feltétel, így az optimális megoldás

$$\left.\begin{aligned} I_1^0(t) &= 0 \\ I_2^0(t) &= \tilde{I}(t) \\ P_r^0(t) &= S(t) \end{aligned}\right\} \quad t \in [t_1, t_2].$$

2. eset.: $h_1 < h_2$

A problémát most úgy írhatjuk föl, mint

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(h_2 - h_1) I_2(t) + p_r P_r(t)\right] dt + \int_{t_1}^{t_2} h_1 \tilde{I}(t)\, dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}_2(t) = -P_r(t) + R(t), \quad I_2(t_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} 0 &\le I_2(t) \le \tilde{I}(t), \\ P_r(t) &\ge 0 \end{aligned}.$$

Ezt a feladatot tekinthetjük egy „fordított" termelési-készletezési problémának raktározási korláttal. Ebben a rendszerben a beáramlás (visszavételi ráta) adott, és a kiáramlás (újramegmunkálás) a döntési változó. A feladat megoldását az 4.1.F.1. függelékben adjuk meg.

Ahogy látható, az optimális készletszint egyenlő nullával és a raktári kapacitás korlát szabad feltétel. Az optimális újramegmunkálási ráta pozitív, és nincs olyan intervallum, ahol az újramegmunkálási ráta nullával egyenlő. Ez azt mutatja, hogy nem létezik optimális megoldás, ha a kezdeti készletszint szigorúan nagyobb, mint nulla, vagyis $I_{20} = I(t_1) = 0$.

4.1.3.2. A lineáris újramegmunkálási modell megmunkálással és hulladékkezelés nélkül

A modell a következőképpen írható le:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + p_m P_m(t) + p_r P_r(t)\right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(t) &= P_m(t) + P_r(t) - S(t), \quad I_1(t_1) = 0 \\ \dot{I}_2(t) &= -P_r(t) + R(t), \quad I_2(t_1) = 0 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} & I_1(t) \geq 0, \quad I_2(t) \geq 0, \\ & P_m(t) \geq 0, \quad P_r(t) \geq 0 \end{aligned}$$

A problémát kétféleképpen egyszerűsíthetjük – a lineáris készlettartási költségtől függően és a készletszintek összegével

$$\tilde{I}(t) = I_1(t) + I_2(t), \quad t \in [t_1, t_2] \ .$$

Most bemutatjuk a fentiek alapján kapott két új feladatot. A megoldáshoz a 4.1.F.2. függelék eredményeit fogjuk használni. Ezenkívül a 4.1.F.2. függelékben bevezetett segédfüggvénynek is fontos szerepe lesz a következő megoldásban.

1. eset.: $h_1 \geq h_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(h_1 - h_2) I_1(t) + h_2 \tilde{I}(t) + p_m P_m(t) + p_r P_r(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(t) &= P_m(t) + P_r(t) - S(t), \quad I_1(t_1) = 0 \\ \dot{\tilde{I}}(t) &= P_m(t) - \left(S(t) - R(t) \right), \quad \tilde{I}(t_1) = 0 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} & 0 \leq I_1(t) \leq \tilde{I}(t), \\ & P_m(t) \geq 0, \quad P_r(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Ezt az esetet tovább bonthatjuk két részfeladatra: az egyik a 4.1.F.2. függelékben leírt részfeladat, a másik pedig a következő:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(h_1 - h_2) I_1(t) + p_r P_r(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}_1(t) = P_r(t) - \left(S(t) - P_m^0(t) \right), \quad I_1(t_1) = 0 \, ,$$

$$\begin{aligned} & 0 \leq I_1(t) \leq \tilde{I}(t), \\ & P_r(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Ez a részfeladat könnyen megoldható, mivel az optimális megmunkálási ráta nem nagyobb, mint a kereslet *S(t)*, így ez egy klasszikus, lineáris feladat. Az optimális megoldás ebben az esetben

$$I_1^0(t) = 0$$

$$I_2^0(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[\tau_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, \tau_i\right) \\ \int_{\tau_i}^{t} \left(R(\tau) - S(\tau)\right) d\tau & t \in \left[\tau_i, \tau_i + \varepsilon_i\right) \end{cases}$$

$$P_m^0(t) = \begin{cases} S(t) - R(t) & t \in \left[\tau_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, \tau_i\right) \\ 0 & t \in \left[\tau_i, \tau_i + \varepsilon_i\right) \end{cases}$$

$$P_r^0(t) = S(t) - P_m^0(t)$$

Ezt az esetet tehát megoldottuk.

2. eset: $h_1 < h_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[h_1 \tilde{I}(t) + (h_2 - h_1) I_2(t) + p_m P_m(t) + p_r P_r(t)\right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{I}}(t) = P_m(t) - \left(S(t) - R(t)\right), \quad \tilde{I}(t_1) = 0 \\ &\dot{I}_2(t) = -P_r(t) + R(t), \quad I_2(t_1) = 0 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &0 \le I_2(t) \le \tilde{I}(t), \\ &P_m(t) \ge 0, \quad P_r(t) \ge 0 \end{aligned}$$

Ennek a feladatnak a megoldása elég egyszerű, mivel két független, megoldott részfeladatból áll. A raktári kapacitás korlát szabad feltétel, így a megoldás:

$$I_1^0(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[\tau_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, \tau_i\right) \\ \int_{\tau_i}^{t} \left(R(\tau) - S(\tau)\right) d\tau & t \in \left[\tau_i, \tau_i + \varepsilon_i\right) \end{cases}$$

$$I_2^0(t) = 0$$

$$P_m^0(t) = \begin{cases} S(t) - R(t) & t \in \left[\tau_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, \tau_i\right) \\ 0 & t \in \left[\tau_i, \tau_i + \varepsilon_i\right) \end{cases}$$

$$P_r^0(t) = R(t)$$

Ahogy látható, az optimális megoldásban a kezdeti készletszint egyenlő nullával, máskülönben nem létezik megoldás.

4.1.3.3. A lineáris újramegmunkálási modell megmunkálással és hulladékkezeléssel

A modell a következő alakot ölti:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + p_r P_r(t) + p_d P_d(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\begin{aligned} &\dot{I}_1(t) = P_r(t) - S(t), \quad I_1(t_1) = 0 \\ &\dot{I}_2(t) = -P_r(t) - P_d(t) + R(t), \quad I_2(t_1) = 0 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &I_1(t) \geq 0, \quad I_2(t) \geq 0, \\ &P_r(t) \geq 0, \quad P_d(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Ennek a feladatnak csak akkor létezik megoldása, ha

$$\int_{t_1}^{t} R(\tau) d\tau \geq \int_{t_1}^{t} S(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \ ,$$

ami azt mutatja, hogy a kumulált (visszavett) újramegmunkált termékmennyiségnek nagyobbnak kell lennie, mint a keresletnek.

Ez a feladat megmunkálás és hulladékkezelés nélküli modellnél bemutatottaknak megfelelően egyszerűsíthető:

$$\tilde{I}(t) = I_1(t) + I_2(t), \quad t \in [t_1, t_2] \ .$$

A fentiek alapján kapott két új feladat megoldását a következőkben mutatjuk be. Ahhoz, hogy megoldjuk a problémát, bevezetünk egy segédfeladatot a 4.1.F.3. függelékben.

1. eset.: $h_1 \geq h_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(h_1 - h_2) I_1(t) + h_2 \tilde{I}(t) + p_r P_r(t) + p_d P_d(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\begin{aligned} &\dot{I}_1(t) = P_r(t) - S(t), \quad I_1(t_1) = 0 \\ &\dot{\tilde{I}}(t) = -P_d(t) + \left(R(t) - S(t) \right), \quad \tilde{I}(t_1) = 0 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &0 \leq I_1(t) \leq \tilde{I}(t), \\ &P_r(t) \geq 0, \quad P_d(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Ezt az esetet tovább bonthatjuk két részfeladatra: a 3. függelékben bemutatott részfeladatra és az itt következőre:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(h_1 - h_2) I_1(t) + p_r P_r(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}_1(t) = P_r(t) - S(t), \quad I_1(t_1) = 0,$$

$$0 \le I_1(t) \le \tilde{I}(t),$$
$$P_r(t) \ge 0$$

Ez a részfeladat könnyen megoldható, mert az optimális megmunkálási ráta nem nagyobb, mint *S(t)* kereslet. Így egy klasszikus lineáris feladathoz jutunk. Erre az esetre az optimális megoldás:

$$I_1^0(t) = 0$$
$$I_2^0(t) = \begin{cases} 0 & t \in [\tau_{i-1}, \tau_i - \varepsilon_i) \\ \int_{\tau_i - \varepsilon_i}^{t} (S(\tau) - R(\tau)) d\tau & t \in [\tau_i - \varepsilon_i, \tau_i) \end{cases}$$

$$P_r^0(t) = S(t)$$
$$P_d^0(t) = \begin{cases} R(t) - S(t) & t \in [\tau_{i-1}, \tau_i - \varepsilon_i) \\ 0 & t \in [\tau_i - \varepsilon_i, \tau_i) \end{cases}$$

Következésképpen ezt a feladatot megoldottuk.

2. eset: $h_1 < h_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[h_1 \tilde{I}(t) + (h_2 - h_1) I_2(t) + p_r P_r(t) + p_d P_d(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{I}}(t) &= -P_d(t) + (R(t) - S(t)), \quad \tilde{I}(t_1) = 0 \\ \dot{I}_2(t) &= -P_r(t) - P_d(t) + R(t), \quad I_2(t_1) = 0 \end{aligned},$$

$$0 \le I_2(t) \le \tilde{I}(t),$$
$$P_r(t) \ge 0, \quad P_d(t) \ge 0$$

Ezt a feladatot igen egyszerűen megoldhatjuk, mivel két független, megoldott részfeladatból áll. A raktári kapacitás korlát szabad feltétel:

$$I_1^0(t) = \begin{cases} 0 & t \in [\tau_{i-1}, \tau_i - \varepsilon_i) \\ \int\limits_{\tau_i - \varepsilon_i}^{t} (R(\tau) - S(\tau))d\tau & t \in [\tau_i - \varepsilon_i, \tau_i) \end{cases}$$

$$I_2^0(t) = 0$$

$$P_r^0(t) = \begin{cases} S(t) & t \in [\tau_{i-1}, \tau_i - \varepsilon_i) \\ R(t) & t \in [\tau_i - \varepsilon_i, \tau_i) \end{cases}$$

$$P_d^0(t) = \begin{cases} R(t) - S(t) & t \in [\tau_{i-1}, \tau_i - \varepsilon_i) \\ 0 & t \in [\tau_i - \varepsilon_i, \tau_i) \end{cases}$$

Látható, hogy optimális megoldás esetén a kezdeti készletszint nulla, máskülönben nem létezik a feladatnak megoldása.

4.1.4. A modell tulajdonságai

A modellt a költségparaméterektől függően fogjuk vizsgálni. A költségfüggvényt átalakíthatjuk a következő formára:

$$\int\limits_0^T \left[h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + p_m(P_m(t) + P_r(t)) + p_d(P_d(t) + P_r(t)) + (p_r - p_m - p_d)P_r(t) \right] dt .$$

Ennek az alaknak a vizsgálatával jellemezhetjük a modellt.

4.1.1. lemma. Ha $p_r > p_m + p_d$, akkor az optimális megoldás az újramegmunkálás elhagyása.

A bizonyítás nyilvánvaló. Láthatjuk, hogy az az optimális, ha nincs újramegmunkálás, mivel az újramegmunkálási ráta költségkoefficiense pozitív. Ebben az esetben a két raktárra vonatkozó feladat egymástól független és az optimális megoldás, ha a készletszint mindkettőben nulla. Az 1. raktár feladata (függetlenül a 2. raktárétól):

$$\int\limits_0^T \left[h_1 I_1(t) + p_m P_m(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}_1(t) = P_m(t) - S(t), \quad I_1(0) = I_{10},$$

$$I_1(t) \geq 0$$

$$P_m(t) \geq 0$$

a 2. raktáré pedig

$$\int_0^T \left[h_2 I_2(t) + p_d P_d(t)\right] dt \to \min$$

feltéve, hogy

$$\dot{I}_2(t) = -P_d(t) + R(t), \quad I_2(0) = I_{20},$$

$$\begin{matrix} I_2(t) \geq 0 \\ P_d(t) \geq 0 \end{matrix}.$$

Ezt a második feladatot tekinthetjük egy „visszaáramló” termelés-készletezési problémának. (Lásd az 4.1.F.1. függeléket.)

Ebben a modellben az beáramlás (visszavételi ráta) adott, az kiáramlás (hulladékkezelés vagy újramegmunkálás) pedig döntési változó. Az első feladat megoldása már ismert a termelés-készletezés irodalmából.

Az optimális készletszintek egyenlők nullával. Az optimális hulladékkezelési (újramegmunkálási) szint pozitív, nincs olyan intervallum, ahol a hulladékkezelés egyenlő lenne nullával. Ez azt mutatja meg, hogy nem létezik optimális megoldás, ha a kezdeti készletszint szigorúan nagyobb, mint nulla. A következőkben azt feltételezzük, hogy a 2. raktárban a kezdeti készletszint nulla, máskülönben nincs optimális megoldás.

Most már definiálhatjuk a költségkoefficienseknek ehhez a szerkezetéhez tartozó optimális megoldást.

Definiáljuk a következő időpontot:

$$t_1 = \left\{ t \,\middle|\, I_{10} = \int_0^t S(t)dt \right\}!$$

Az optimális megoldás a megmunkálási, újramegmunkálási és a hulladékkezelési rátára

$$P_m^0(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_1 \\ S(t) & t_1 \leq t \leq T \end{cases},$$

$$\left.\begin{matrix} P_r^0(t) = 0 \\ P_d^0(t) = R(t) \end{matrix}\right\} \quad 0 \leq t \leq T$$

és a készletszint

$$I_1^0(t) = \begin{cases} I_{10} - \int_0^t S(\tau)d\tau & 0 \leq t < t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq T \end{cases}.$$

$$I_2^0(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

Ezt az optimális megoldást nevezhetjük *nulla-készlet stratégiának*.

Egy másik esetet vizsgál a

4.1.2. lemma. Ha $p_r = p_m + p_d$, akkor az optimális megoldás

$$P_r^0(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < t_1 \\ \tilde{P}(t) & 0 \le \tilde{P}(t) \le \min\{S(t), R(t)\}, \quad t_1 \le t \le T \end{cases}$$

$$P_m^0(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < t_1 \\ S(t) - P_r^0(t) & t_1 \le t \le T \end{cases},$$

$$P_d(t) = R(t) - P_r^0(t) \quad 0 \le t \le T$$

és a készletszint

$$I_1^0(t) = \begin{cases} I_{10} - \int_0^t S(\tau)d\tau & 0 \le t < t_1 \\ 0 & t_1 \le t \le T \end{cases}.$$

$$I_2^0(t) = 0 \quad 0 \le t \le T$$

A bizonyítás nyilvánvaló. A költségfüggvény elemzésével egy ahhoz hasonló problémához jutottunk, mint, amit az 4.1.1. lemmában vizsgáltunk. A különbség az, hogy az újramegmunkálási ráta egy felső és egy alsó határ között mozog.

Ez is egy nulla-készlet stratégia, de a megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta az újramegmunkálási ráta függvényében változik.

A következő vizsgálatunknál azt feltételezzük, hogy $p_r < p_m + p_d$, amivel kizárjuk a speciális költségstruktúrák eseteit. Tekintsük ezt az általános esetnek! Az alábbi lemma azt az esetet magyarázza, amikor a megmunkálás és a hulladékkezelés nem feltétlenül elégíti ki a keresletet.

4.1.3. lemma. Ha $I_{10} + \int_0^t \left(R(\tau) - S(\tau)\right) d\tau \ge 0, \quad \forall t \in [0, T]$, akkor a megmunkálási ráta a tervezési időszakban egyenlő nullával.

Bizonyítás: A lemma bizonyításához a lehetséges megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési rátákat használjuk:

$$I_{10} + \int_0^t P_m(\tau)d\tau + \int_0^t P_r(\tau)d\tau - \int_0^t S(\tau)d\tau \ge 0,$$

és

$$-\int_0^t P_d(\tau)d\tau - \int_0^t P_r(\tau)d\tau + \int_0^t R(\tau)d\tau \ge 0.$$

Ez a két egyenlőtlenség a differenciál egyenletek integrál formájából jön.

Ezekből következik:

$$\int_0^t S(\tau)d\tau - I_{10} - \int_0^t P_m(\tau)d\tau \le \int_0^t P_r(\tau)d\tau \le -\int_0^t P_d(\tau)d\tau + \int_0^t R(\tau)d\tau .$$

Most, az alábbi két egyenlőtlenség is igaz

$$\int_0^t S(\tau)d\tau - I_{10} - \int_0^t P_m(\tau)d\tau \le \int_0^t S(\tau)d\tau - I_{10},$$

és

$$-\int_0^t P_d(\tau)d\tau + \int_0^t R(\tau)d\tau \le \int_0^t R(\tau)d\tau .$$

Ha összeadjuk az egyenlőtlenségeket

$$\int_0^t S(\tau)d\tau - I_{10} \le \int_0^t P_r(\tau)d\tau \le \int_0^t R(\tau)d\tau ,$$

akkor megkapjuk a lemma feltételét.

Az eredményünket úgy magyarázhatjuk, hogy nincs szükség megmunkálásra, ha a végtermék kezdeti készletszintjének és a visszavett termékeknek az összege nem kisebb, mint a kumulált kereslet a tervezési időszakban, vagyis

$$I_{10} + \int_0^t R(\tau)d\tau \ge \int_0^t S(\tau)d\tau .$$

Egy másik fontos következménye a lemmának, hogy ilyen esetekben van hulladékkezelés, ahogy azt a 4.1.3.2 fejezetben feltételeztük. A következő lemma arra az esetre ad feltételt, amikor nincs hulladékkezelés.

4.1.4. lemma. Ha $I_{10} + \int_0^T \left(R(\tau) - S(\tau)\right)d\tau \le 0$, akkor a hulladékkezelési ráta egyenlő nullával a tervezési időszakban.

A lemma bizonyítása nyilvánvaló. Ha minden visszavett terméket újramegmunkálnak a tervezési időszakban, és ez nem elégíti ki a keresletet, akkor a hulladékkezelés fölöslegesen növeli a költségeket. A fogyasztótól vissza nem került termékeket újra kell termelni, mivel azok már nem fognak keresletet kielégíteni. Az eset megoldását a 4.1.3.3 fejezet adja meg

A következő fejezetben az általános megoldást adjuk meg erre a problémára, speciális költség- és rendszerstruktúrák nélkül, vagyis azt feltételezzük, hogy a lemmák eredményeit előzetesen teszteltük.

4.1.5. A modell megoldása

A probléma megoldásához a Pontrjagin-féle maximumelvet fogjuk alkalmazni. Az optimalizáláshoz két segédfüggvényt vezetünk be: a Hamilton- és a Lagrange-függvényt. Ez utóbbi az előbbi készletezési korláttal való bővítése.

Hamilton-függvény:

$$H\left(I_1(t), I_2(t), P_m(t), P_r(t), P_r(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t\right) =$$
$$-\left[\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_m & p_r & p_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ R(t) \end{bmatrix}\right\}$$

A következőnek bemutatott Lagrange-függvény hasznos eszköznek fog bizonyulni az adjungált változók megszerkesztéséhez.

Lagrange-függvény

$$L\left(I_1(t), I_2(t), P_m(t), P_r(t), P_d(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t\right) =$$
$$-\left[\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_m & p_r & p_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ R(t) \end{bmatrix}\right\} +$$
$$+\begin{bmatrix} \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix}$$

A feladatunk egy konvex (lineáris) optimális irányítási probléma. A feladat konvexitásából fakadó előny, hogy a szükséges feltételek egyben elégségesek is. Így igaz, hogy (Thopmson-Sethi (1981), Feichtinger-Hartl (1986), Seierstad-Sydsaeter (1987)):

4.1.1. tétel. Ahhoz, hogy $\left\{I_1^0(t), I_2^0(t), P_m^0(t), P_r^0(t), P_d^0(t)\right\}$ az (4.1.1)-(4.1.4) feladat optimális megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy létezzen olyan $\psi_1(t)$ és $\psi_1(t)$ függvény, ahol minden $0 \le t \le T$ időpontra azt kapjuk, hogy $\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) készletszintek stacionaritása:

$$\begin{bmatrix}\dot{\psi}_1(t)\\ \dot{\psi}_2(t)\end{bmatrix} = -\frac{\partial L\left(I_1^0(t), I_2^0(t), P_m^0(t), P_r^0(t), P_d^0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), t\right)}{\partial \begin{bmatrix} I_1(t)\\ I_2(t)\end{bmatrix}},$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\psi}_1(t)\\ \dot{\psi}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}$$

(b) a maximumelv a megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési rátára:

$$\max_{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}P_m(t)\\ P_r(t)\\ P_d(t)\end{bmatrix}} \left\{H\left(I_1^0(t), I_2^0(t), P_m(t), P_r(t),, P_d(t)\psi_1(t), \psi_2(t), t\right)\right\} =$$

$$H\left(I_1^0(t), I_2^0(t), P_m^0(t), P_r^0(t), P_d^0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t\right)$$

$$\max_{0 \le P_m(t)} \left\{\left(\psi_1(t) - p_m\right)P_m(t)\right\} = \left(\psi_1(t) - p_m\right)P_m^0(t) = 0$$

$$\max_{0 \le P_r(t)} \left\{\left(\psi_1(t) - \psi_2(t) - p_r\right)P_r(t)\right\} = \left(\psi_1(t) - \psi_2(t) - p_r\right)P_r^0(t) = 0,$$

$$\max_{0 \le P_d(t)} \left\{-\left(\psi_2(t) + p_d\right)P_d(t)\right\} = -\left(\psi_2(t) + p_d\right)P_d^0(t) = 0$$

(c) az adjungált változók szakadása bizonyos pontokban:

$$\begin{bmatrix}\psi_1(t_j^-)\\ \psi_2(t_j^-)\end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix}\psi_1(t_j^+)\\ \psi_2(t_j^+)\end{bmatrix}, \quad t_j \in (0,T), \quad j \in J, \quad \begin{bmatrix}I_1^0(t_j)\\ I_2^0(t_j)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

(d) a készletszintek Lagrange-függvényre vonatkozó feltétele:

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(t) & \lambda_2(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^0(t)\\ I_2^0(t)\end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix}\lambda_1(t) & \lambda_2(t)\end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix},$$

(e) az időre vonatkozó feltétel:

$$\begin{bmatrix}\psi_1(T) & \psi_2(T)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^0(T)\\ I_2^0(T)\end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix}\psi_1(T) & \psi_2(T)\end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}.$$

Az (a) feltétel a mozgási szabály az adjungált változókra. A (d) feltételek a készletszint Lagrange-függvényre vonatkozó feltételei, az (e) pedig az állapotváltozók időre vonatkozó feltételei. Az adjungált változókat úgy értelmezhetjük, mint az árnyékárat az 1. és a 2. raktárban. A (b) feltételeket felhasználva az optimális megmunkálási és újramegmunkálási rátát egyszerűbb formában is felírhatjuk:

$$P_m^0(t) = \begin{cases} 0 & \psi_1(t) \le p_m \\ nemdefiniált & \psi_1(t) = p_m \end{cases},$$

$$P_r^0(t) = \begin{cases} 0 & \psi_1(t) - \psi_2(t) \le p_r \\ nemdefiniált & \psi_1(t) - \psi_2(t) = p_r \end{cases},$$

és

$$P_d^0(t) = \begin{cases} 0 & \psi_2(t) \ge -p_d \\ nemdefiniált & \psi_2(t) = -p_d \end{cases}.$$

A feltételeket a 2. ábra szemlélteti.

Mielőtt megszerkesztenénk a megmunkálás, újramegmunkálás és hulladékkezelés optimális útját, vizsgáljuk meg $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$ adjungált változók lehetséges útjait. Az adjungált változók között lineáris kapcsolat van, így három esetet különböztethetünk meg:

1. eset $\quad \psi_1(t) = p_r - p_d, \quad \psi_2(t) = -p_d, \quad t \in [t_1, t_2]$

$$P_m^0(t) = 0, \quad P_r^0(t) > 0, \quad P_d^0(t) > 0, \quad t \in [t_1, t_2]$$

Ez a pont egy megoldás az adjungált változókra. (Lásd 2. ábra.) Deriválás után a következő azonosságokat kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\psi}_1(t) = h_1 - \lambda_1(t) \\ 0 &= \dot{\psi}_2(t) = h_2 - \lambda_2(t) \end{aligned},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda_1(t) > 0 \\ h_2 &= \lambda_2(t) > 0 \end{aligned}.$$

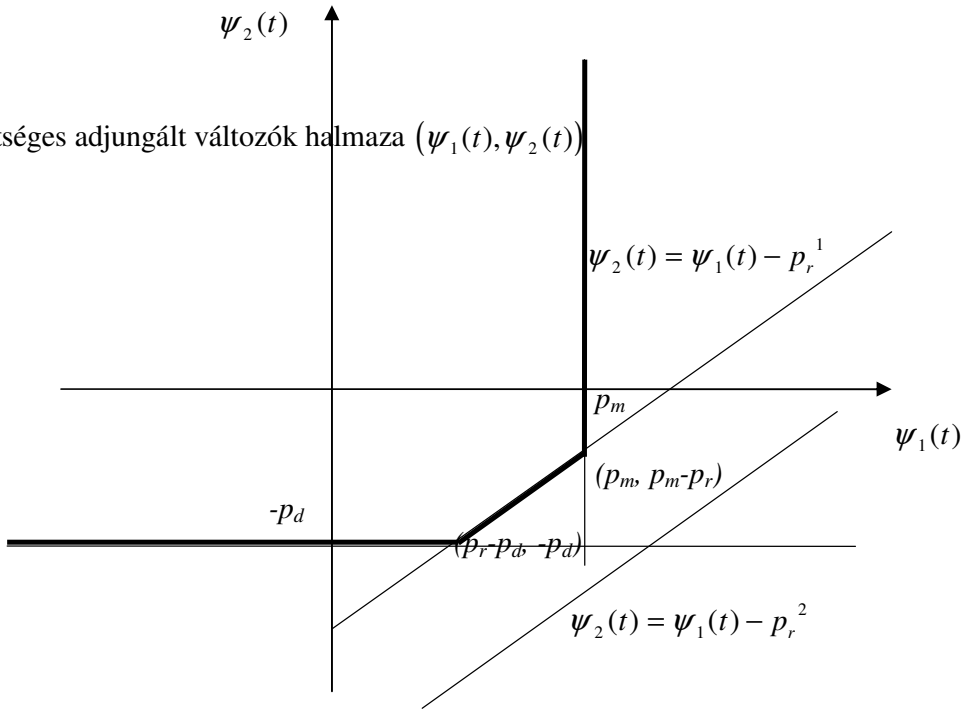
Ehhez az esethez használhatjuk a Lagrange-függvényre vonatkozó feltételeket. A vizsgált intervallumon a készletszint egyenlő nullával, az optimális megmunkálási és újramegmunkálási ráta pedig:

$$\left.\begin{aligned} I_1^0(t) &= 0, \\ I_2^0(t) &= 0, \\ P_m^0(t) &= 0, \\ P_r^0(t) &= S(t), \\ P_d^0(t) &= R(t) - S(t) \ge 0, \end{aligned}\right\} \quad t \in [t_1, t_2] \ .$$

2. eset : $\quad \psi_1(t) - \psi_2(t) = p_r, \quad \psi_1(t) < p_m, \quad \psi_2(t) > p_d \quad t \in [t_1, t_2]$

$$P_m^0(t) = 0, \quad P_r^0(t) > 0, \quad P_d^0(t) = 0, \quad t \in [t_1, t_2]$$

A lehetséges adjungált változók halmaza $(\psi_1(t), \psi_2(t))$



4.1.2. ábra Az optimalitási feltételek grafikus megjelenítése

Ez a megoldás az adjungált változókra egy pontpár a nyilak között. (Lásd 4.1.2. ábra.)

Deriválás után a következő azonosságokat kapjuk:

$$0 = \dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t) = h_1 - h_2 - \lambda_1(t) + \lambda_2(t),$$

vagy

$$\begin{aligned} 0 &= h_1 - h_2 - \lambda_1(t) + \lambda_2(t) \\ h_1 - h_2 + \lambda_2(t) &= \lambda_1(t) > 0 \end{aligned}.$$

Ha feltételezzük, hogy $h_1 > h_2$, akkor az optimális megoldás

$$\left.\begin{aligned} I_1^0(t) &= 0, \\ I_2^0(t) &\geq 0, \\ P_m^0(t) &= 0, \\ P_r^0(t) &= S(t), \\ P_d^0(t) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad t \in [t_1, t_2] \ ,$$

vagy, ha $h_1 \leq h_2$

$$\left.\begin{aligned} &I_1^0(t) \geq 0, \\ &I_2^0(t) = 0, \\ &P_m^0(t) = 0, \\ &P_r^0(t) = R(t), \\ &P_d^0(t) = 0, \end{aligned}\right\} \quad t \in [t_1, t_2] \ .$$

Az adjungált változók az első esetben

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(t) = \psi_{10} + h_2(t - t_1) \\ &\psi_2(t) = \psi_1(t) - p_r \end{aligned}\right\} \quad t \in [t_1, t_2] \ ,$$

és a második esetben

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(t) = \psi_{10} + h_1(t - t_1) \\ &\psi_2(t) = \psi_1(t) - p_r \end{aligned}\right\} \quad t \in [t_1, t_2] \ .$$

3. eset: $\psi_1(t) = p_m, \quad \psi_2(t) = p_m - p_r, \quad t \in [t_1, t_2]$

$$P_m^0(t) > 0, \quad P_r^0(t) > 0, \quad P_d^0(t) = 0, \quad t \in [t_1, t_2]$$

Ez a pont egy megoldás az adjungált változókra. (Lásd 4.1.2. ábra.) Deriválás után a következő azonosságokat kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\psi}_1(t) = h_1 - \lambda_1(t) \\ 0 &= \dot{\psi}_2(t) = h_2 - \lambda_2(t) \end{aligned},$$

ami, azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda_1(t) > 0 \\ h_2 &= \lambda_2(t) > 0 \end{aligned}.$$

Ehhez az esethez használhatjuk a Lagrange-függvényre vonatkozó feltételeket. A vizsgált intervallumon a készletszint egyenlő nullával, az optimális újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta pedig:

$$\left.\begin{aligned} &I_1^0(t) = 0, \\ &I_2^0(t) = 0, \\ &P_m^0(t) = S(t) - R(t) \geq 0, \\ &P_r^0(t) = R(t), \\ &P_d^0(t) = 0, \end{aligned}\right\} \quad t \in [t_1, t_2] \ .$$

A fenti három esetből rögtön következik

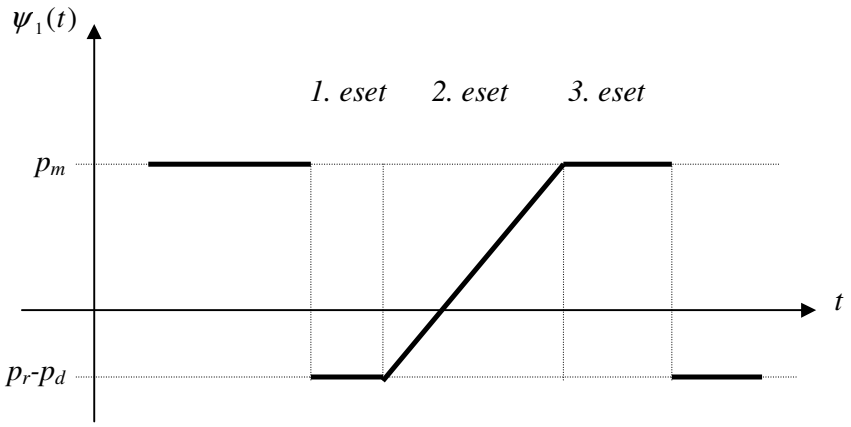
4.1.5. lemma. Optimális döntés esetén $t \in [0,T]$ időpontra teljesül, hogy $P_m^0(t)\, P_d^0(t) = 0$.

A lemma jelentése, hogy adott időpontban vagy megmunkálás, vagy hulladékkezelés történik, de egyszerre a kettő sosem. A következő kérdés, hogy milyen sokáig lehet újramegmunkálni, megmunkálás és hulladékkezelés nélkül.

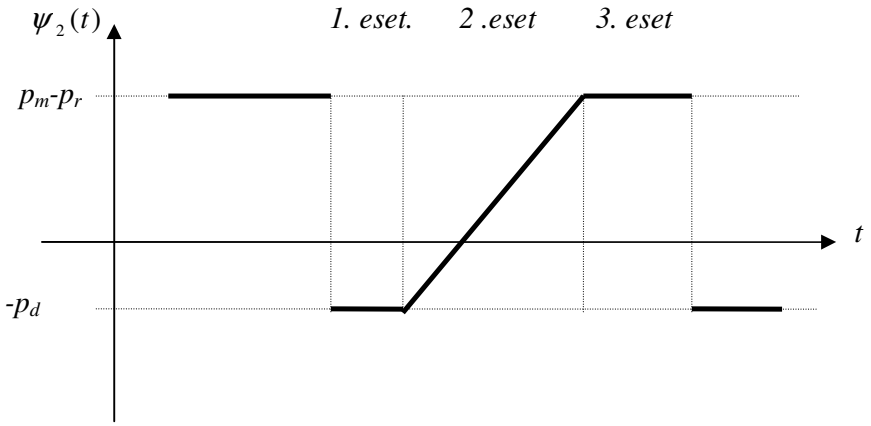
4.1.6. lemma: Csak megmunkálással tölthető, τ maximális idő:

$$\tau = \begin{cases} \dfrac{p_m + p_d - p_r}{h_2} & h_1 > h_2 \\ \dfrac{p_m + p_d - p_r}{h_1} & h_1 \le h_2 \end{cases}.$$

A lemma bizonyításához szerkesszünk egy lehetséges utat az adjungált változókra! Ha beütemezzük a három lehetséges esetet, eljutunk egy lehetséges úthoz. (Lásd 4.1.3. és 4.1.4. ábra.)



4.1.3. ábra A $\psi_1(t)$ adjungált változó egy lehetséges útja



4.1.4. ábra A $\psi_2(t)$ adjungált változó egy lehetséges útja

A 2. esetben az adjungált változók tangens h_2 lineáris függvényei, ha $h_1 > h_2$. Ez a tény bizonyítja a lemmát. Ahogy láthatjuk, az adjungált változóknak lehetnek szakadásai, ha a 3. és az 1., a 3. és a 2., vagy a 2. és az 1. eset között váltópont van.

Most vizsgáljuk meg a váltópontokat!

4.1.7. Lemma A 3. és az 1. eset között váltópont lehet, ha

$$\tilde{I}(t) = I_{10} + \int_0^t \left(R(\tau) - S(\tau)\right) d\tau$$

függvénynek lokális maximuma van.

Bizonyítás. A 3. esetben $P_m^0(t) = S(t) - R(t) \geq 0$, és az 1. esetben $P_d^0(t) = R(t) - S(t) \geq 0$.

Ha t_1 ez a váltópont, akkor t_1 pontban igaz, hogy $R(t_1) - S(t_1) = 0$. Ez a tény bizonyítja az állítást.

A következőkben bemutatunk néhány példát az optimális megoldás megszerkesztésére.

4.1.6. Számpélda

Ebben a fejezetben három példát adunk a feladat megoldására. Az optimális megoldás megszerkesztése előtt ellenőriznünk kell a 4.1.3. és a 4.1.4. lemma eredményét. Tegyük fel, hogy a lemmák feltételei nem teljesülnek, és $h_1 > h_2$. A másik esetet hasonlóan kezelhetjük.

1. példa. A modell megmunkálás, újramegmunkálás és hulladékkezeléssel

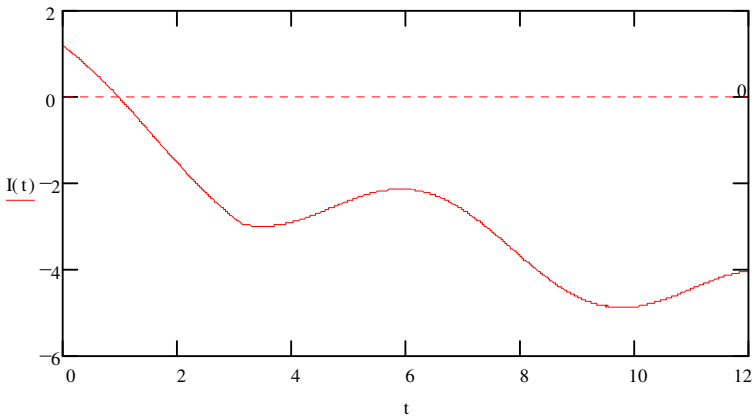
A számpéldához használt adatokat az 4.1.1. táblázat tartalmazza. Az 4.1.5. ábra $\tilde{I}(t)$ függvényt mutatja, amely fontos szerepet fog játszani az optimális megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta megszerkesztésében.

Paraméter	Leírás
Kereslet	$S(t)=1+0.5\sin(t)$
Visszavételi ráta	$R(t)=0.7(1+0.5\sin(t-\pi))$, $t>\pi$, $R(t)=0$, $t\leq\pi$
Készlettartási ktg., 1. raktár	$h_1=2$
Készlettartási ktg., 2. raktár	$h_2=1$
Megmunkálás költsége	$p_m=5$
Újramegmunkálás költsége	$p_r=2$
Hulladékkezelés költsége	$p_d=3$
Kezdeti készletszint, 1. raktár	$I_0=1.2$
Tervezési időszak	$T=12$

4.1.1. táblázat Az 1. példához használt adatok

$\tilde{I}(t)$ függvénynek két minimuma van, 3.502 és 9.785 időpontokban. Először az optimális megmunkálási rátát adjuk meg:

$$P_m^0(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 0.979 \\ S(t) - R(t) & 0.979 \le t < 3.502 \\ 0 & 3.502 \le t < 7.398 \\ S(t) - R(t) & 7.398 \le t < 9.785 \\ 0 & 9.785 \le t \le 12 \end{cases}.$$



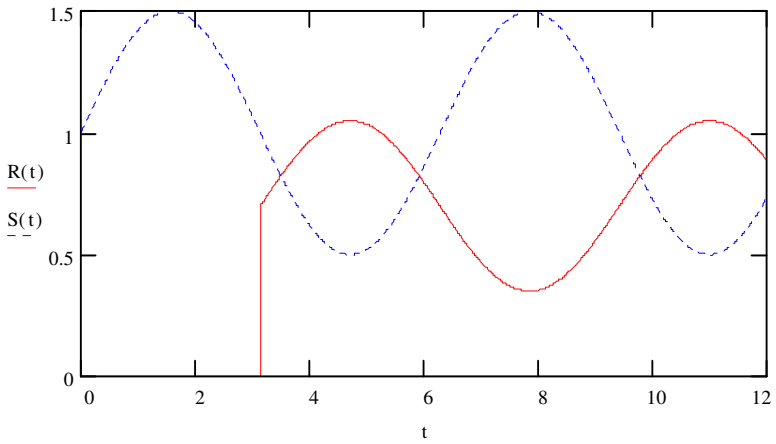
4.1.5. ábra Az $\tilde{I}(t)$ függvény az 1. példában

Az optimális hulladékkezelési ráta

$$P_d^0(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 9.785 \\ R(t) - S(t) & 9.785 \le t \le 12 \end{cases},$$

és az újramegmunkálási ráta

$$P_r^0(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 0.979 \\ R(t) & 0.979 \le t < 3.502 \\ S(t) & 3.502 \le t < 7.398 \\ R(t) & 7.398 \le t < 9.785 \\ S(t) & 9.785 \le t \le 12 \end{cases}.$$



4.1.6. ábra Kereslet és visszavételi ráta az 1. példában

2. példa. A modell megmunkálással és hulladékkezeléssel

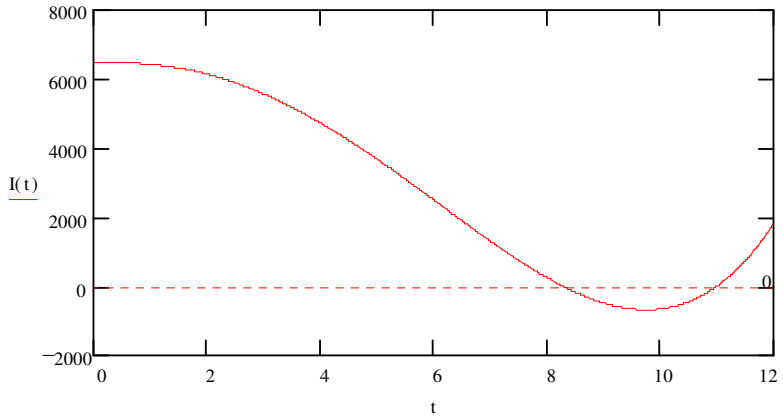
A számpéldához használt adatokat a 4.1.2. táblázat tartalmazza. A 4.1.7. ábra $\tilde{I}(t)$ függvényt mutatja, amely fontos szerepet fog játszani az optimális megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta megszerkesztésében.

Paraméter	Leírás
Kereslet	$S(t)=t^2(t^2-144)$
Visszavételi ráta	$R(t)=0.9(t-1)^2((t-1)^2-144),\ t>1,$ $R(t)=0,\ t\leq 1$
Készlettartási ktg., 1. raktár	$h_1=2$
Készlettartási ktg., 2. raktár	$h_2=1$
Megmunkálás költsége	$p_m=5$
Újramegmunkálás költsége	$p_r=2$
Hulladékkezelés költsége	$p_d=3$
Kezdeti készletszint, 1. raktár	$I_0=6478$
Tervezési időszak	$T=12$

4.1.2. táblázat A 2. példához használt adatok

$\tilde{I}(t)$ függvénynek 9.757 időpontban minimum van. Először az optimális megmunkálási rátát adjuk meg:

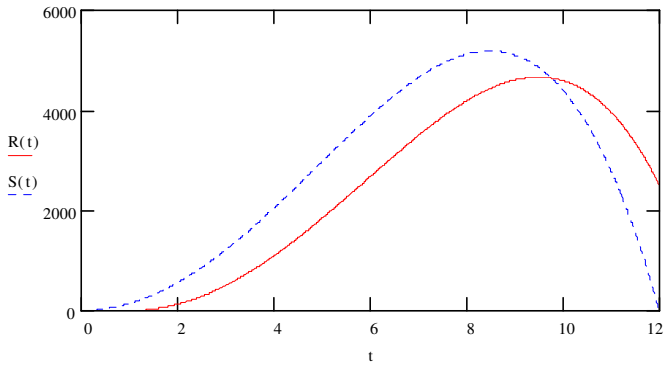
$$P_m^0(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t<8.281 \\ S(t)-R(t) & 8.281\leq t<9.757 \\ 0 & 9.757\leq t\leq 12 \end{cases}.$$



4.1.7. ábra Az $\tilde{I}(t)$ függvény a 2. példában

Az optimális hulladékkezelési ráta:

$$P_d^0(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 9.757 \\ R(t) - S(t) & 9.757 \le t \le 12 \end{cases},$$



4.1.8. ábra Kereslet és visszavételi ráta a 2. példában

és az újramegmunkálási ráta

$$P_r^0(t) = \begin{cases} S(t) & 0 \le t < 8.281 \\ R(t) & 8.281 \le t < 9.757 \\ S(t) & 9.757 \le t \le 12 \end{cases}.$$

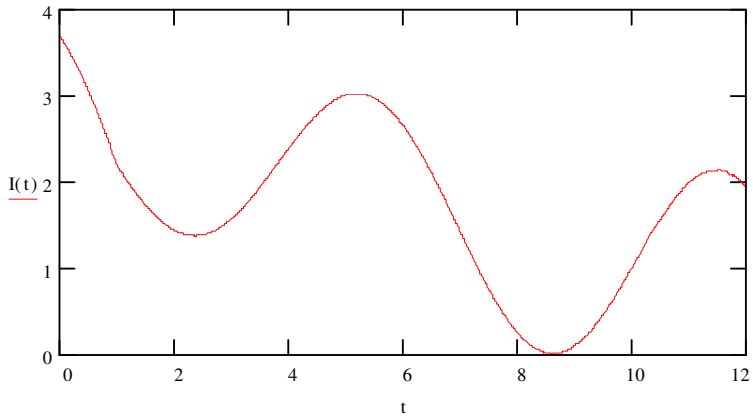
3. példa. A modell megmunkálás nélkül

A számpéldához használt adatokat a 4.1.3. táblázat tartalmazza. A 4.1.9. ábra $\tilde{I}(t)$ függvényt mutatja, amely fontos szerepet fog játszani az optimális megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta megszerkesztésében.

Paraméter	Leírás
Kereslet	$S(t)=(1+0.05t)(1+sin(t))$
Visszavételi ráta	$R(t)=(1+0.05(t-1))(1+sin(t-1))$, $t>1$, $R(t)=0$, $t\leq 1$
Készlettartási ktg., 1. raktár	$h_1=2$
Készlettartási ktg., 2. raktár	$h_2=1$
Megmunkálás költsége	$p_m=5$
Újramegmunkálás költsége	$p_r=2$
Hulladékkezelés költsége	$p_d=3$
Kezdeti készletszint, 1. raktár	$I_0=3.7$
Tervezési időszak	$T=12$

4.1.3. táblázat A 3. példához használt adatok

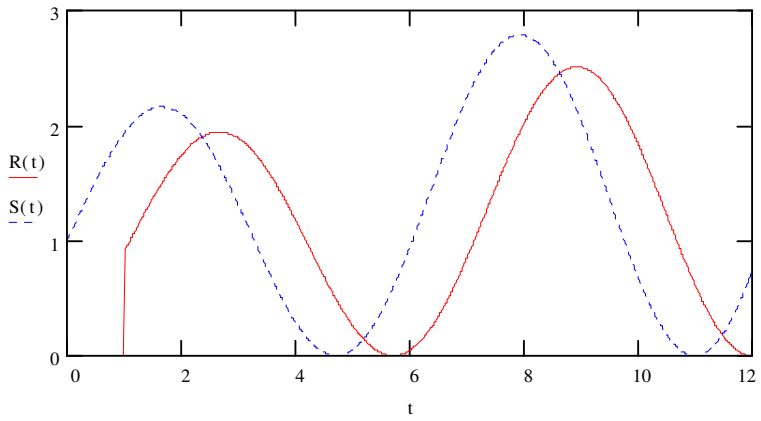
$\tilde{I}(t)$ függvény szigorúan nagyobb, mint nulla, így nincs megmunkálás: $P_m^0(t)=0$.



4.1.9. ábra Az $\tilde{I}(t)$ függvény a 3. példában

Az optimális hulladékkezelési ráta:

$$P_d^0(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t<8.628 \\ R(t)-S(t) & 8.628\leq 10.943 \\ 0 & 10.943\leq t\leq 10 \end{cases},$$



4.1.10. ábra Kereslet és visszavételi ráta a 3. példában

és az újramegmunkálási ráta

$$P_r^0(t) = \begin{cases} S(t) & 0 \le t < 8.628 \\ R(t) - S(t) & 8.628 \le t < 10.943 \\ S(t) & 10.943 \le t \le 12 \end{cases}.$$

4.1.7. Következtetés

Tanulmányunkban egy visszutas logisztikai feladatot oldottunk meg. A megmunkálás, újramegmunkálás és hulladékkezelési költségek konvexitása (linearitása) miatt az optimalitás szükséges feltételei egyben elégségesek is. A modell leírása után bemutattunk három példát az optimális trajektóriák megszerkesztésére. Azt az eredményt kaptuk, hogy a visszutas logisztikai feladat viselkedését az új és a visszavett áruk készlettartási költsége befolyásolja. Az újramegmunkálás irányítja a rendszer optimális útját, a megmunkálás szerepe pedig az, hogy tágítsa a termelési lehetőségeket, ha a kereslet nem elégíthető ki a visszavett áruk újramegmunkálásából.

4.1.F.1. függelék: A „fordított” lineáris termelés-készletezési feladat

A feladatot a következőképpen írhatjuk le:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(h_2 - h_1) I_2(t) + p_r P_r(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}_2(t) = -P_r(t) + R(t), \quad I_2(t_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} &0 \le I_2(t), \\ &P_r(t) \ge 0 \end{aligned}.$$

Ezt a problémát tekinthetjük egy „fordított” termelés-készletezési feladatnak. Ebben a modellben a beáramlás (visszavételi ráta) adott és a kiáramlás (újramegmunkálás) a döntési változó. Most oldjuk meg a fordított feladatot!

A Hamilton- és a Lagrange-függvény a következő alakot ölti.

Hamilton-függvény:

$$H(I_2(t), P_r(t), \psi_2(t), t) = -\left[(h_2 - h_1) I_2(t) + p_r P_r(t) \right] + \psi_2(t) \left[-P_r(t) + R(t) \right] ,$$

Lagrange-függvény:

$$L(I_2(t), P_r(t), \psi_2(t), \lambda_1(t), t) = -\left[(h_2 - h_1) I_2(t) + p_r P_r(t) \right] + \psi_2(t) \left[-P_r(t) + R(t) \right] + \lambda_1(t) I_2(t).$$

Az optimalitás szükséges és elégséges feltételei:

(1) az adjungált változóra: $\dot{\psi}_2(t) = (h_2 - h_1) - \lambda_1(t)$,

(2) a maximumelv: $\max\limits_{P_r(t) \ge 0} \left\{ -\left(p_r + \psi_2(t) \right) P_r(t) \right\} = -\left(p_r + \psi_2(t) \right) P_r^0(t) = 0$,

(3) a Lagrange-függvényre vonatkozó feltétel: $\lambda_1(t) I_2^0(t) = 0, \lambda_1(t) \ge 0$,

(4) az időre vonatkozó feltétel: $\psi_2(t_2) I_2^0(t_2) = 0, \psi_2(t_2) \ge 0$.

Az optimális megoldás

$$\left. \begin{aligned} &I_2^0(t) = 0 \\ &P_r^0(t) = R(t) \\ &\psi_2(t) = -p_d \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [t_1, t_2] .$$

Amint láthatjuk, az optimális készletszint egyenlő nullával és a raktári kapacitás korlát szabad feltétel. Az optimális újramegmunkálási szint pozitív, nincs olyan intervallum, ahol az újramegmunkálási ráta egyenlő nullával. Ez azt mutatja, hogy nem létezik optimális megoldás, ha a kezdeti készletszint szigorúan nagyobb, mint nulla. Tehát $I_{20} = I(t_1) = 0$.

4.1.F.2. függelék: A „direkt” lineáris termelés-készletezési modell, általánosított kereslettel

A következő probléma a klasszikus, lineáris feladat általánosítása, ahol a módosított kereslet lehet negatív, ha a visszavételi ráta nagyobb, mint a kereslet szintje. Így a megoldás egy kicsit eltér azoktól az esetektől, ahol a kereslet nem negatív. Ennél a feladatnál nem a maximumelvet fogjuk használni, de a következő megoldáshoz úgy is el lehetne jutni.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[h\tilde{I}(t) + p_m P_m(t) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{\tilde{I}}(t) = P_m(t) - \left(S(t) - R(t) \right), \quad \tilde{I}(t_1) = \tilde{I}_1 ,$$

$$0 \le \tilde{I}(t), \quad P_m(t) \ge 0 .$$

Az algoritmus alapötlete, hogy megmunkálási rátának nullának kell lennie, ha a módosított kereslet negatív. Ebben az esetben a készletszint változása pozitív, azaz a készletszint nő. Ha a megmunkálási ráta pozitív lenne, akkor a készletszint növekedés nagyobb lenne és a megmunkálási szint nullán tartásával a célfüggvény alacsonyabb és a vállalat nem termel, amíg a készletszint megint nullára nem süllyed.

Először keressük meg annak az intervallumnak a kezdőpontjait, ahol a módosított kereslet negatív! Könnyű belátni, hogy a kumulált, módosított keresletnek maximum van és a kereslet szintje egyenlő nullával. Legyenek ezek a pontok $\{\tau_i\}_{i=1}^{n}$, és $\{\tau_i + \varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$ pontok pedig, ahol

a készletszint először éri el a nullát vagy a tervezési időszak végét, ha a készletszint egyáltalán nem éri el a nullát! Így az optimális megoldás:

$$\tilde{I}^0(t) = \begin{cases} I_{10} + I_{20} + \int_{t_1}^{t} \left(R(\tau) - S(\tau) \right) d\tau & I_{10} + I_{20} + \int_{t_1}^{t} \left(R(\tau) - S(\tau) \right) d\tau \ge 0 \\ 0 & t \in \left[\tau_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, \tau_i \right) \\ \int_{\tau_i}^{t} \left(R(\tau) - S(\tau) \right) d\tau & t \in \left[\tau_i, \tau_i + \varepsilon_i \right) \end{cases}$$

$$P_m^0(t) = \begin{cases} 0 & I_{10} + I_{20} + \int_{t_1}^{t} \left(R(\tau) - S(\tau) \right) d\tau \\ S(t) - R(t) & t \in \left[\tau_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, \tau_i \right) \\ 0 & t \in \left[\tau_i, \tau_i + \varepsilon_i \right) \end{cases}$$

4.1.F.3. függelék: A „fordított“ lineáris termelés-készletezési modell, általánosított kereslettel

Ez a feladat egy fordított, lineáris probléma általánosítása, ahol a módosított visszavételi ráta lehet negatív, ha a kereslet szintje nagyobb, mint a visszavételi ráta. A megoldás egy kicsit eltér azoktól az esetektől, ahol a visszavételi ráta nem negatív. Ennél a feladatnál nem a maximumelvet fogjuk használni, de a következő megoldáshoz úgy is el lehetne jutni. Mielőtt rátérünk a feladat megoldására, megadjuk a szükséges feltételt, ahhoz, hogy létezzen megoldás:

$$I_{10} + I_{20} + \int_{t_1}^{t} \left(R(\tau) - S(\tau)\right) d\tau \geq 0, \quad \forall t \in \left[t_1, t_2\right] \ .$$

Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a feladatnak nem létezik megoldása.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[h\tilde{I}(t) + p_d P_d(t)\right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{\tilde{I}}(t) = -P_d(t) + \left(R(t) - S(t)\right), \quad \tilde{I}(t_1) = \tilde{I}_1,$$

$$0 \leq \tilde{I}(t), \quad P_d(t) \geq 0.$$

Az algoritmus alapötlete, hogy a hulladékkezelési rátának nullának kell lennie, ha a módosított visszavételi ráta negatív. Ebben az esetben a készletszint változása pozitív, vagyis a készletszint nő. Ha a hulladékkezelési ráta pozitív lenne, akkor a készletszint növekedés magasabb lenne és a hulladékkezelés nullán tartásával a célfüggvény alacsonyabb és a vállalat nem végez hulladékkezelést addig, amíg a készletszint megint nullával nem egyenlő.

Most megismételjük a fenti algoritmust, de „fordítva“ (visszaáramlással)! Először keressük meg annak az intervallumnak a végpontját, ahol a módosított hulladékkezelési ráta pozitív! Könnyen belátható, hogy a kumulált, módosított visszavétel és a módosított visszavételi ráta egyenlő nullával. Legyenek ezek a pontok $\{\tau_i\}_{i=1}^{n}$, és $\{\tau_i - \varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$ azok a pontok, ahol a készletszint először eléri a nullát vagy a tervezési időszak elejét, ha a készletszint egyáltalán nem éri el a nullát! Így az optimális megoldás

$$\tilde{I}^0(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[\tau_{i-1}, \tau_i - \varepsilon_i\right) \\ \int_{\tau_i - \varepsilon_i}^{t} \left(R(\tau) - S(\tau)\right) d\tau & t \in \left[\tau_i - \varepsilon_i, \tau_i\right) \end{cases}$$

$$P_d^0(t) = \begin{cases} R(t) - S(t) & t \in \left[\tau_{i-1}, \tau_i - \varepsilon_i\right) \\ 0 & t \in \left[\tau_i - \varepsilon_i, \tau_i\right) \end{cases}$$

4.2. Optimális termelés-készletezési stratégia egy Arrow-Karlin típusú visszutas logisztikai rendszerben

4.2.1. Bevezetés

A determinisztikus, EOQ-típusú, egytermékes, kétraktáras visszutas logisztikai modelleket az irodalom széles körűen tanulmányozta (Schrady (1967), Richter (1996a, 1996b, 1997), Richter-Dobos (1999), Teunter (1998), Dobos-Richter (1999a, 1999b)). A kutatások az optimális paraméterek meghatározásra irányultak, előre adott irányítási rendszer feltételezése mellett. Az optimális stratégia szerkezetét eddig nem kutatták (Fleischmann et al. (1997)).

Jelen tanulmányunk célja, hogy a fent leírt, sajátos szerkezetű rendszerekben megtaláljuk az optimális készletezési stratégiát. Az EOQ-típusú rendszerek alapvetően statikus struktúrájúak, de cikkünkben dinamizálni fogjunk egy ilyen modellt. A kereslet, feltételezés szerint, egy ismert, adott tervezési időszakban folytonos függvény és a használt termékek visszavételi rátája egy adott konstans. A termékek felhasználása és visszaküldése között nem merül föl késés. Két raktárat vizsgálunk. A keresletet az 1. raktárból elégítik ki, ahol a megmunkált és újramegmunkált termékeket tárolják. A visszavett darabokat a 2. raktárban gyűjtik, majd újramegmunkálják őket. A teljes költséget a raktárak lineáris készlettartási költsége és a konvex, nem csökkenő megmunkálási és újramegmunkálási költségek alkotják.

A modellt felírhatjuk egy optimális irányítási feladatként, két állapot- (készletszint az 1. és a 2. raktárban) és két irányítási változóval (megmunkálási és újramegmunkálási ráta). A cél a raktárak összes készlettartási költségének és a megmunkálás és újramegmunkálás költségének minimalizálása. A modellünket, ebben a formában, tekinthetjük a jól ismert Arrow-Karlin (1958) modell általánosításának két raktárral.

4.2.2. A modell

Egy kétraktáras visszutas logisztikai modellt fogunk vizsgálni, folyamatos hulladékkezelés mellett. A következő paramétereket vezetjük be:

- T a tervezési időszak hossza,
- $S(t)$ a kereslet, folytonosan deriválható,
- r a visszavételi ráta a 2. raktárban ($0 \le r \le 1$),
- h_1 a készlettartási költség az 1. raktárban,
- h_2 a készlettartási költség az 2. raktárban,
- $F_m(P_m(t))$ a megmunkálás (gyártás) költsége, konvex, monotonon nem növekvő, kétszer folytonosan deriválható,
- $F_r(P_r(t))$ az újramegmunkálás költsége, monotonon nem növekvő, kétszer folytonosan deriválható.

Döntési változók:

- $I_1(t)$ készletszint az 1. raktárban,

- $I_2(t)$ készletszint a 2. raktárban,

- $P_r(t)$ újramegmunkálási ráta,

- $P_m(t)$ megmunkálási (termelési) ráta.

A modellt a következő alakban írhatjuk föl:

$$\int_0^T \left[\left\{ h_1 I_1(t) + F_m\left(P_m(t)\right) \right\} + \left\{ h_2 I_2(t) + F_r\left(P_r(t)\right) \right\} \right] dt \to \min \tag{4.2.1}$$

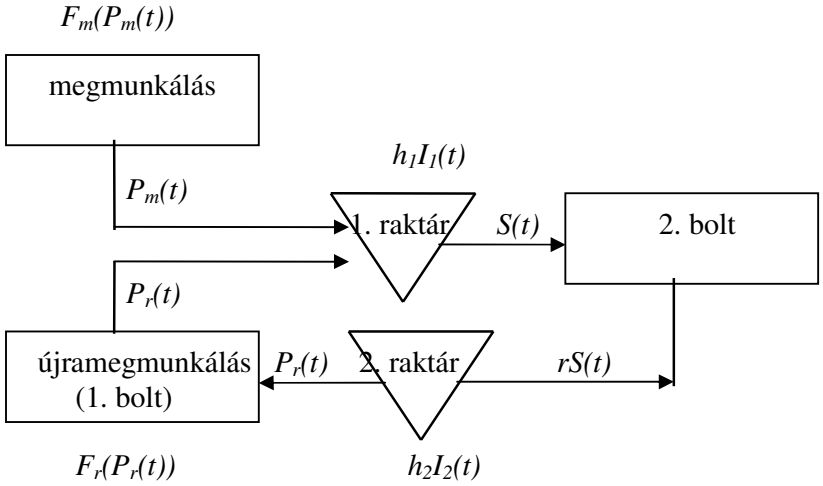
úgy, hogy

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1(t) \\ \dot{I}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ rS(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{10} \\ I_{20} \end{bmatrix}, \tag{4.2.2}$$

$$\begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.4}$$

Az anyagok és költségek áramlását a rendszerben az 4.2.1. ábra szemlélteti.



4.2.1. ábra Az anyagok és költségek áramlása a modellben

4.2.3. A modell néhány tulajdonsága

Először feltételezzük, hogy megoldottuk a problémát $P_r(t)$ és $I_2(t)$-re! Most az optimális termelési stratégia jellemzőit elemezzük. Egyszerű alakban írthatunk egy segédfeladatot, ha

összeadjuk az ismert újramegmunkálási ráta két differenciálegyenletét:

$$I_1(t) + I_2(t) = I_{10} + I_{20} + \int_0^t \left[P_m(\tau) - (1-r)S(\tau) \right] d\tau = \tilde{I}(t)$$

vagy

$$I_2(t) = \tilde{I}(t) - I_1(t) \geq 0 .$$

A feladat a következő alakot ölti:

$$\int_0^T \left[h_1 I_1(t) + F_m\left(P_m(t)\right) \right] dt + \int_0^T \left[h_2 I_2^0(t) + F_r\left(P_r^0(t)\right) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}_1(t) = P_m(t) - \left(S(t) - P_r^0(t) \right), \quad I_1(0) = I_{10} ,$$

$$0 \leq I_1(t) \leq \tilde{I}(t), \quad P_m(t) \geq 0$$

A feladat ebben a formában egy klasszikus Arrow-Karlin modell raktári kapacitás korláttal (Stöppler (1985), Feichtinger-Hartl (1986), Dobos (1990)), ahol a módosított kereslet egyenlő a kereslet és az újramegmunkálási ráta különbségével. Ez a különbség lehet negatív, de az ilyen típusú modellekre Arrow és Karlin módosított előrehaladó algoritmusa alkalmazható.

Most azt az esetet fogjuk megvizsgálni, amikor nincs szükség megmunkálásra, vagyis a megmunkálási ráta egyenlő nullával.

4.2.1. lemma. Ha $I_{10} + I_{20} - (1-r)\int_0^T S(t)dt \geq 0$, akkor nincs szükség megmunkálásra a kereslet kielégítéséhez: $P_m^0(t) = 0, \quad \forall t \in [0,T]$.

Bizonyítás: A relaxált feladat megoldása, akkor fog a megmunkálási rátára nullát adni, ha

$$I_{10} - \int_0^t \left[S(\tau) - P_r^0(\tau) \right] d\tau \geq 0, \quad \forall t \in [0,T] .$$

Azt feltételeztük, hogy megoldottuk a feladatot az újramegmunkálási rátára. Tehát igaz, hogy

$$I_{20} - \int_0^t \left[P_r^0(\tau) - rS(\tau) \right] d\tau \geq 0, \quad \forall t \in [0,T] .$$

Ha összeadjuk a fenti két egyenlőtlenséget a lemma állítását kapjuk.

A lemmát úgy értelmezhetjük, hogy a megmunkálásra akkor nincs szükség, ha az újonnan gyártott, újramegmunkált és visszavett áruk kezdeti készletének nagysága nagyobb, mint a teljes kereslet a tervezési időszakban, vagyis

$$I_{10} + I_{20} + r\int_0^T S(t)dt \geq \int_0^T S(t)dt .$$

Következőnek az optimális záró készletnagyságot vizsgáljuk.

4.2.2. lemma. Ha $I_{10} + I_{20} - (1-r)\int_0^T S(t)dt < 0$, akkor az optimális trajektróia: $I_1^0(T) = 0$.

Bizonyítás: A bizonyítás nyilvánvaló. Ha a készletszint a periódus végén nagyobb lenne, mint nulla, akkor a periódus végi újramegmunkálási rátát nullának választhatnánk, és ezzel egy jobb újramegmunkálási stratégiát érnénk el alacsonyabb költséggel.

Most tegyük föl, hogy ismerjük $P_m(t)$, optimális megmunkálási stratégiát! Így két segédfeladatot alkothatunk, amiket a már bevezetett $\tilde{I}(t)$ függvény segítségével írhatunk föl:

ha $h_1 \geq h_2$

$$\int_0^T \left[(h_1 - h_2)I_1(t) + F_r\left(P_r(t)\right)\right] dt + \int_0^T \left[h_2\tilde{I}(t) + F_m\left(P_m^0(t)\right)\right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}_1(t) = P_r(t) - \left(S(t) - P_m^0(t)\right), \quad I_1(0) = I_{10},$$

$$0 \leq I_1(t) \leq \tilde{I}(t),$$
$$P_r(t) \geq 0$$

és ha $h_1 < h_2$

$$\int_0^T \left[(h_2 - h_1)I_2(t) + F_r\left(P_r(t)\right)\right] dt + \int_0^T \left[h_1\tilde{I}(t) + F_m\left(P_m^0(t)\right)\right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}_2(t) = -P_r(t) + rS(t), \quad I_2(0) = I_{20},$$

$$0 \leq I_2(t) \leq \tilde{I}(t),$$
$$P_r(t) \geq 0$$

A fent leírtak segítségével jellemezhetjük az optimális újramegmunkálási stratégiát.

4.2.3. lemma. Ha $h_1 \geq h_2$ és $I_{10} - \int_0^T S(t)dt \geq 0$, akkor nincs szükség se megmunkálásra, se újramegmunkálásra a kereslet kielégítéséhez: $P_m^0(t) = 0,\ P_r^0(t) = 0, \quad \forall t \in [0,T]$.

A bizonyítás nyilvánvaló. Ha lineáris készlettartási költség az 1. raktárban nem kisebb, mint a másodikban, akkor a célfüggvény értéke akkor a legkisebb, ha a lehető legnagyobb, azaz induló 1. raktárbeli készletszintet folyamatosan csökkentjük. A lehető legalacsonyabb, nemnegatív készletértéket akkor érjük el, ha a újramegmunkálási ráta egyenlő nullával:

$$I_2^0(t) = I_{20} + r\int_0^t S(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

Ha a megmunkálási ráta egyenlő nullával, akkor az 4.2.1. lemmából

$$\tilde{I}^0(t) = I_{10} + I_{20} - (1-r)\int_0^t S(\tau)d\tau \geq 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Felhasználva a készletszintekre vonatkozó egyenlőtlenségeket

$$\tilde{I}^0(t) = I_{10} + I_{20} - (1-r)\int_0^t S(\tau)d\tau \geq I_{20} + r\int_0^t S(\tau)d\tau = I_2^0(t), \quad \forall t \in [0,T],$$

ami megegyezik az állítással. A lemma azt mutatja meg, hogy a vállalatnak a tervezési időszakban újramegmunkálást is kell végeznie, kivéve, ha a készlettartási költség az 1. raktárban magasabb, mint a 2. raktárban és a kezdeti készletszint az 1. raktárban elegendően nagy ahhoz, hogy kielégítse a keresletet a periódus alatt.

Vizsgáljuk meg az optimális záró készletnagyságot a 2. raktárban!

4.2.4. lemma. Ha $h_2 > h_1$ és $I_{10} - \int_0^T S(t)dt < 0$, akkor az optimális trajektóriában: $I_2^0(T) = 0$.

A lemma bizonyítása a „fordított" Arrow-Karlin modell optimalitási feltételeit követik. (Lásd a 4.2.F.1. függeléket.) Ha $h_1 \geq h_2$, akkor a záró készletszint a 2. raktárban szigorúan nagyobb lehet, mint nulla.

4.2.4. A modell megoldása

A feladat megoldásához a Pontrjagin-féle maximumelvet fogjuk alkalmazni (Feichtinger-Hartl (1986), Mangasarian (1966)). A probléma Hamilton-függvényét úgy írhatjuk föl, hogy

$$H(I_1(t), I_2(t), P_m(t), P_r(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t) =$$
$$-\left[h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + F_m(P_m(t)) + F_r(P_r(t))\right] + \left[\psi_1(t) \quad \psi_2(t)\right]\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ rS(t) \end{bmatrix}\right\}.$$

A feladat egy optimális irányítási probléma, ahol a korlátozások tisztán az állapotváltozókra jelentnek meg. Az optimalitás szükséges és elégséges feltételeinek meghatározására a Lagrange-függvényt alkalmazzuk:

$$L\left(I_1(t), I_2(t), P_m(t), P_r(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), t\right) =$$
$$-\left[h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + F_m\left(P_m(t)\right) + F_r\left(P_r(t)\right)\right] + \begin{bmatrix}\psi_1(t) & \psi_2(t)\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_m(t)\\ P_r(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-S(t)\\ rS(t)\end{bmatrix}\right\} +$$
$$+\begin{bmatrix}\lambda_1(t) & \lambda_2(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1(t)\\ I_2(t)\end{bmatrix}$$

Az optimalitás feltételeit a következő tétel írja le.

4.2.1. tétel. Ahhoz, hogy $\left\{I_1^0(t), I_2^0(t), P_m^0(t), P_r^0(t)\right\}$ az (4.2.1)-(4.2.4) feladat optimális megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy létezzen olyan folytonos $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$ függvény, ahol minden $0 \le t \le T$ időpontra azt kapjuk, hogy $\begin{bmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

(a)

$$\begin{bmatrix}\dot{\psi}_1(t)\\ \dot{\psi}_2(t)\end{bmatrix} = -\frac{\partial L\left(I_1^0(t), I_2^0(t), P_m^0(t), P_r^0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), t\right)}{\partial \begin{bmatrix}I_1(t)\\ I_2(t)\end{bmatrix}},$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{\psi}_1(t)\\ \dot{\psi}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}$$

(b)

$$\max_{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}P_m(t)\\ P_r(t)\end{bmatrix}} \left\{H\left(I_1^0(t), I_2^0(t), P_m(t), P_r(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t\right)\right\} =$$
$$H\left(I_1^0(t), I_2^0(t), P_m^0(t), P_r^0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{0 \le P_m(t)} \left\{\psi_1(t) P_m(t) - F_m\left(P_m(t)\right)\right\} = \\ \qquad \psi_1(t) P_m^0(t) - F_m\left(P_m^0(t)\right) \\ \max\limits_{0 \le P_r(t)} \left\{\left(\psi_1(t) - \psi_2(t)\right) P_r(t) - F_r\left(P_r(t)\right)\right\} = \\ \qquad \left(\psi_1(t) - \psi_2(t)\right) P_r^0(t) - F_r\left(P_r^0(t)\right) \end{cases},$$

(c)

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(t) & \lambda_2(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^0(t)\\ I_2^0(t)\end{bmatrix}=0,$$
$$\begin{bmatrix}\lambda_1(t) & \lambda_2(t)\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix}\psi_1(T) & \psi_2(T)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^0(T)\\ I_2^0(T)\end{bmatrix}=0.$$
$$\begin{bmatrix}\psi_1(T) & \psi_2(T)\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

A (b) feltételből kiindulva egyszerűsíthetjük az optimális megmunkálási és újramegmunkálási rátát:

$$P_m^0(t)=\begin{cases}0 & \psi_1(t)\leq F_m'(0)\\ \left[F_m'\right]^{-1}\left(\psi_1(t)\right) & \psi_1(t)=F_m'\left(P_m^0(t)\right)>F_m'(0)\end{cases}$$

és

$$P_r^0(t)=\begin{cases}0 & \psi_1(t)-\psi_2(t)\leq F_r'(0)\\ \left[F_r'\right]^{-1}\left(\psi_1(t)-\psi_2(t)\right) & \psi_1(t)-\psi_2(t)=F_r'\left(P_r^0(t)\right)>F_r'(0)\end{cases}.$$

A következő fejezetben meghatározzuk egy trajektória azon tartományait, ahol a megfelelő feltételek együttesen teljesülnek.

4.2.5. Az optimális trajektória tartományainak a meghatározása

Az optimális trajektória megszerkesztése előtt, vizsgáljuk meg a modell tartományait!

1. eset.: $I_1^0(t)>0,\quad I_2^0(t)>0,\quad t\in\left[t_1,t_2\right]$

Ebben az esetben $\lambda_1(t)$ és $\lambda_2(t)$ változó egyenlő nullával. Az adjungált változók differenciálegyenletei a következő alakot öltik:

$$\begin{bmatrix}\dot{\psi}_1(t)\\ \dot{\psi}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy a megmunkálási és újramegmunkálási ráta nagyobb, mint nulla! Ekkor az optimális rátákat úgy számolhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_1(t)-\psi_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_m'\left(P_m^0(t)\right)\\ F_r'\left(P_r^0(t)\right)\end{bmatrix}.$$

Ez utóbbi egyenlet deriválása után két differenciálegyenletet kapunk Ezzel megoldottuk a rátákra vonatkozó feladatot:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_1 - h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m''\left(P_m^0(t)\right)\dot{P}_m^0(t) \\ F_r''\left(P_r^0(t)\right)\dot{P}_r^0(t) \end{bmatrix},$$

vagy

$$\begin{aligned} \dot{P}_m^0(t) &= \frac{h_1}{F_m''\left(P_m^0(t)\right)} \\ \dot{P}_r^0(t) &= \frac{h_1 - h_2}{F_r''\left(P_r^0(t)\right)} \end{aligned} . \qquad (4.2.5)$$

Ha a kezdeti érték t_1 időpontban ismert, akkor a differenciálegyenletek megoldhatóak.

2 eset.: $I_1^0(t) = 0, \quad I_2^0(t) > 0, \quad t \in [t_1, t_2]$

Ebben az esetben $\lambda_1(t)$ változó nem kisebb, mint nulla, $\lambda_2(t)$ pedig egyenlő nullával. Az adjungált változók differenciálegyenletei a következő formát öltik:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - \lambda_1(t) \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

A megmunkálási és újramegmunkálási ráta összege egyenlő a kereslet szintjével. Ha feltételezzük, hogy a ráták nem negatívak, akkor az optimális értékeket úgy számolhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_1(t) - \psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m'\left(S(t) - P_r^0(t)\right) \\ F_r'\left(P_r^0(t)\right) \end{bmatrix},$$

ahol

$$P_m^0(t) = S(t) - P_r^0(t).$$

Az utolsó egyenletet deriválva két differenciálegyenletet kapunk. Ezzel megoldottuk a rátákra vonatkozó feladatot:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - \lambda_1(t) \\ h_1 - h_2 - \lambda_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m''\left(S(t) - P_r^0(t)\right)\left(\dot{S}(t) - \dot{P}_r^0(t)\right) \\ F_r''\left(P_r^0(t)\right)\dot{P}_r^0(t) \end{bmatrix},$$

vagy

$$\lambda_1(t) = h_1 - F_m''\left(S(t) - P_r^0(t)\right)\left(\dot{S}(t) - \dot{P}_r^0(t)\right) = h_1 - h_2 - F_r''\left(P_r^0(t)\right)\dot{P}_r^0(t) \geq 0.$$

Ebből a kifejezésből kapjuk a következő differenciálegyenletet az újramegmunkálási rátára:

$$\dot{P}_r^0(t) = \frac{F_m''\left(S(t) - P_r^0(t)\right)\dot{S}(t) - h_2}{F_m''\left(S(t) - P_r^0(t)\right) + F_r''\left(P_r^0(t)\right)}. \tag{4.2.6}$$

Ha ismerjük a kezdeti értéket t_1 időpontban, akkor a differenciálegyenlet megoldható.

3. eset: $I_1^0(t) > 0, \quad I_2^0(t) = 0, \quad t \in [t_1, t_2]$

Ebben az esetben $\lambda_2(t)$ változó nem kisebb, mint nulla, $\lambda_1(t)$ változó pedig egyenlő a nullával. Az adjungált változók differenciálegyenletei a következő alakban írhatóak föl:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 - \lambda_2(t) \end{bmatrix}.$$

Az újramegmunkálási ráta egyenlő a visszavételi rátával a 2. raktárban. Ha feltételezzük, hogy a megmunkálási és újramegmunkálási ráta nem negatív, akkor az optimális értékeket úgy számolhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_1(t) - \psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m'\left(P_r^0(t)\right) \\ F_r'\left(rS(t)\right) \end{bmatrix}.$$

Ha deriváljuk az utolsó egyenletet, akkor két differenciálegyenlethez jutunk. Ezzel megoldottuk a rátákra vonatkozó feladatot:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_1 - h_2 + \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m''\left(P_m^0(t)\right)\dot{P}_m^0(t) \\ F_r''\left(rS(t)\right)r\dot{S}(t) \end{bmatrix},$$

vagy

$$\dot{P}_m^0(t) = \frac{h_1}{F_m''\left(P_m^0(t)\right)},$$

és

$$\begin{aligned} &\lambda_2(t) = F_r''\left(rS(t)\right)r\dot{S}(t) - \left(h_1 - h_2\right) \geq 0, \\ &\dot{S}(t) \geq \frac{h_1 - h_2}{rF_r''\left(rS(t)\right)} \end{aligned}.$$

Ha ismerjük a kezdeti értéket t_1 időpontban, akkor a megmunkálási ráta differenciálegyenlete megoldható. Az újramegmunkálásra vonatkozó feltételt a kereslet alapján tudjuk ellenőrizni.

4.2.6. Egy előrehaladó algoritmus az optimális trajektória megszerkesztésére

Mielőtt alkalmaznánk az előrehaladó algoritmust, ellenőriznünk kell az 4.2.1. és 4.2.3. lemma eredményét. Tegyük föl, hogy a lemmák feltételei nem teljesülnek.

Egy módosított előrehaladó Arrow-Karlin-típusú algoritmust mutatunk be az optimális trajektória megszerkesztésére. Az algoritmus célja, hogy minimalizáljuk a készletszinteket, feltételezve, hogy azok egyik raktárra nézve sem negatívak. Három tartományt különböztethetünk meg, ahol a megfelelő feltételek egyszerre teljesülnek: a készletszint pozitív vagy egyenlő nullával az 1. raktárban vagy nulla a 2. raktárban. A három tartomány egymást követi.

Az első lépésben válasszunk egy kezdeti megoldást a raktárak készlettartási költségének függvényében! Először az (4.2.5) differenciálegyenletet oldjuk meg a kezdeti értékekkel:

$$\begin{aligned} P_m(0) &= P_{m0} \\ P_r(0) &= P_{r0} \end{aligned} .$$

1. eset: $h_1 \geq h_2$

A kezdeti P_{m0} értéket minimálisnak választjuk, úgy, hogy létezzen olyan időpont, amire az egyenlőség teljesül:

$$I_1(t) + I_2(t) = I_{10} + I_{20} + \int_0^t P_m^0(\tau, 0, P_{m0})d\tau - (1-r)\int_0^t S(\tau)d\tau \geq 0 \quad \forall t \in [0,T].$$

Utána P_{r0} s minimális értékét úgy állítjuk be, hogy létezzen egy olyan időpont, ahol tejesül, hogy

$$I_1(t) = I_{10} + \int_0^t P_r^0(\tau, 0, P_{r0})d\tau - \int_0^t \left(S(\tau) - P_m^0(\tau, 0, P_{m0})\right)d\tau \geq 0 \quad \forall t \in [0,T] \ .$$

Az algoritmusnak ezt a részét úgy magyarázhatjuk, hogy a kereslet kielégítése érdekében először a megmunkálás szükséges minimális mennyiségét definiálják, majd a szükséges, minimális újramegmunkálását.

2. eset: $h_1 < h_2$

P_{m0} kezdeti értéket is minimálisnak választjuk. Így létezik egy olyan időpont, amire teljesül a

$$I_1(t) + I_2(t) = I_{10} + I_{20} + \int_0^t P_m^0(\tau, 0, P_{m0})d\tau - (1-r)\int_0^t S(\tau)d\tau \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

egyenlőség.

Majd P_{r0} minimális értékét is meghatározzuk. Így létezik egy olyan időpont, amire teljesül, hogy

$$I_2(t) = I_{20} - \int_0^t P_r^0(\tau, 0, P_{r0})\, d\tau + r\int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \ .$$

Az algoritmus fenti részét hasonlóan magyarázhatjuk, mint korábban, de ebben az esetben a 2. raktárnál felmerülő magas készlettartási költségeket úgy kerülik el, hogy a keresletet a maximális mennyiségű újramegmunkálással elégítik ki.

A kezdeti megmunkálási és újramegmunkálási ráta megszerkesztése után nem tudunk különbséget tenni ezek között az esetek között, aszerint, hogy melyik raktárban magasabb a készlettartási költség. Így a készletszintet ezekre a kezdeti értékekre a következőképpen definiálhatjuk:

$$\left.\begin{aligned} I_1(t) &= I_{10} + \int_0^t P_m^0(\tau, 0, P_{m0}) d\tau + \int_0^t P_r^0(\tau, 0, P_{r0}) d\tau - \int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \\ I_2(t) &= I_{20} - \int_0^t P_r^0(\tau, 0, P_{r0}) d\tau + r\int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in [0, T],$$

ahol $P_m^0(t, 0, P_{m0})$ és $P_r^0(t, 0, P_{r0})$ függvény a differenciálegyenletek megoldása, P_{m0} és P_{r0} kezdeti értékekkel, 0 időpontban. Válasszuk a legkésőbbi olyan t_1, ahol az egyik készletszint nulla, vagyis $I_1(t_1)=0$ vagy $I_2(t)=0$! Ha ez az időpont T, a periódus vége, akkor elértük az optimális megoldást. Ha nem, akkor folytatjuk a következő lépéssel és az optimális megoldás $[0, t_1]$ intervallumon

$$\left.\begin{aligned} P_r^0(t) &= P_r^0(t, 0, P_{r0}) \\ P_m^0(t) &= P_m^0(t, 0, P_{m0}) \\ I_1^0(t) &= I_{10} + \int_0^t P_m^0(\tau, 0, P_{m0}) d\tau + \int_0^t P_r^0(\tau, 0, P_{r0}) d\tau - \int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \\ I_2^0(t) &= I_{20} - \int_0^t P_r^0(\tau, 0, P_{r0}) d\tau + r\int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in [0, t_1] \ .$$

A második lépésben a legkésőbbi t_2 időpontot választjuk a $[t_1, T]$ intervallumon, így vagy

$$\left.\begin{aligned} I_1(t) &= \int_{t_2}^t P_m^0\left(\tau, t_2, S(t_2) - P_r^0(t_2)\right) d\tau + \int_{t_2}^t P_r^0\left(\tau, t_2, P_r^0(t_2)\right) d\tau - \int_{t_2}^t S(\tau) d\tau \geq 0 \\ I_2(t) &= I_2^0(t_2) - \int_{t_2}^t P_r^0\left(\tau, t_2, P_r^0(t_2)\right) d\tau + r\int_{t_2}^t S(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned}\right\}, \quad \forall t \in [t_2, T]$$

vagy

$$\left.\begin{aligned} I_1(t) &= I_1^0(t_1) + \int_{t_2}^{t} P_m^0\left(\tau, t_1, P_m^0(t_1)\right) d\tau + \int_{t_2}^{t} P_r^0\left(\tau, t_2, rS(t_2)\right) d\tau - \int_{t_2}^{t} S(\tau) d\tau \geq 0 \\ I_2(t) &= -\int_{t_2}^{t} P_r^0\left(\tau, t_2, rS(t_2)\right) d\tau + r\int_{t_2}^{t} S(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned}\right\}, \quad \forall t \in [t_2, T]$$

és $[t_1,t_2]$ intervallumon az első eset optimális megoldása

$$\left.\begin{aligned} P_r^0(t) &= P_r^0\left(t, t_1, S(t_1) - P_r^0(t_1)\right) \\ P_m^0(t) &= S(t) - P_r^0(t) \\ I_1^0(t) &= 0 \\ I_2^0(t) &= I_2^0(t_1) - \int_0^t P_r^0\left(\tau, t_1, S(t_1) - P_r^0(t_1)\right) d\tau + r\int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in [t_1, t_2] \ ,$$

ahol $P_r^0\left(t, t_1, S(t_1) - P_r^0(t_1)\right)$ függvény a (4.2.6) egyenlet megoldása t_1 időpontban $S(t_1) - P_r^0(t_1)$ kezdeti értékkel

$$\left.\begin{aligned} P_r^0(t) &= rS(t) \\ P_m^0(t) &= P_m^0(t, 0, P_{m0}) \\ I_1^0(t) &= I_1^0(t_1) + \int_{t_2}^{t} P_m^0(\tau, 0, P_{m0}) d\tau - (1-r)\int_{t_2}^{t} S(\tau) d\tau \\ I_2^0(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Ahogy látható, a második lépésben ellenőrizzük, hogy az 1. vagy a 2. raktárban a készletszint egyenlő-e nullával. Ha az egyik záró készletszint nulla, akkor elértük az optimumot. Ha nem, akkor azt a legkésőbbi t_3 időpontot választjuk, ahol az egyik készletszint nulla és újra megismételjük a második lépést. Az optimális megoldás $[t_2,t_3]$ intervallumon lesz

$$\left.\begin{aligned} P_r^0(t) &= P_r^0\left(t, t_2, P_r^0(t_2)\right) \\ P_m^0(t) &= P_m^0\left(t, t_2, P_m^0(t_2)\right) \\ I_1^0(t) &= I_1^0(t_2) + \int_0^t P_m^0\left(\tau, t_2, P_m^0(t_2)\right) d\tau + \int_0^t P_r^0\left(\tau, t_2, P_r^0(t_2)\right) d\tau - \int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \\ I_2^0(t) &= I_2^0(t_2) - \int_0^t P_r^0\left(\tau, t_2, P_r^0(t_2)\right) d\tau + r\int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in [t_2, t_3] \ .$$

Így folytatva az algoritmust, megkapjuk az optimumot.

4.2.7. Következtetés

Tanulmányunkban egy visszutas logisztikai feladatot oldottunk meg. A megmunkálási és újramegmunkálási költségek konvexitása miatt az optimalitás szükséges feltételei egyben elégségesek is. A modell leírása után bemutattunk egy előrehaladó algoritmust az optimális trajektória megszerkesztésére, amelyet tekinthetünk az Arrow-Karlin előrehaladó algoritmus általánosításának. Továbbá azt is megmutattuk, hogy a visszutas logisztikai feladat viselkedését az újonnan gyártott és a visszavett termékek készlettartási költsége befolyásolja. Az újramegmunkálás irányítja a rendszer optimális útját, a megmunkálás szerepe pedig, hogy szélesítse a termelési lehetőségeket, ha a keresletet nem lehet kielégíteni a visszavett termékek újramegmunkálásából.

4.2.F.1. Függelék: A „fordított“ Arrow-Karlin modell

Egy módosított Arrow-Karlin modellt fogunk megoldani. Az Arrow-Karlin modell azt feltételezi, hogy a vállalat azért termel (beáramlás), hogy az ismert keresletet (kiáramlás) kielégítse. A visszutas logisztikai rendszerekben a beáramlás (visszaküldött termékek) ismert és a kiáramlás (újramegmunkálás vagy gyártás) a döntési változó. Ha feltételezzük, hogy a készlettartási költségek lineárisak és az újramegmunkálás költsége konvex, továbbá, hogy h_2-h_1 és a készletszintek nem negatívok, akkor a következő termelés (újramegmunkálás)-készletezési feladatot definiálhatjuk.

$$\int_0^T \left[(h_2 - h_1) I(t) + F_r\left(P_r(t)\right) \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}(t) = -P_r(t) + rS(t), \quad I(0) = I_0,$$

$$\begin{aligned} I(t) &\geq 0 \\ P_r(t) &\geq 0 \end{aligned}.$$

Ez egy konvex optimális irányítási feladat, ahol az állapotváltozó a készletszint és az irányítási változó az újramegmunkálási ráta. A modellt a Pontrjagin-féle maximumelv segítségével oldhatjuk meg. A konvexitás miatt a szükséges feltételek egyben elégségesek is. Az optimalitás feltételei:

(1) $\dot{\psi}(t) = (h_2 - h_1) - \lambda(t)$,

(2) $\max\limits_{P_r(t)\geq 0} \left\{ -\psi(t) P_r(t) - F_r\left(P_r(t)\right) \right\} = -\psi(t) P_r^0(t) - F_r\left(P_r^0(t)\right)$, i.e.

$$P_r^0(t) = \begin{cases} 0 & -\psi(t) \leq F_r'(0) \\ \left[F_r'\right]^{-1}\left(-\psi(t)\right) & -\psi(t) = F_r'\left(P_r^0(t)\right) > F_r'(0) \end{cases},$$

(3) $\left.\begin{aligned} \lambda(t) I^0(t) &= 0 \\ \lambda(t) &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in [0, T]$,

(4) $\psi(T) I^0(T) = 0, \quad \psi(T) \geq 0$.

A különbség az Arrow-Karlin modellhez képest, hogy itt az adjungált változó negatív.

Most írjuk le az optimális trajektóriát! Két tartományt különböztethetünk meg: az egyik, ahol a készletszint pozitív, a másik pedig, ahol egyenlő nullával.

(a) $I^0(t) > 0, \quad \lambda(t) = 0$

Ebben az esetben az (1) és (2) feltétel a következő alakot ölti, feltételezve, hogy az újramegmunkálási ráta nagyobb, mint nulla:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= (h_2 - h_1)\\ -\psi(t) &= F_r'\left(P_r^0(t)\right)\end{aligned}.$$

Deriváljuk a második egyenletet! A következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\dot{P}_r^0(t) = -\frac{h_2 - h_1}{F_r''\left(P_r^0(t)\right)}.$$

Ennek az egyenlet a jobb oldala negatív, mivel a számláló pozitív és a termelési költségfüggvény konvex. Ez azt mutatja, hogy a fordított Arrow-Karlin modellben az újramegmunkálási ráta monotonon nem csökkenő.

(b) $\quad I^0(t) = 0, \quad P_r^0(t) = rS(t) \quad \lambda(t) \geq 0$

Ebben az esetben az (1) és (2) feltétel a következő formában írható föl:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= (h_2 - h_1) - \lambda(t)\\ -\psi(t) &= F_r'(rS(t))\end{aligned}.$$

Deriváljuk a második egyenletet! A következő differenciál egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\begin{aligned}&\lambda(t) = rF_r''(rS(t))\dot{S}(t) + (h_2 - h_1) \geq 0,\\ &\dot{S}(t) \geq -\frac{h_2 - h_1}{rF_r''(rS(t))}\end{aligned}.$$

Azokon az intervallumokon, ahol az egyenlőtlenség teljesül, lehet a készletszint nulla.

Elméletileg előfordulhat, hogy az újramegmunkálás ráta nulla. Ebben az esetben a készletszint monoton nem csökkenő lenne és a periódus végén elérhetné a nulla szintet. Megmutattuk, hogy az újramegmunkálási ráta az optimális trajektóriában mindig pozitív.

4.2.F.1. Lemma. Nincs olyan intervallum az optimális megoldásban, amire $P_r^0(t) = 0$ és a záró készletszint is nulla.

Bizonyítás: Tegyük föl, hogy létezik egy olyan $[t_1,T]$ intervallum, ahol az újramegmunkálási ráta nulla optimális megoldás esetén, a készletek nagysága ismert és a készletszintek monotonitása miatt: $0 \leq I^0(t_1) < I^0(T)$. A készletszint t_1 és T között maximális, ha az újramegmunkálási ráta egyenlő nullával. Ekkor követhetünk egy másik újramegmunkálási stratégiát, alacsonyabb költséggel:

$$P_r(t) = \max_{P>0}\left\{ P \;\middle|\; I^0(t_1) - P(t-t_1) + r\int_{t_1}^{t} S(\tau)d\tau \geq 0,\, t \in [t_1 T] \right\} = \overline{P}\,,$$

és a készletszint ebben az esetben:

$$I(t) = I^0(t_1) - \overline{P}(t-t_1) + r\int_{t_1}^{t} S(\tau)d\tau, \quad t \in [t_1, T]\ .$$

Könnyen látható, hogy az új újramegmunkálási stratégia pozitív és az új készletszint alacsonyabb, mint az előző esetben. Hasonlítsuk össze a feltételezett optimális megoldást azzal, amit most szerkesztettünk.

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{T}\left[(h_2-h_1)I^0(t) + F_r(0)\right]dt - \int_{t_1}^{T}\left[(h_2-h_1)I(t) + F_r(\overline{P})\right]dt \geq \\
&\int_{t_1}^{T}\left[(h_2-h_1)\left(I^0(t) - I(t)\right) + F_r'(\overline{P})(0-\overline{P})\right]dt = \qquad\qquad , \\
&\int_{t_1}^{T}(h_2-h_1)\left(I^0(t) - I(t)\right)dt + F_r'(\overline{P})\left(I^0(T) - I(T)\right) > 0
\end{aligned}$$

Az utolsó integrál szigorúan nagyobb, mint nulla. Így bizonyítottuk az első állítást, vagyis az újramegmunkálási ráta nem lehet nulla az intervallumon. Ha a záró készletnagyság optimális megoldás esetén nem nulla lenne, akkor ennek az eljárásnak a segítségével mindig találnánk jobb megoldást. Ezzel bizonyítottuk a lemma második részét is.

A következőkben egy módosított előrehaladó Arrow-Karlin-típusú algoritmust mutatunk be az optimális trajektória megszerkesztésére. Az algoritmus célja, hogy minimalizálja a készletszintet, feltételezve, hogy az ismert. Ahogy azt már korábban láttuk, két olyan tartomány van, ahol a feltételek teljesülnek: a készletszintnek vagy pozitívnak, vagy nullának kell lennie. Ez a két tartomány egymást követi.

Az első lépésben feltételezzük, hogy történik újramegmunkálás. Majd megoldjuk a

$$\dot{P}_r^0(t) = -\frac{h_2 - h_1}{F_r''\left(P_r^0(t)\right)}$$

differenciálegyenletet,

$$P_r(0) = P_{r0}$$

kezdeti értékkel.

Ehhez a kezdeti értékhez tartozó készletszintet úgy definiálhatjuk, mint

$$I(t) = I_0 - \int_0^t P_r^0\left(\tau, 0, P_{r0}\right) d\tau + r\int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0, \quad \forall t \in \left[0, T\right] ,$$

ahol $P_r^0\left(\tau, 0, P_{r0}\right)$ függvény a differenciálegyenlet megoldása P_{r0} kezdeti értékkel 0 időpontban. A készletszint alacsonyabb lesz, ha a kezdeti érték növekszik. Toljuk el az értéket fölfelé addig, amíg nem létezik egy olyan időpont, ahol a készletszint nulla! Válasszuk a legkésőbbi t_1 időpontont, ahol a készletszint nulla, vagyis $I(t_1)=0$. Ha a legkésőbbi időpont T, a tervezési időszak vége, akkor elértük az optimális megoldást. Ha nem, akkor a következő lépéssel folytatjuk és az optimális megoldás $[0,t_1]$ intervallumon

$$\left.\begin{aligned} P_r^0(t) &= P_r^0\left(t, 0, P_{r0}\right) \\ I^0(t) &= I_0 - \int_0^t P_r^0\left(\tau, 0, P_{r0}\right) d\tau + r\int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in \left[0, t_1\right] .$$

A második lépésben kiválasztjuk t_2, legkésőbbi időpontot $[t_1,T]$ intervallumon, így

$$I(t) = -\int_{t_2}^t P_r^0\left(\tau, t_2, rS(t_2)\right) d\tau + r\int_{t_2}^t S(\tau) d\tau \geq 0, \quad \forall t \in \left[t_2, T\right]$$

és $[t_1,t_2]$ intervallumon az optimális megoldás

$$\begin{aligned} P_r^0(t) &= rS(t) \\ I^0(t) &= 0 \end{aligned} .$$

Látható, hogy a vizsgált intervallumon

$$\dot{S}(t) \geq -\frac{h_2 - h_1}{rF_r''\left(rS(t)\right)}$$

egyenlőségre teljesül.

Akkor érjük el az optimumot, ha az $I(T)$ záró készletszint nulla. Ha nem, akkor kiválasztjuk a legkésőbbi t_3 időpontot, ahol a készletszint nulla és újra megismételjük a második lépést. Az optimális megoldás $[t_2,t_3]$ intervallumon:

$$\left.\begin{aligned} P_r^0(t) &= P_r^0\left(t, t_2, rS(t_2)\right) \\ I^0(t) &= -\int_0^t P_r^0\left(\tau, t_2, rS(t_2)\right) d\tau + r\int_0^t S(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall t \in \left[t_2, t_3\right] .$$

Ugyanígy tovább folytatva az algoritmust eljutunk az optimumig.

4.3. Optimális termelés-készletezési stratégiák egy HMMS-típusú, visszutas logisztikai rendszerben

4.3.1. Bevezetés

A visszutas logisztika fogalma alatt az anyagok megmunkálását és a piacról visszaküldött (visszavett), újra használható anyagok újramegmunkálását értjük. A keresletet az újonnan megmunkált (gyártott) és az újramegmunkált termékek egyaránt kielégítik, nincs különbség a kétféle termék között. Annak érdekében, hogy ne terheljék a környezetet fölöslegesen vagy fogyasszák a természetes erőforrásokat, a használt termékeket újból felhasználják, amennyiben ez gazdaságos.

A determinisztikus egytermékes visszutas logisztikai rendszereket az optimális irányítás elméletének irodalma az utóbbi években széles körben vizsgálta. Az optimális irányítás az optimális trajektóriát írja le időben. A modern irányítás elmélet alkalmazásával kvalitatív információhoz juthatunk az optimális útról és az időbeli döntési szabályokról.

Minner és Kleber (1999) és Dobos (1999) lineáris visszutas logisztikai rendszereket vizsgáltak lineáris költségstruktúrával és hulladékkezeléssel. Tanulmányaikban arra jutottak, hogy az optimális megmunkálás-újramegmunkálási stratégia extremális. Ez azt jelenti, hogy az optimális trajektória mindig tartalmaz korlátozást vagy a készletszintre, vagy az irányítási változókra vonatkozóan. Hasonló eredményre jutott Kleber, Minner és Kiesmüller (2000) egy többszörösen újrahasznosító, lineáris költségstruktúrájú modell vizsgálata kapcsán.

Kistner és Dobos (2000), valamint Dobos és Kistner (2000) egy egytermékes visszutas logisztikai rendszert vizsgáltak, konvex megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési költséggel. Az előbbi cikk egy hulladékkezelés nélküli visszutas logisztikai modellt elemez, amelyet tekinthetünk az Arrow-Karlin (1958) modell egy többtermékes általánosításának. A tanulmány leírja az optimális utat és ad egy előre haladó algoritmust az optimális termelés-készletezési irányítási rendszer megszerkesztésére. Dobos és Kistner (2000) a konvex modellt, hulladékkezeléssel általánosította.

Jelen tanulmány célja, hogy megvizsgáljunk egy HMMS-típusú (Holt-Modigliani-Muth-Simon (1960)) visszutas logisztikai modellt. Feltételezzük, hogy a kereslet egy ismert, egy adott tervezési időszakban folytonos függvény és a használt termékek visszaküldési (visszavételi) rátája egy adott függvény. A termék használata és visszaküldése között konstans késés van. Két raktárt fogunk vizsgálni. A keresletet az 1. raktárból elégítik ki, ahol a megmunkált és újramegmunkált termékeket tárolják. A visszaküldött termékeket a 2. raktárban gyűjtik, amíg újramegmunkálásra kerülnek vagy a hulladékkezelőbe. A rendszer teljes költségét a két raktár négyzetes készlettartási költsége és a megmunkálás, újramegmunkálás és hulladékkezelés négyzetes költsége alkotja.

A cikk a következő felépítést követi. A második fejezetben bemutatjuk a modellt. A következő részben bevezetünk egy „fordított” HMMS rendszert. A 4. részben vezetjük le az optimalitás szükséges és elégséges feltételeit, majd bemutatjuk a modell néhány jellemzőjét. A 6. fejezetben egy számpéldát adunk az optimális trajektória szemléltetésére. Végül összefoglaljuk az eredményeinket.

4.3.2. A modell

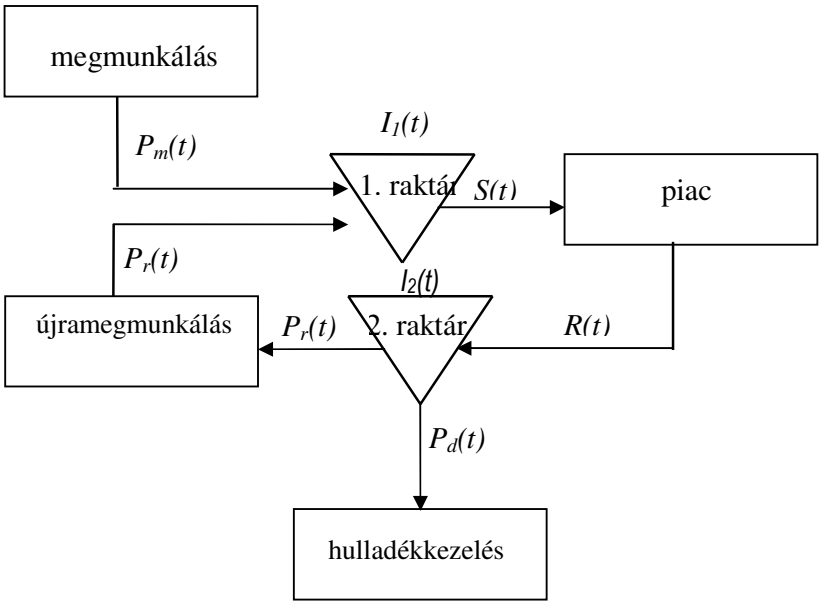
Egy kétraktáras visszutas logisztikai rendszert fogunk vizsgálni, ahol bármikor lehetőség van a hulladékkezelésre. A modellt felírhatjuk egy optimális irányítási feladatként, két állapot- (készletszint az 1. és a 2. raktárban) és három irányítási változóval (megmunkálási, újramegmunkálási, és hulladékkezelési ráta). A cél a raktárak összes készlettartási költségének és a megmunkálás, újramegmunkálás és hulladékkezelés költségének minimalizálása. A következő paramétereket alkalmazzuk a modellben:

- T a tervezési időszak hossza,
- $S(t)$ a kereslet, folytonosan deriválható,
- τ a visszavétel késése, nem negatív,
- r visszavételi arány a 2. raktárban ($0 \le r \le 1$)
- $R(t)$ visszavételi ráta, folytonosan deriválható, $R(t) = rS(t-\tau)$
- $\bar{I}_1(t)$ a készletnagyság célszintje az 1. raktárban,
- $\bar{I}_2(t)$ a készletnagyság célszintje az 2. raktárban,
- $\bar{P}_m(t)$ a megmunkálás célszintje,
- $\bar{P}_r(t)$ az újramegmunkálás célszintje,
- $\bar{P}_d(t)$ a hulladékkezelés célszintje,
- h_1 készlettartási koefficiens, 1. raktár,
- h_2 készlettartási koefficiens, 2. raktár,
- c_m a megmunkálás költség koefficiense
- c_r az újramegmunkálás költség koefficiense,
- c_d a hulladékkezelés költség koefficiense.

Döntési változók:

- $I_1(t)$ készletszint az 1. raktárban, nemnegatív,
- $I_2(t)$ készletszint a 2. raktárban, nemnegatív,
- $P_r(t)$ újramegmunkálási ráta, nemnegatív,
- $P_m(t)$ megmunkálási (termelési) ráta, nemnegatív,

- $P_d(t)$ hulladékkezelési ráta, nemnegatív.



4.3.1. ábra Anyagáramlás a modellben

A az anyagok és a költségek áramlását a modellben az 4.3.1. ábra szemléletei.

A modellt a következő alakban írhatjuk föl:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left[h_1\left(I_1(t)-\bar{I}_1(t)\right)^2 + h_2\left(I_2(t)-\bar{I}_2(t)\right)^2 \right] dt + \\ + \frac{1}{2}\int_0^T \left[c_m\left(P_m(t)-\bar{P}_m(t)\right)^2 + c_r\left(P_r(t)-\bar{P}_r(t)\right)^2 + c_d\left(P_d(t)-\bar{P}_d(t)\right)^2 \right] dt \to \min \tag{4.3.1}$$

úgy, hogy

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1(t) \\ \dot{I}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ R(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{10} \\ I_{20} \end{bmatrix}, \tag{4.3.2}$$

$$\begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.3.3}$$

$$\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3.4}$$

Mielőtt megoldanánk az (4.3.1)-(4.3.4) feladatot, bevezetjük a „fordított” HMMS-modellt. Erre azért van szükségünk, mert a klasszikus probléma nem foglalkozik visszavétellel vagy hulladékkezeléssel.

4.3.3. A „fordított” HMMS-modell

Egy módosított Holt-Modigliani-Muth-Simon modellt fogunk megoldani. A klasszikus HMMS feltevés, hogy a vállalat azért termel (beáramlás), hogy az ismert keresletet (kiáramlás) kielégítse. A visszutas logisztikai rendszerekben a beáramlás nagysága (a visszaküldött termékek) ismert és a kiáramlás (hulladékkezelés vagy újramegmunkálás) a döntési változó. Ha feltételezzük, hogy a készlettartási és újramegmunkálási költségek négyzetesek, továbbá *h* készlettartási és *c* termelési költségkoefficiens és a készletszint nem negatív, akkor a következő termelés (hulladékkezelés)-készletezési problémát definiálhatjuk:

$$\int_0^T \left[\frac{h}{2}\left(I(t)-\bar{I}(t)\right)^2 + \frac{c}{2}\left(P(t)-\bar{P}(t)\right)^2 \right] dt \to \min$$

úgy, hogy

$$\dot{I}(t) = -P(t) + \tilde{R}(t), \quad I(0) = I_0,$$

$$\begin{matrix} I(t) \geq 0 \\ P(t) \geq 0 \end{matrix},$$

ahol a döntési változók *I(t)* készletszint és *P(t)* termelési ráta, és a készletszint és a termelési ráta $\bar{I}(t)$ és $\bar{P}(t)$.

Ebben a formában a feladat az (4.3.1)-(4.3.4) modell részmodellje, azzal a feltételezéssel, hogy az újramegmunkálás irreleváns a döntés szempontjából. A beszerzési ráta, $\tilde{R}(t)$ egy folytonosan kétszer deriválható függvény.

Ez egy konvex irányítási probléma, ahol az állapot változó a készletszint és az irányítási változó a hulladékkezelési ráta. A feladatot a Pontrjagin-féle maximumelv segítségével oldhatjuk meg. A konvexitásból adódó előny, hogy a szükséges feltételek egyben elégségesek is. Az optimalitás feltételei (Feichtinger-Hartl (1986) vagy Seierstad-Sydsaeter (1987)):

a) $\dot{\psi}(t) = h\left(I^0(t) - \bar{I}(t)\right) - \lambda(t)$,

b) $\max\limits_{P(t)\geq 0}\left\{-\psi(t)P(t) - \frac{c}{2}\left(P(t)-\bar{P}(t)\right)^2\right\} = -\psi(t)P^0(t) - \frac{c}{2}\left(P^0(t)-\bar{P}(t)\right)^2$, i.e.

$$P^0(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{\psi(t)}{c} + \bar{P}(t) \leq 0 \\ -\frac{\psi(t)}{c} + \bar{P}(t) & -\frac{\psi(t)}{c} + \bar{P}(t) > 0 \end{cases},$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\lambda(t)I^0(t)=0\\ \lambda(t)\geq 0\end{array}\right\}\quad \forall t\in[0,T],$$

d) $$\begin{array}{l}\psi(T)=-c\left(P^0(T)-\overline{P}(T)\right)=0,\\ P^0(T)=\overline{P}(T).\end{array}.$$

Eltérés a HMMS-modellhez képest, hogy itt $\psi(t)$ adjungált változó negatív.

Most írjuk le az optimális trajektóriát! A következő lineáris differenciál egyenletrendszert megoldva az optimális készlettartási és termelési stratégiát kapjuk:

$$\begin{bmatrix}\dot{I}^0(t)\\ \dot{P}^0(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -\frac{h}{c} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I^0(t)\\ P^0(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{R}(t)\\ \frac{h}{c}\bar{I}(t)+\dot{\overline{P}}(t)\end{bmatrix},$$

és a kezdeti értékek

$$\begin{array}{l}I^0(0)=I_0\\ P^0(T)=\overline{P}(T)\end{array}.$$

Összefoglalásképpen megállapíthatjuk, hogy a „fordított” HMMS modell ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint a klasszikus. Különbség a kettő között, hogy „fordított” esetben a termelési (hulladékkezelési) ráta mindig pozitív és monotonon nem növő.

4.3.4. A modell megoldása

A feladat megoldásához a Pontrjagin-féle maximumelvet (Feichtinger-Hartl (1986) vagy Seierstad-Sydsaeter (1987)) fogjuk alkalmazni. A feladat Hamilton-függvénye a következő formában írható föl:

$$\begin{aligned}&H\left(I_1(t),I_2(t),P_m(t),P_r(t),P_r(t),\psi_1(t),\psi_2(t),t\right)=-\frac{1}{2}\left[h_1\left(I_1(t)-\bar{I}_1(t)\right)^2+h_2\left(I_2(t)-\bar{I}_2(t)\right)^2\right]\\ &-\frac{1}{2}\left[c_m\left(P_m(t)-\overline{P}_m(t)\right)^2+c_r\left(P_r(t)-\overline{P}_r(t)\right)^2+c_d\left(P_d(t)-\overline{P}_d(t)\right)^2\right]+\\ &+\left[\psi_1(t)\quad \psi_2(t)\right]\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_m(t)\\ P_r(t)\\ P_d(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-S(t)\\ R(t)\end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

Ez egy optimális irányítási probléma, ahol a korlátokat tisztán az állapot változók jelentik.

A Lagrange-függvény segítségével megkaphatjuk az optimalitás szükséges és elégséges feltételeit:

$$L\left(I_1(t), I_2(t), P_m(t), P_r(t), P_d(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t\right) =$$
$$-\frac{1}{2}\left[h_1\left(I_1(t)-\bar{I}_1(t)\right)^2 + h_2\left(I_2(t)-\bar{I}_2(t)\right)^2\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[c_m\left(P_m(t)-\overline{P}_m(t)\right)^2 + c_r\left(P_r(t)-\overline{P}_r(t)\right)^2 + c_d\left(P_d(t)-\overline{P}_d(t)\right)^2\right]+$$
$$+\left[\psi_1(t) \quad \psi_2(t)\right]\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_m(t)\\ P_r(t)\\ P_d(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-S(t)\\ R(t)\end{bmatrix}\right\}+\left[\lambda_1(t) \quad \lambda_2(t)\right]\begin{bmatrix}I_1(t)\\ I_2(t)\end{bmatrix}$$

4.3.1. tétel. Ahhoz, hogy $\left\{I_1^0(t), I_2^0(t), P_m^0(t), P_r^0(t), P_d^0(t)\right\}$ az (4.3.1)-(4.3.4) feladat optimális megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy létezzen olyan $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$ folytonos függvény, ahol minden $0 \le t \le T$ időpontra azt kapjuk, hogy $\begin{bmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

(a)

$$\begin{bmatrix}\dot{\psi}_1(t)\\ \dot{\psi}_2(t)\end{bmatrix} = -\frac{\partial L\left(I_1^0(t), I_2^0(t), P_m^0(t), P_r^0(t), P_d^0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), t\right)}{\partial\begin{bmatrix}I_1(t)\\ I_2(t)\end{bmatrix}},$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{\psi}_1(t)\\ \dot{\psi}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_1\left(I_1^0(t)-\bar{I}_1(t)\right)\\ h_2\left(I_2^0(t)-\bar{I}_2(t)\right)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}$$

(b)

$$\max_{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}P_m(t)\\ P_r(t)\\ P_d(t)\end{bmatrix}} \left\{H\left(I_1^0(t), I_2^0(t), P_m(t), P_r(t),, P_d(t)\psi_1(t), \psi_2(t), t\right)\right\} =,$$
$$H\left(I_1^0(t), I_2^0(t), P_m^0(t), P_r^0(t), P_d^0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), t\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{0 \le P_m(t)}\left\{\psi_1(t)P_m(t) - \frac{1}{2}c_m\left(P_m(t)-\overline{P}_m(t)\right)^2\right\} = \\ \qquad \psi_1(t)P_m^0(t) - \frac{1}{2}c_m\left(P_m^0(t)-\overline{P}_m(t)\right)^2 \\ \max\limits_{0 \le P_r(t)}\left\{\left(\psi_1(t)-\psi_2(t)\right)P_r(t) - \frac{1}{2}c_r\left(P_r(t)-\overline{P}_r(t)\right)^2\right\} = , \\ \qquad \left(\psi_1(t)-\psi_2(t)\right)P_r^0(t) - \frac{1}{2}c_r\left(P_r^0(t)-\overline{P}_r(t)\right)^2 \\ \max\limits_{0 \le P_d(t)}\left\{-\psi_2(t)P_d(t) - \frac{1}{2}c_d\left(P_d(t)-\overline{P}_d(t)\right)^2\right\} = \\ \qquad -\psi_2(t)P_d^0(t) - \frac{1}{2}c_d\left(P_d^0(t)-\overline{P}_d(t)\right)^2 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(t) & \lambda_2(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^0(t)\\ I_2^0(t)\end{bmatrix}=0,$$
$$\begin{bmatrix}\lambda_1(t) & \lambda_2(t)\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix}\psi_1(T)\\ \psi_2(T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_m\left(P_m^0(t)-\overline{P}_m(t)\right)\\ c_d\left(P_d^0(T)-\overline{P}_d(T)\right)\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\psi_1(T) & \psi_2(T)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^0(T)\\ I_2^0(T)\end{bmatrix}=0.$$

A (b) feltételből kiindulva az optimális megmunkálási és újramegmunkálási ráta felírható egyszerűbb alakban:

$$P_m^0(t)=\begin{cases}0 & \frac{1}{c_m}\psi_1(t)+\overline{P}_m(t)<0\\ \frac{1}{c_m}\psi_1(t)+\overline{P}_m(t) & \frac{1}{c_m}\psi_1(t)+\overline{P}_m(t)\geq 0\end{cases},$$

$$P_r^0(t)=\begin{cases}0 & \frac{1}{c_r}\left(\psi_1(t)-\psi_2(t)\right)+\overline{P}_r(t)<0\\ \frac{1}{c_r}\left(\psi_1(t)-\psi_2(t)\right)+\overline{P}_r(t) & \frac{1}{c_r}\left(\psi_1(t)-\psi_2(t)\right)+\overline{P}_r(t)\geq 0\end{cases}$$

és

$$P_d^0(t)=\begin{cases}0 & -\frac{1}{c_d}\psi_2(t)+\overline{P}_r(t)<0\\ -\frac{1}{c_d}\psi_2(t)+\overline{P}_r(t) & -\frac{1}{c_d}\psi_2(t)+\overline{P}_r(t)\geq 0\end{cases}$$

amelyek az optimális *lineáris döntési szabályok*.

Ha az optimális megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta a tervezési időszakban pozitív, akkor

$$\begin{aligned}\psi_1(t)&=c_m\left(P_m^0(t)-\overline{P}_m(t)\right)\\ \psi_1(t)-\psi_2(t)&=c_r\left(P_r^0(t)-\overline{P}_r(t)\right).\\ -\psi_2(t)&=c_d\left(P_d^0(t)-\overline{P}_d(t)\right)\end{aligned}$$

$\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$ adjungált változókat deriválva, majd az (4.3.1) feltételbe behelyettesítve a szükséges és elégséges feltételekből egy lineáris differenciál egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1^0(t) \\ \dot{I}_2^0(t) \\ \dot{P}_m^0(t) \\ \dot{P}_r^0(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{c_m - c_r - c_d}{c_d} \\ \dfrac{h_1}{c_m} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{h_1}{c_r} & -\dfrac{h_2}{c_m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1^0(t) \\ I_2^0(t) \\ P_m^0(t) \\ P_r^0(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -S(t) \\ R(t) + \dfrac{c_r - c_m}{c_d}\overline{P}_r - \overline{P}_d \\ \dot{\overline{P}}_m(t) - \dfrac{h_1}{c_m}\overline{I}_1 \\ \dot{\overline{P}}_r(t) - \dfrac{h_1}{c_r}\overline{I}_1 + \dfrac{h_2}{c_r}\overline{I}_2 \end{pmatrix},$$

a kezdeti értékekkel

$$\begin{pmatrix} I_1^0(0) \\ I_2^0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{10} \\ I_{20} \end{pmatrix},$$

és

$$\begin{pmatrix} P_m^0(T) \\ P_r^0(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{P}_m(T) \\ \overline{P}_r(T) \end{pmatrix}.$$

Az optimális hulladékkezelési rátát az optimális megmunkálási és újramegmunkálási ráta segítségével kaphatjuk, felhasználva a következő egyenlőséget:

$$P_d^0(t) = \overline{P}_d(t) + \frac{c_r}{c_d}\left(P_r^0(t) - \overline{P}_r(t)\right) - \frac{c_m}{c_d}\left(P_m^0(t) - \overline{P}_m(t)\right).$$

Az optimális megoldás elemzése után térjünk rá az optimális trajektória bemutatására!

4.3.5. A modell néhány jellemzője

4.3.1. lemma. A tervezési időszak belsejében mindig végeznek megmunkálást és hulladékkezelést.

A bizonyítás nyilvánvaló, rögtön következik az optimalitás feltételeiből. A lemmát úgy értelmezhetjük, hogy a megmunkálási és a hulladékkezelési ráta célszintje folyamatos megmunkálásra és hulladékkezelésre készteti a vállalatot.

4.3.2. lemma. Ha $I_{10} = \overline{I}_1(0)$ és $I_{20} = \overline{I}_2(0)$, és

$$\dot{\overline{I}}_1(t) = \overline{P}_m(t) + \overline{P}_r(t) - S(t)$$
$$\dot{\overline{I}}_2(t) = -\overline{P}_r(t) - \overline{P}_d(t) + R(t)$$

akkor a modell optimális költsége egyenlő a nullával és az optimális készletszintek és a megmunkálási, újramegmunkálási, hulladékkezelési ráta egyenlő a célszinttel:

$$\begin{bmatrix} I_1^0(t) \\ I_2^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{I}_1(t) \\ \overline{I}_2(t) \end{bmatrix},$$

és

$$\begin{bmatrix} P_m^0(t) \\ P_r^0(t) \\ P_d^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{P}_m(t) \\ \overline{P}_r(t) \\ \overline{P}_d(t) \end{bmatrix}$$

Bizonyítás. Alakítsuk át a modell differenciál egyenleteit

$$\begin{bmatrix} \left(\dot{I}_1(t) - \dot{\overline{I}}_1(t)\right) \\ \left(\dot{I}_2(t) - \dot{\overline{I}}_2(t)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(P_m(t) - \overline{P}_m(t)\right) + \left(P_r(t) - \overline{P}_r(t)\right) - \left(\dot{\overline{I}}_1(t) - \overline{P}_m(t) - \overline{P}_r(t) + S(t)\right) \\ -\left(P_r(t) - \overline{P}_r(t)\right) - \left(P_d(t) - \overline{P}_d(t)\right) + \left(-\dot{\overline{I}}_2(t) - \overline{P}_r(t) - \overline{P}_d(t) + R(t)\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{I}_{10} \\ \overline{I}_{20} \end{bmatrix}!$$

Látható, hogy a most kapott differenciál egyenlet jobb oldala nem függ a kereslettől és a visszavételi rátától. Ezzel bizonyítottuk a lemma állítását.

A lemma jelentése, hogy a minimális költséget úgy érhetjük el, ha a kezdeti készletszintek a raktárakban megegyeznek a kezdeti célszinttel és a készletek tervezett célszintje és a megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta célszintje összhangban van a kereslettel és a visszavételi rátával.

4.3.3. lemma. Ha nincs szükség újramegmunkálásra $t \in [t_1,t_2]$: $P_r^0(t) = 0$ intervallumon a kereslet kielégítéshez, akkor $c_m \overline{P}_m(t) + c_d \overline{P}_d(t) - c_r \overline{P}_r(t)$ kifejezés nem negatív az intervallumon.

Bizonyítás. A lemma ellenőrzéséhez az optimalitás szükséges és elégséges feltételeit fogjuk használni. Az 4.3.1. tétel (b) pontjából következik, hogy, ha a újramegmunkálási és a hulladékkezelési ráta pozitív, akkor

$$\begin{matrix} \psi_1(t) \geq -c_m \overline{P}_m(t) \\ \psi_2(t) \leq c_d \overline{P}_d(t) \end{matrix},$$

és ha az újramegmunkálási ráta egyenlő nullával, akkor

$$\psi_1(t) - \psi_2(t) \leq -c_r \overline{P}_r(t).$$

Ha a fenti kifejezéseket rendezzük, a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$-c_m \overline{P}_m(t) \leq \psi_1(t) \leq \psi_2(t) - c_r \overline{P}_r(t) \leq c_d \overline{P}_d(t) - c_r \overline{P}_r(t),$$

ami bizonyítja a lemma állítását.

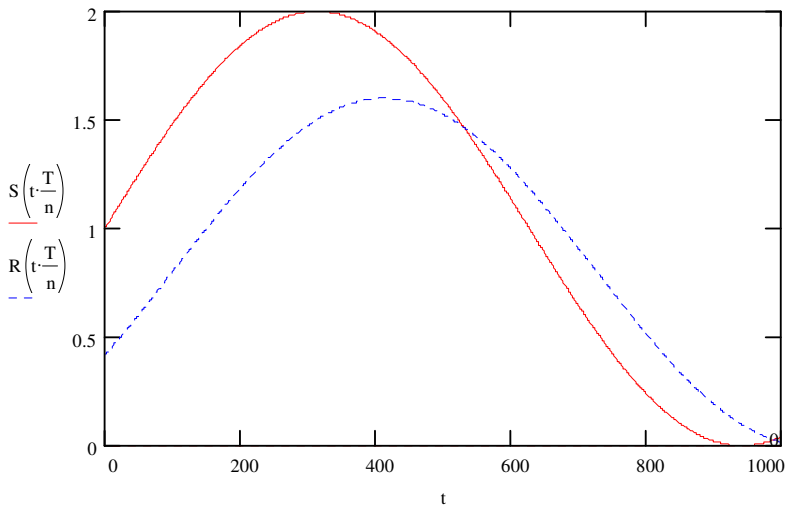
A lemma szükséges feltételeket ad arra az esetre, amikor a modellben nem fordul elő

újramegmunkálás. Ha a vállalat a célszintnek megfelelően végzi a megmunkálást, újramegmunkálást és hulladékkezelést, és ezen a szinten a megmunkálás és a hulladékkezelés költsége magasabb, mint az újramegmunkálásé, akkor az optimális megoldás az adott intervallumon az újramegmunkálás mellőzése.

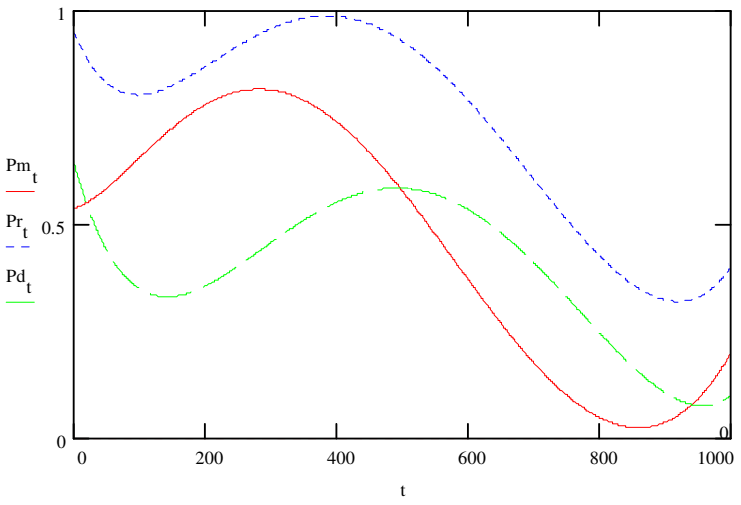
4.3.6. Számpéldák

Két példát fogunk bemutatni. A példákhoz használt adatok a cikk 4.3.F.1.függelékében találhatóak. Az első esetben azt feltételezzük, hogy a célszintek és a ráták konstansok, valamint a kereslet és a visszavételi ráta az idő szinuszos függvényei (lásd 4.3.2. ábra). A megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési rátára vonatkozó optimális stratégiát a 4.3.3. ábra szemlélteti. Látható, hogy az optimális stratégiák az idő szinuszos függvényeivé válnak és a kereslet formáját követik. Ezekben az esetekben a megmunkálási és újramegmunkálási ráta ugyanabba az irányba mozog, a keresletet követve. Ellentétben az előbbiekkel, a hulladékkezelési ráta a visszavételi rátához hasonlít. A készletszintek változása a keresletet és a visszavételi rátát követi.

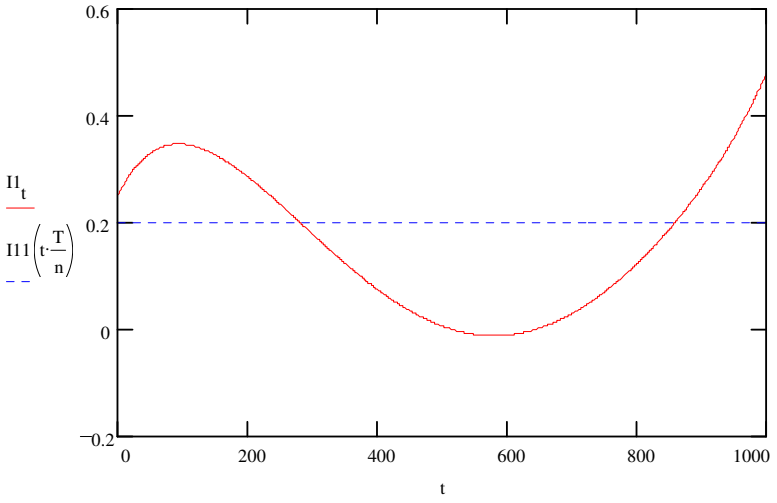
Ehhez a modellhez a 4.3.3. lemmát alkalmazhatjuk. Ez a próba azt mutatja, hogy $c_m \overline{P}_m(t) + c_d \overline{P}_d(t) - c_r \overline{P}_r(t)$ kifejezés negatív a tervezési időszakban, ami biztosítja, hogy az optimális megoldásban szerepel az újramegmunkálás is.



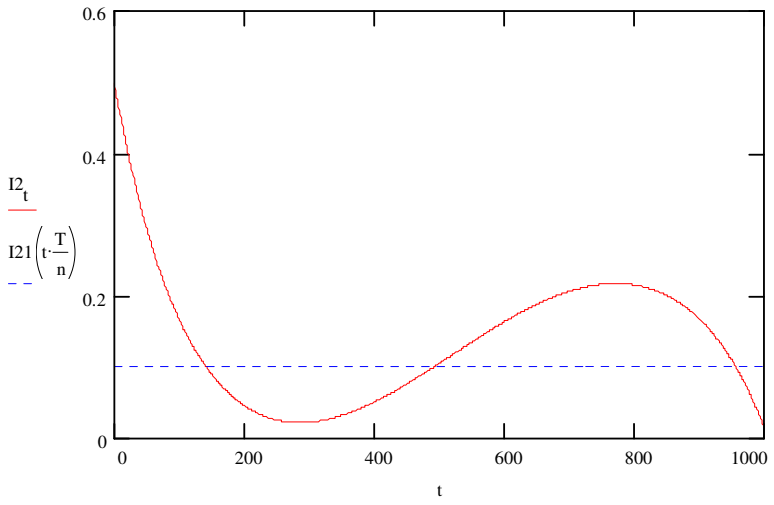
4.3.2. ábra A kereslet és visszavételi ráta az 1. példában



4.3.3. ábra Az optimális megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta az 1. példában



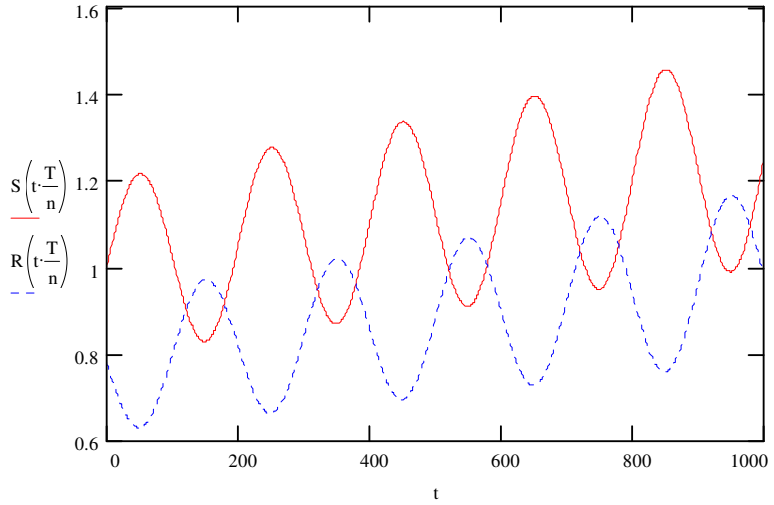
4.3.4. ábra A készletek optimális és célszintje az 1. raktárban, az 1. példában



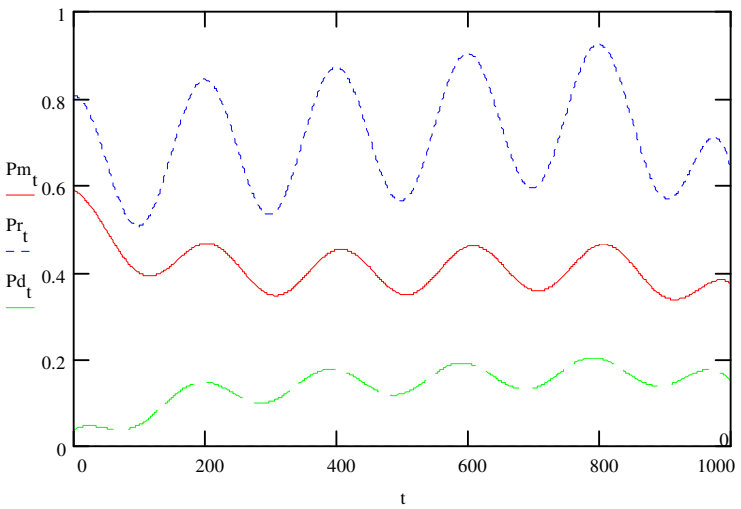
4.3.5. ábra A készletek optimális és célszintje az 2. raktárban, az 1. példában

A második példában (4.3.6. – 4.3.9. ábra) azt feltételezzük, hogy a megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta célszintje lineárisan nő. A kereslet szintén lineárisan nő, szezonális ingadozásokkal. Az eredményeink azt mutatják, hogy mindegyik ráta növekszik és a csúcsaik a kereslet maximumait és minimumait követik. Az újramegmunkálási ráta viszonylag stabilnak mutatkozik, kis ingadozásokkal. Az optimális készletszinteknek kisebb az ingadozása, mint a célszinté. Ez azt jelenti, hogy az optimális készletezési stratégia simítja a készletek célszintjét mindkét raktárban.

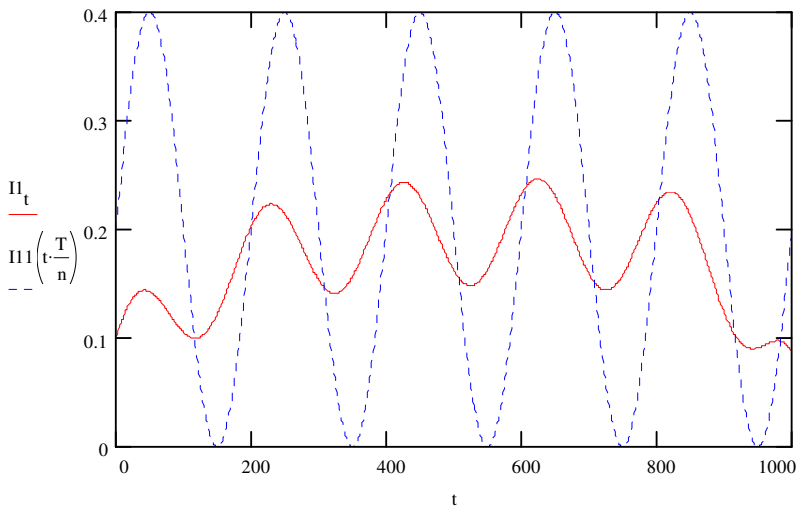
A 4.3.3. lemma próbája azt mutatja, hogy $c_m \overline{P}_m(t) + c_d \overline{P}_d(t) - c_r \overline{P}_r(t)$ kifejezés pozitív a tervezési időszakban. A feladat jó példa, arra, hogy ez a feltétel szükséges, de nem elégséges feltétele egy újramegmunkálás nélküli stratégia létezésének.



4.3.6. ábra A kereslet és visszavételi ráta a 2. példában

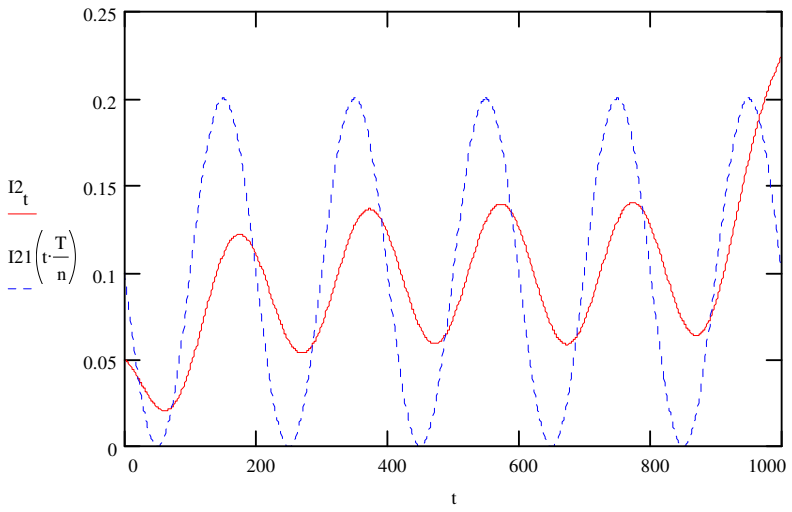


4.3.7. ábra Az optimális megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési ráta a 2. példában



4.3.8. ábra A készletek optimális és célszintje az 1. raktárban, az 2. példában

dc_177_11



4.3.9. ábra A készletek optimális és célszintje az 2. raktárban, az 2. példában

4.3.7. Következtetés

Tanulmányunkban egy visszutas logisztikai feladatot oldottunk meg. A megmunkálási, újramegmunkálási és hulladékkezelési költségek konvexitása miatt a szükséges feltételek egyben elégségesek is. Megmutattuk, hogy a HMMS modellben az optimális megmunkálás-hulladékkezelési stratégia irányítja a visszutas logisztikai rendszer mozgását. Az újramegmunkálás szintje a megmunkálási és a hulladékkezelési tevékenységtől függ. További kutatások témája lehet az optimális termelés-készletezési stratégia érzékenysége a visszavételi ráta változására. Szintén továbbgondolásra érdemes a döntési és előrejelzési horizont vizsgálata ebben a modellben. (Lásd Tompson és Sethi (1981).)

4.3.F.1. Függelék

Leírás	1. példa	2. példa
A tervezési időszak hossza: T	5	5
Kereslet: $S(t)$	$sin(t)+1$	$(1+0.05t)(1+0.2sin(2\pi t))$
Visszavételi ráta a 2. raktárban: r $(0 \le r \le 1)$	0.8	0.8
A visszavétel késése: τ	0.5	0.5
Visszavételi ráta: $R(t)=rS(t-\tau)$	$0.8sin(t-0.5)+0.8$	$0.8(0.975+0.05t)(1+0.2sin(2\pi t-\pi))$
Megmunkálási ráta célszintje: $\overline{P}_m(t)$	0.2	$0.3(1+0.05t)$
Újramegmunkálási ráta célszintje: $\overline{P}_r(t)$	0.4	$0.7(0+0.05t)$
Hulladékkezelési ráta célszintje: $\overline{P}_d(t)$	0.1	$0.2(1+0.05t)$
Készletnagyság célszintje 1. raktár: $\overline{I}_1(t)$	0.2	$0.2(1+sin(2\pi t))$
Készletnagyság célszintje 2. raktár: $\overline{I}_2(t)$	0.1	$0.1(1+sin(2\pi t-\pi))$
A megmunkálás költség koefficiense: c_m	0.5	0.5
Az újramegmunkálás költség koefficiense: c_r	1	0.3
A hulladékkezelés költség koefficiense: c_d	0.7	0.7
Készlettartási koefficiens, 1. raktár: h_1	1	1
Készlettartási koefficiens, 2. raktár : h_2	2	2

F.4.3.1. táblázat A példákhoz használt paraméterek leírása

5. Összefoglalás

A dolgozatban a vállalati reakciókat vizsgáltuk környezetvédelmi mellékfeltételek mellett. Az említett környezetvédelmi mellékfeltételek a kormányzati direkt és indirekt szabályozást, a szennyezési jogok alkalmazását és a használt termékek újrafelhasználását, azaz a visszutas logisztikát jelentették. A dolgozat modelljei nagyrészt dinamikus, időben zajló folyamatokat mutattak be, amelyhez az optimális irányítás módszerét alkalmaztuk.

A dolgozat első fejezetében azt mutattuk be, hogy a *vállalatgazdaságtani termeléselméletbe hogyan lehet beilleszteni a környezetvédelmi szempontokat*. A fejezet tudományos szempontból nem tartalmaz új megközelítést, hanem azt a német vállalatgazdaságtani irodalmat foglalja össze, amely a vállalati termelés környezeti vonzatait vizsgálja. Közgazdasági oldalról elemezve a problémát, nem történt más a németországi kutatásokban, mint a környezeti erőforrásokat, mint externáliákat internalizálták. Ezt azért tarottam fontosnak bemutatni, mert ez magyar nyelven még sehol sem került publikálásra. Másik oldalról, ez az bevezetés a később tárgyalt modellek elméleti alapjának fogható fel, még ha csak statikus szemléletben is.

A *kormányzati környezetvédelmi politika* vállalati termelésre gyakorolt hatását a második fejezetben mutattuk be. Ennek keretében a normatív és gazdasági szabályozás esetleges bevezetését tekintettük parciális modellekben, arra keresve a választ, hogy a kormányzati környezetvédelmi politika eléri-e a célját azzal, hogy az emissziós csúcsokat időben csökkenti. Azt láttuk be, hogy ezt a célt – a vállalati termelés simításán keresztül – a kormányzat eléri, függetlenül a költségfüggvény konkrét alakjától. Ez a kijelentés akkor is igaz lesz, ha egy kombinált normatív-gazdasági szabályozási eszközt alkalmaz a kormányzat. Azonban meg kell jegyezni, hogy ezek a környezeti szabályozási eszközök nem tekinthetők optimálisnak, piackonformaknak, mert a piac áralakító mechanizmusait kikapcsolják, ezzel az árakat eltérítik a racionális, hatékonyságot mérő nagyságuktól.

Az előbb említett hiányosságot pótló szabályozási mechanizmus lehet a *szennyezési jogok piacá*nak a bevezetése. Ezt a szabályozási módszert a harmadik fejezetben vizsgáltuk. Ez a módszer mindenképpen piackonformnak tekinthető, és a piaci áralakulást a szennyezések internalizálásán keresztül éri el, a szennyezéseket mintegy beárazva. Ez a piaci mechanizmus pedig – a várakozások szerint - odavezet, hogy azon termelők piaci előnybe kerülhetnek, amelyek technológiája környezetkímélőbb, és ezzel a szennyezési jogok eladásával többletbevételhez juthatnak. Vizsgálataink azt mutatták, hogy a vállalat reakciója ekkor is az, hogy simítja a termelését, ezzel a környezeti terhelést is.

A negyedik, utolsó fejezetben a *visszutas logisztiká*t elemeztük. A kérdés ezzel kapcsolatban úgy merül fel, hogy a termelés, újrafeldolgozás és hulladékkezelés tevékenységeit hogyan ütemezze a vállalat. Úgy is feltehetjük a kérdést, hogy mi legyen előbb: a termelés, vagy az újrafelhasználás, és mikor végezze a vállalat a hulladékkezelést. Ezen túl az is kérdésként merül fel, hogy az optimális termelési-készletezési stratégiákat hogyan állítsuk elő?

A bemutatott modellek nagyobbik része impaktfaktoros folyóiratokban jelent meg, és viszonylag jól hivatkozott.

Irodalomjegyzék

1. Arrow, K.J., Karlin, S. (1958): Production over time with increasing marginal costs, in: K.J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf (Eds.): Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford Univ. Press, Stanford, 1958, pp. 61-69.
2. Baumol, W.J., Oates, W.E. (1975): The theory of environmental policy: externalities, public outlays and the quality of life, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
3. Bensoussan, A., Proth,J.-M. (1984): Inventory planning in a deterministic environment: Continuous time model with concave costs, European Journal of Operational Research 15, 335-347
4. Cronshaw, M.B., Kruse, J.B. (1996): Regulated firms in pollution permit markets with banking, Journal of Regularory economics 9, 179-189
5. Cropper, M.L., Oates, W.E. (1992): Environmental economics: A survey, Journal of Economic Literature XXX, 675-740
6. Dethloff, J., Seelbach, H., (1998): Umweltorientierte Logistik, In: Hansmann, K.-W. (Hrsg.): Umweltorientierte Betriebswirtschaftslehre: Eine Einführung, 1998, Gabler, Wiesbaden, 145-190
7. Dinkelbach, W., Rosenberg, O. (1994): Erfolgs- und umweltorientierte Produktionstheorie, Springer, Berlin et al.
8. Dobos, I. (1990): The Modigliani-Hohn model with capacity and warehousing constraints, International Journal of Production Economics 24, 49-54
9. Dobos, I. (1991): The Modigliani-Hohn model with capacity and warehousing constraints, Int. J. of Production Economics, 24, 49-54
10. Dobos, I. (1996): Aggregate planning with continuous time, International Journal of Production Economics 43, 1-9
11. Dobos, I. (1998): Production-inventory control under environmental constraints, International Journal of Production Economics 56-57, 123-131
12. Dobos, I. (1999): Production strategies under environmental constraints in an Arrow-Karlin model, International Journal of Production Economics 59, 337-340
13. Dobos, I. (1999): Production-Inventory Strategies for a Linear Reverse Logistics System, Discussion Paper 431, Faculty of Economics and Business Administration, University Bielefeld.
14. Dobos, I. (2005): The effects of emission trading on production and inventories in the Arrow-Karlin model, Int. J. of Production Economics, 93-94, 301-308
15. Dobos, I., Kistner, K.-P. (1999): Optimal production-inventory startegies for a reverse logistics system, Discussion paper 429, University of Bielefeld, Faculty of Economics és Business Administration.
16. Dobos, I., Kistner, K.-P. (2000): Production-Inventory Control in a Reverse Logistics System, Proceedings of the 11th Int. Working Sem. On Prod. Econ., Igls/Innsbruck, 2000, Austria, Pre-Prints Vol. 2., 67-86
17. Dobos, I., Richter, K. (1999): A remanufacturing model reconsidered: A technical note, Discussion paper 128, Viadrina European University, Faculty of Economics és Business Administration.
18. Dobos, I., Richter, K. (1999): The number of batch sizes in a remanufacturing model, Discussion paper 132, Viadrina European University, Faculty of Economics és Business Administration.
19. Dyckhoff, H. (1992): Betriebliche Produktion - Theoretische Grundlagen einer umweltorientierten Produktionswirtschaft, Springer, Berlin et al.

20.Dyckhoff, H. (1993): Theoretische Grundlagen einer umweltorientierten Produktionswirtschaft, In: Wagner, G.R. (Hrsg.): Betriebswirtschaft und Umweltschutz, 1993, Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 81-105
21.Feichtinger, G., Hartl, R. (1986): Optimale Kontrolle Ökonomischer Prozesse, de Gruyter, Berlin
22.Feichtinger, G., Hartl, R.F. (1986): Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse: Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften, de Gruyter, Berlin
23.Feldmann, M. (2002): Handelbare Umweltzertifikate in der Linearen Aktivitätsanalyse, Zeitschrift für Betriebswirtschaft 72, 673-693
24.Field, B.C. (1997): Environmental economics: An introduction, 2. Ed., McGraw-Hill, Inc., New York et al.
25.Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J.M., Dekker, R., van der Laan, E.A., van Nunen, J.A.E.E., van Wassenhove, L.N. (1997): Quantitative models for reverse logistics: A review, European Journal of Operational Research 103, 1-17
26.Ghali, M.A. (2003): Production-planning horizon, production smoothing, and convexity of the cost function, Int. J. of Production Economics 81-82, 67-74
27.Girsanov, I.V. (1970): Lectures on Mathematical Theory of Extremal Problems, Moscow State University (in Russian)
28.Gutenberg, E. (1951, 1983): Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Erster Band: Die Produktion, 24. Aufl., Springer, Berlin
29.Holt, C.C., Modigliani, F., Muth, J.F., Simon, H.A. (1960): Planning Production, Inventories, and Work Forces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
30.Kamien, M.I., Schwartz, N.L. (1991): Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, North-Holland
31.Kerekes, S. (2007): A környezetgazdaságtan alapjai, Aula, Budapest
32.Kerekes, S., Szlávik, J. (1996): A környezeti menedzsment közgazdasági eszközei, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
33.Kistner, K.-P. (1983): Zur Erfassung von Umwelteinflüssen der Produktion in der linearen Aktivitätsanalyse, Wirtschaftswissenschaftliches Studium (WiSt) 12, 389-395
34.Kistner, K.-P. (1993): Produktions- und Kostentheorie, 2. Aufl., Physica-Verlag, Heidelberg
35.Kistner, K.-P., Dobos, I. (2000): Optimal Production-Inventory Strategies for a Reverse Logistics System, In: Dockner, E. J. , Hartl, R. F., Luptacik, M., Sorger, G. (Eds.): Optimization, Dynamics, and Economic Analysis: Essays in Honor of Gustav Feichtinger, Physica-Verlag, Heidelberg, New York, 246-258
36.Kistner, K.-P., Steven, M. (1993): Lineare Aktivitätsnalyse und Umweltschutz, In: Wagner, G.R. (Hrsg.): Betriebswirtschaft und Umweltschutz, 1993, Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 106-125
37.Kleber, R., Minner, S., Kiesmüller, G.P. (2000): Multiple Options in Dynamic Product Recovery Systems, Proceedings of the 11th Int. Working Sem. On Prod. Econ., Igls/Innsbruck, 2000, Austria, Pre-Prints Vol. 2., 147-166
38.Kling, C., Rubin, J. (1997): Bankable permits for the control of environmental pollution, Journal of Public Economics 64, 101-115
39.Koopmans, T.C. (1951): Analysis of production as an efficient combination of activities, In: Koopmans, T.C. (Ed.): Activity analysis of production and allocation, 1951, Wiley, New York, 33-97
40.Majláth, M. (2002): bemutató modell a piacosítható szennyezési jogok kereskedelmének költségekre, termelésre és szennyezőanyag-kibocsátásra gyakorolt hatásásról, 20. sz. Műhelytanulmány, Vállatgazdaságtan tanszék, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem

41.Mangasarian, O.L. (1966): Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems, Journal SIAM Control 4, 139-153
42.Mas-Collel, A., Whinston, M.D., Green, J.R. (1995): Microeconomic theory, Oxford University Press, New York et al.
43.Matschke, M.J., Jaeckel, U.D., Lemser, B. (1996): Betriebliche Umweltwirtschaft: Eine Einführung in die betriebliche Umweltökonomie und in Probleme ihrer Handhabung in der Praxis, Verlag Neue Wirtschafts-Briefe, Herne/Berlin
44.Minner, S., Kleber, R. (1999): Optimal Control of Production and Remanufacturing, Department of Production and Logistics, Faculty of Economics and Management, Otto-von-Guericke University of Magdeburg.
45.Montgomery, W.D. (1972): Markets in licenses and efficient pollution control programs, Journal of Economic Theory 5, 395-418
46.Richter, K. (1996): The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers, European Journal of Operational Research, 96, 313-324
47.Richter, K. (1996): The extended EOQ repair and waste disposal model, International Journal of Production Economics 45, 443-447
48.Richter, K. (1997): Pure és mixed strategies for the EOQ repair és waste disposal problem, OR Spektrum 19, 123-129
49.Richter, K., Dobos, I. (1999): Analysis of the EOQ repair and waste disposal problem with integer setup numbers, International Journal of Production Economics, 59, 463-467
50.Richter, K., Sombrutzki, M. (2000): Remanufacturing planning for the reverse Wagner/Whitin models, European Journal of Operational Research 121, 304-315
51.Schrady, D.A. (1967): A deterministic inventory model for repairable items, Naval Research Logistics Quarterly, 14, 391-398
52.Seelbach, H., Dethloff, J. (1998): Theoretische Grundlagen umweltorientierter Produktion, In: Hansmann, K.-W. (Hrsg.): Umweltorientierte Betriebswirtschaftslehre: Eine Einführung, 1998, Gabler, Wiesbaden, 19-76
53.Seierstad, A., Sydsaeter, K. (1987): Optimal control theory with economic applications, North-Holland, Amsterdam
54.Sethi, S.P., Thompson, G.L. (1981): Optimal Control Theory, Martinus Nijhoff Publ., Boston/The Hague/London
55.Stavins, R.N. (1995): Transaction costs and tradeable permits, Journal of Environmental Economics and Management 29, 133-148
56.Stöppler, S. (1985): Der Einfluss der Lagerkosten auf die Produktionsanpassung bei zyklischem Absatz, OR-Spektrum 7, 129-142
57.Teunter, R. (1998): Economic ordering quantities for remanufacturable item inventory systems, Working Paper; Preprint No. 31, Faculty of Economics és Management, Otto-von-Guericke University of Magdeburg.
58.Thompson, G.L., Sethi, S.P. (1980): Turnpike Horizons for Production Planning, Management Science 26, 229-241
59.Varian, H.L. (1991): Mikroökonómia középfokon: Egy modern megközelítés, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
60.Wagner, H.M., Whitin, T.M. (1958): Dynamic version of the economic lot size model, Management Science 5, 89-96
61.Wicke, L. (1993): Umweltökonomie: Eine praxisorientierte Einführung, 4. Aufl., Verlag Franz Vahlen, München
62.Wicke, L. Haasis, H.-D., Schaffhausen, F., Schulz, W. (1992): Betriebliche Umweltökonomie: Eine praxisorientierte Einführung, Franz Vahlen, München
63.Wirl, F. (1991): Evaluation of management strategies under environmental constraints, European Journal of Operational Research 55, 191-200

64. Wirl, F. (1995): Auswirkungen von Umweltsteuern auf die optimalen Produktionsstrategien in einem Modell der Produktion und Lagerhaltung, zfbf 47, 456-465
65. Xepapadeas, A.P. (1992): Environmental policy, adjustment costs, and behavior of the firm, Journal of Environmental Economics and Management 23, 258-275