

Válasz Dr. Michaletzky György opponensi véleményére

Először is megköszönöm a bíráló gondos munkáját, építő kritikai észrevételeit, kérdéseit. Köszönöm az összességében pozitív véleményét. Válaszaim a következők.

A bíráló kijelenti, hogy **feladatául azt tűzheti ki, hogy a bemutatott statisztikai eljárások jogosultsága, a belőlük levont következtetések helyessége alapján formálja meg véleményét.** Ezzel kapcsolatban komoly hiányérzete keletkezett, különösen azért, mert jelentősen elhagytam annak bemutatását, indoklását, hogy az egyes statisztikai eljárások alkalmazásának mik a feltételei. Ezt pontosan értem, és el is fogadom. Ugyanakkor az én feladatom és célkitűzésem az volt, hogy meteorológusok, döntően klimatológusok számára mutassak be modern matematikai statisztikai eszközöket és klimatológiai felhasználásukat úgy, hogy a matematikai részleteket a lehető legegyszerűbben és legrövidebben tárgyaljam, élve olyan elhanyagolásokkal is, melyek egy esetleges matematikus bíráló érthető rosszzallását válthatják ki. Azért gondoltam így, mert az értekezést az MTA Földtudományok Osztályához klimatológia szakterületen nyújtottam be. Tarthattam tehát attól, hogy a meteorológus opponensek és a bizottsági tagok a túlzott matematikai részletességért, a matematikai eszközök dominanciája miatt fognak kritikával illetni, azt pedig nem láthattam előre, hogy mindhárom opponensem matematikus lesz. Azért bocsátom előre mindezt, mert az opponens észrevételeinek jelentős része a most vázolt szándékom és a bíráló egyébként jogos felfogásának különbözőségéből fakad.

A felhasznált statisztikai eljárás Fernandez and Fernandez (2004) munkájára épít. Azonban ez a munka is pontosabban definiálja az alkalmazott modellben a hibasorozatra tett feltevést. A felhasznált statisztikai eljárást illetően Fan (1992), Fan (1993), Fan and Gijbels (1992), Simonoff (1996) hivatkozásokat teszek. Fernandez and Fernandez (2004) a sávszélesség becslésével kapcsolatban kerül említésre. A becslendő trendre rakódó hibasorozatot Fernandez and Fernandez (2004, 89. oldal) először elsőrendű autoregresszív folyamattal, majd általánosabb alakú modellel definiálja, amibe beletartozik az értekezésben vett p -edrendű autoregresszív folyamat. Úgy hittem, hogy ez az értekezés (1.4) formulája alatti sorokból világosan következik.

... a módszer leírásához mindenképpen hozzá kell, hogy tartozzék az is, hogy a trend becslése milyen statisztikai – esetleg aszimptotikus – tulajdonságokkal rendelkezik. Elismerem, valóban lehetett volna ezt a területet bemutatni. Nem látom azonban, hogy a későbbiek érvényességét ez mennyiben érintette volna egy klimatológus olvasó

számára. Az értekezés 1. ábrájának üzenete, hogy az elmúlt kb. 150 év felmelegedésének jellemzésére általánosan használt lineáris hőmérsékleti trend illesztése a tényleges trend fontos vonásait nem tárja fel. Ahogy az értekezésben is említem, az alapvető melegedő tendencia intenzitása nem állandó, sőt rövid időre kis lehűlés is beágyazódik.

Bántó pontatlanság a 8. oldal első bekezdésének végén megfogalmazott állítás...

A normalitás feltételezésének mellőzése nyilvánvaló hiba. Mentségül hadd említsem meg, hogy ez a hiba nem tudatlanságból, hanem figyelmetlenségből fakad, hiszen az értekezés egy másik részén már szót ejtek a Gauss-eloszlás feltételezéséről, amit egyébként a bíráló igen korrektül maga is megemlít. A figyelmetlenség oka bizonyára az, hogy a t-próba számtalan meteorológiai alkalmazása gyakran a normalitás hiányában történt, nem ritkán úgy, hogy ez említésre sem került. A 30 éves pályám során tehát kellőképpen hozzá szokhattam e helytelen gyakorlathoz, aminek folytán ezen a helyen reflexszerűen magam is elfeledkeztem a pontos fogalmazásról.

A dolgozat értelmezésében a szignifikánsan különbözik, azt jelenti, hogy jobb közelítést ad. Számomra a szignifikáns jelző statisztikai fogalom, melyhez szignifikancia-szint is tartozik. E kétség kívül pongyola megfogalmazás a 14. oldal 4. sorára vonatkozik, és az alatta lévő sorokban ismertetem, hogy ezt hogyan is kell érteni. Tisztában voltam tehát a helytelen terminológiával, de jobb szó nem jutott eszembe és reméltem, hogy a hozzáfűzött magyarázattal együtt elfogadhatóvá válik.

A sáv szélesség becslési tulajdonságainak ismeretében viszont ... Ezért ismét alkalmazható Fernandez and Fernandez (2004) módszere ... Nem meggyőző számomra ez a gondolatmenet. Itt a teljes trendet egy sima trend (nincs ugrás a deriváltjában) és a trend deriváltjának ugrásait leíró tag összegeként képzeljük el. A feladat a sima rész becsléséhez szükséges b_s sáv szélesség megadása. A gyakorlatban azonban nyilván nem tudjuk ketté bontani a teljes trendet. Ezért a teljes trend becslésének torzítását és szórását is viszonylag alacsony szinten tartó, a becslés átlagos négyzetes hibáját minimalizáló b sáv szélesség megadásának feladatához jutunk. Ha nincsenek ugrások, akkor természetesen $\hat{b}_s = \hat{b}$. Az ugrásos rész jelenlétében azonban $\hat{b}$ -nak kisebbnek kell lennie, mint $\hat{b}_s$, mert az ugrási pontok környezetében $\hat{b}_s$ a teljes trend becslésének túlzottan nagy torzítását szolgáltatná, hiszen $\hat{b}_s$ a sima részre vonatkozó optimális sáv szélesség. Ebből az következik, hogy $\hat{b} \leq \hat{b}_s$. Ez a gondolatmenet számomra meggyőzőnek tűnik, és ezt próbáltam az értekezésben is közölni; meglehet kevésbé világos fogalmazással.

... a 11 hosszúságú időorra számolt Mann-Kendall próbastatisztika eloszlása szerintem igen távol lehet az aszimptotikus eloszlástól. Számos helyen olvastam a Mann-

Kendall próbáról (például Önöz and Bayazit, 2003), és mindenütt azzal találkoztam, hogy a próbastatisztika tényleges eloszlása már 10 adattól kezdődően jól közelíthető, tehát helyettesíthető, az aszimptotikus eloszlásával. Jelen esetben ez az adathosszra vonatkozó feltétel, ha szűkösen is, de teljesül.

Nem lenne-e helyesebb a pollenszezon kezdete alapján, vagy esetleg a pollenszámok éves lefutása alapján megfeleltetni egymásnak az egyes évek napjait?

Mivel a pollenszezon hossza évről-évre változik, nem tudom, hogy egy adott év adott napjának koncentrációjához egy másik év mely napi koncentrációja lehetne ilyen módon hozzárendelhető. Esetleg a változó pollenszezonokat egy közös, mondjuk a nulla-egy, intervallumra lehetne átskálázni, és aztán ezt az intervallumot megfelelő számú részre felosztva, az egyes részintervallumokra lehetne kiszámítani a Mann-Kendall próbastatisztika értékét. Nem látom azonban, hogy ez mennyiben jelentene pontosabb közelítést. A pollenszezon beazonosítására ugyanis többféle definíció létezik, de egyik sem jelenti azt, hogy a kezdete előtt és a vége után csak azonosan nulla koncentrációk fordulnak elő.

Továbbá mi indokolja az AR(1) folyamat alkalmazását? Mivel az egymás utáni napok koncentrációi korrelálnak egymással, ezért logikusan várható, hogy a napi Mann-Kendall próbastatisztikák is korrelálnak. E korrelációkat, legegyszerűbb lehetőségként, a napi Mann-Kendall értékekhez illesztett AR(1) folyamat korrelációfüggvényével közelítettem.

Hogyan lehet beállítani a két lépcsős próba esetén az egyes szignifikancia-szintekhez alkalmazandó kritikus értékeket? Úgy érzem, hogy ez az értekezés 20. oldalának utolsó 5 és a 21. oldal első 6 sorában világosan le van írva. Ha mégsem, akkor a következőt fűzöm hozzá. Azon null-hipotézis mellett, hogy a pollenszezon egyetlen napján sincs az évek során trend, a napi Mann-Kendall értékek éves átlaga nulla várható értékű. Azt kell tehát megvizsgálni, hogy az említett átlag szignifikánsan különbözik-e nullától. A null-hipotézis teljesülése esetén a napi Mann-Kendall értékek éves átlaga jó közelítéssel normális eloszlású, nulla várható értékkel. Ha még az említett átlag szórását, illetőleg becslését is tudjuk, akkor a hipotézisvizsgálatnak nincs akadálya. Ezen átlag szórásnégyzete nyilván $1/n$ (n a pollenszezon napjainak száma) volna, ha a napi Mann-Kendall értékek nem korrelálnának. Korrelált esetben az

$$1/n^2 \sum_{i,j=1}^n B(i-j)$$

szórásnégyzet függ a napi Mann-Kendall értékek közötti $B(k), k = 1, \dots, n-1$ kovarianciáktól, amiket az illesztett AR(1) folyamathoz tartozó kovarianciákkal helyettesítettem. Itt persze hallgatólagosan feltételeztem, hogy az említett kovarianciák csak az időeltolástól függenek.

Nem túl lényeges, de vitatkoznom kell,... **Praktikus szempontból valóban csak a véges diszkrét spektrum, illetve az abszolút folytonos spektrum az érdekes, azonban elméleti szempontból a kijelentés pontatlan.** Éppen a praktikus szempontból kiindulva éreztem úgy, hogy némi pontatlanság a klimatológia, illetve klimatológusok szempontjából megengedhető.

A 35. oldal alján szerepel az a kijelentés, hogy... Ennek alapján a szerző közöl is egy képletet,... Ha jól látom, a szerző később nem használja ezt a spektrális sűrűségfüggvény becslési képletet, amely teljességgel eltér az irodalomban szokásosaktól. A képletet közvetlenül valóban nem használom, de ez teremti meg az alapját az alatta lévő (3.5) képletnek keresztül, az alkalmazott (3.6) képletnek. A „teljességgel eltér” megjegyzést vitatnom kell. Feltételezem, hogy az eltérést nem abban látja a bíráló, hogy periodogram és a sűrűségfüggvény becslésének négyzetes hibáját a négyzetes függvény argumentumaként tüntettem fel, hanem abban, hogy a spektrális sűrűségfüggvény becslése a periodogram elemek lokálisan lineáris simításaként van értelmezve. Ez az értelmezés cseppet sem szokatlan, a sok szóba jöhető hivatkozás közül hadd említsem *Fan and Yao (2003): Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods* 7.3.1 fejezetét.

... a 43. oldal közepén a szerző kijelenti, hogy a becsült Fourier-együtthatók kovarianciamátrixa aszimptotikusan ... a részleteket illetően utalva Matyasovszky cikkére... Ugyanakkor az idézett cikk nem tartalmaz erre az állításra vonatkozó matematikai levezetést. Ez sajnos valóban így van, rosszul emlékeztem. A hiányosságot az alábbiakban pótlom. A kérdés szoros kapcsolatban áll az L-S periodogram valószínűségi eloszlásának exponenciális eloszlással történő közelítésével. Legyen $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$, $t_1 = 1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = N$ egy nulla várható értékű stacionárius folyamatból származó idősor. A

$$z_{ij} = \begin{cases} \cos(\lambda t_i), & j = 1 \\ \sin(\lambda t_i), & j = 2 \end{cases}, \quad c_i = \begin{cases} a, & i = 1 \\ b, & i = 2 \end{cases}, \quad \underline{y} = (y(t_1), \dots, y(t_n))^T$$

jelölések mellett az értekezés $(\underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{Z}}) \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{y}}$ (3.15) egyenletrendszerének $\underline{\underline{c}}$ -re történő megoldásával az L-S periodogram $I(\lambda) = 1/(2\pi) \underline{\underline{c}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{c}}$ lesz a $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{Z}}$ jelölés mellett. A legkisebb négyzetek elméletétől következően igen általános feltételek mellett $\underline{\underline{c}}$ aszimptotikusan normális eloszlású $\underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{D}}^{-1}$ kovarianciamátrixszal. Az értekezésben szereplő aszimptotikus szó tehát erre utal. Az egyszerűség kedvéért elhagytuk a kifejezés λ -tól való függésének jelölését, továbbá pusztán a szóhasználat egyszerűsítése érdekében ezentúl tegyük fel, hogy $\underline{\underline{c}}$ pontosan normális eloszlású. Legyen $\underline{\underline{\eta}}$ egy nulla várható értékű két-

dimenziós normális eloszlású vektor valószínűségi változó $\underline{\underline{P}}$ kovarianciamátrixszal. Legyen $\underline{\underline{Q}}$ egy pozitív definit kétszer-kettes mátrix, és vegyük a $\xi = \underline{\eta}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\eta}$ valószínűségi változót. Yuan and Bentler (2010) alapján ξ két, egymástól független, egy szabadságfokú khi-négyzet eloszlású valószínűségi változó lineáris kombinációja, ahol a lineáris kombináció együtthatói a $\underline{\underline{QP}}$ mátrix μ_1, μ_2 sajátértékei. Ha a két sajátérték megegyezik ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$), akkor ξ exponenciális eloszlású lesz $1/(2\mu)$ paraméterrel. Ha a két sajátérték „nem nagyon” különbözik egymástól, akkor ξ jó közelítéssel exponenciális eloszlású $1/(\mu_1 + \mu_2)$ paraméterrel (Yuan and Bentler, 2010). Ugyanakkor ξ várható értéke például Mathai and Provost (1992) szerint a $\underline{\underline{QP}}$ mátrix nyoma, azaz $\mu_1 + \mu_2$. Nyilvánvaló, hogy $I(\lambda) = 1/(2\pi) \underline{c}^T \underline{\underline{Dc}}$ megfeleltethető ξ -nek az $\underline{\eta} = \underline{c}$, $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{BZD}}^{-1}$, $\underline{\underline{Q}} = 1/(2\pi) \underline{\underline{D}}$ jelölés mellett. Ezért egyrészt $E[I(\lambda)] = E[1/(2\pi) \underline{c}^T \underline{\underline{Dc}}] = \text{trace}(1/(2\pi) \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{BZD}}^{-1}) = \mu_1 + \mu_2$, másrészt $I(\lambda)$ jó közelítéssel exponenciális eloszlású, ha μ_1 és μ_2 „nem nagyon” különbözik egymástól. Észrevehetjük továbbá, hogy ha $\underline{c}$ kovarianciamátrixa $\pi k(\lambda) \underline{\underline{D}}^{-1}$ volna, ahol $k(\lambda) = \mu_1 + \mu_2$, akkor az $I(\lambda) = 1/(2\pi) \underline{c}^T \underline{\underline{Dc}}$ valószínűségi változó $1/(\mu_1 + \mu_2)$ paraméterű exponenciális eloszlású lenne, természetesen $\mu_1 + \mu_2$ várható értékkel. Végző soron tehát, ha μ_1 és μ_2 „nem nagyon” különbözik egymástól, akkor $\underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{BZD}}^{-1}$ helyett jó közelítéssel $\pi k(\lambda) \underline{\underline{D}}^{-1}$ írható. Ez a közelítés egyébként tökéletes, ha a szóban forgó $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ idősor fehérzaj folyamatból származik.

Már láttuk, hogy $E[I(\lambda)] = E[1/(2\pi) \underline{c}^T \underline{\underline{Dc}}] = \text{trace}(1/(2\pi) \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{BZD}}^{-1})$. Elemi trigonometrikus azonosságokat felhasználva, és a szóban forgó stacionárius folyamat $B(k)$ kovarianciafüggvényének páros voltát kihasználva írható, hogy

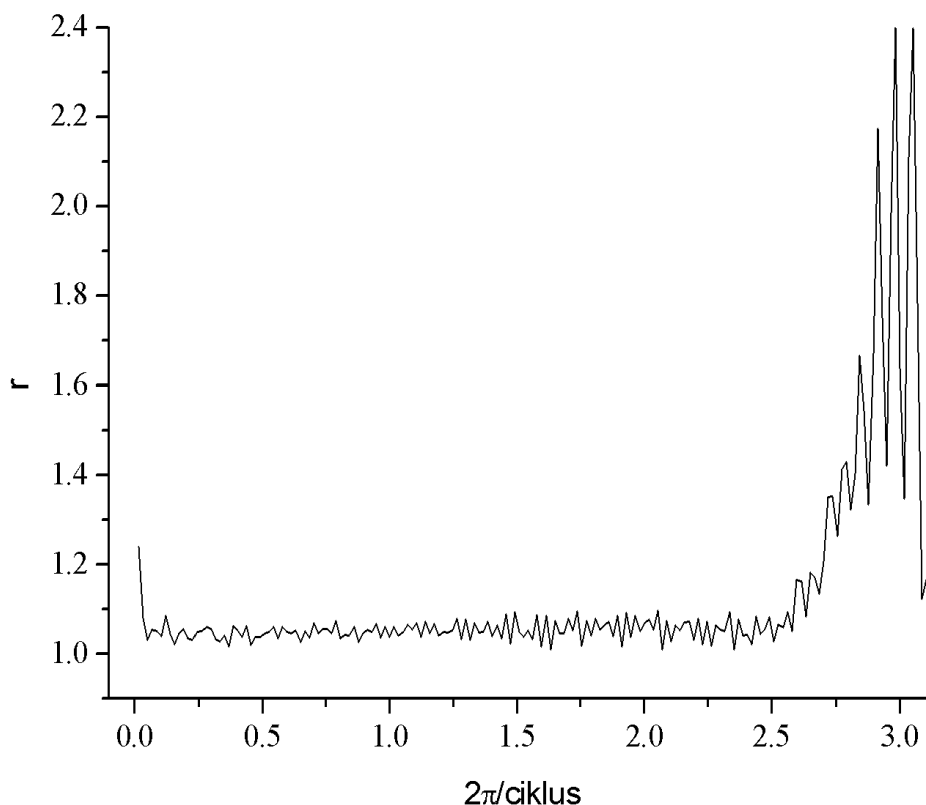
$$E[I(\lambda)] = \text{trace} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \underline{\underline{D}}_k \underline{\underline{D}}^{-1} B(k) \cos(\lambda k) \right),$$

ahol $\underline{\underline{D}}_k = \underline{\underline{S}}_k^T \underline{\underline{S}}_k$, továbbá $\underline{\underline{S}}_k$ i -edik sora $s_{k,i} = \alpha_i \alpha_{i+|k|} (\cos(\lambda i), \sin(\lambda i))$, $i = 1, \dots, N - |k|$, míg $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ egy indikátor sorozat, ami nulla vagy egy értéket vesz fel attól függően, hogy az i -edik időpontban van-e adat vagy sem. Újabb trigonometrikus azonosságok felhasználásával könnyű látni, hogy ekvidisztáns időbeli felbontás esetén ez a jól ismert

$$E[I(\lambda)] = B(0) / \pi + 2 / \pi \sum_{k=1}^{n-1} (1 - k/n) B(k) \cos(\lambda k)$$

formába megy át.

Most már csak azzal kell foglalkozni, hogy a μ_1 és μ_2 sajátértékek mennyire különböznek egymástól. Szerettem volna valamilyen összefüggést találni az L-S periodogram exponenciális eloszlással való közelíthetősége és a $B(k)$ kovarianciafüggvény viselkedése, továbbá a $t_1, \dots, t_n$ időpontok struktúrája között, de ez a feladat meghaladta matematikai tudásomat. Ezért arra szorítkoztam, hogy λ függvényében vizsgáltam az $r = \max\{\mu_1, \mu_2\} / \min\{\mu_1, \mu_2\}$ arányt az értekezésben szereplő két példa, továbbá egy friss tanulmányomban (Matyasovszky, 2014) szereplő harmadik példa esetében. Illusztrációul legyen itt a GISP2 Oxigén izotóp adatok esete (1. ábra). Jól látható, hogy az r arány egyhez közeli a kifejezetten magas frekvenciák kivételével.



1. ábra. Az $r = \max\{\mu_1, \mu_2\} / \min\{\mu_1, \mu_2\}$ arány a GISP2 Oxigén izotóp adatok esetén

Mivel Yuan and Bentler (2010) alapján körülbelül az $r=3$ értékig még pontos az exponenciális eloszlással való közelítés, az látszik, hogy minden frekvencia esetén jó (bár a magas

frekvenciákon romló) közelítéssel tekinthetjük az L-S periodogramot exponenciális eloszlásúnak. Sőt, az r arányok nagy többsége még az egészen magas frekvenciákon is jóval kettő alatti; mindössze öt, eléggé véletlenszerűnek tűnő frekvenciánál haladják meg ezt az értéket. E kirívó frekvenciák elhelyezkedése nyilván a $t_1, \dots, t_n$ időpontok elhelyezkedésétől függ. A további, itt most nem részletezett idősorok esetében hasonló tapasztalat szűrhető le. Az r kiszámítása során a $\underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{D}}^{-1}$ mátrixban szereplő $\underline{\underline{B}}$ kovarianciamátrix elemeit az idősorhoz illesztett AR(1) modell kovarianciafüggvényének megfelelő időeltolások melletti értékeivel helyettesítettem.

Milyen matematikai részletek érhetők el a matematikai szakirodalomban az izoton regressziónak a spektrál-sűrűségfüggvény való átvitelére vonatkozóan? Egyetlen ilyen jellegű tanulmánnyal találkoztam, ami azonban nem foglalja magában a robusztus becslést, nevezetesen: *Anewski and Soulier (2011): Monotone spectral density estimation. The Annals of Statistics 39, 418-438.*

... az autoregresszió rendje és a rezsimek száma Akaike nyomán becsülhető. Nem világos számomra, hogy miért? Mik azok a feltételek, amelyek ahhoz kellenek, hogy az AIC kritérium alkalmazható legyen és jelen esetben, hogyan teljesülnek ezek? Az AIC az értekezés (4.13) formulájával értelmezett alakja feltételezi, hogy a zaj a TAR modell minden rezsimjében független és azonos eloszlású normális eloszlású valószínűségi változók sorozata, továbbá az egyes rezsimek zajai függetlenek egymástól (például Tong and Lim, 1980). Bizonyára helytelen volt, hogy ezt nem említettem, mert bár az AIC kritérium alkalmazhatósági feltételeivel a matematikusok nyilvánvalóan tisztában vannak, de mindez valószínűleg sokkal kevésbé mondható el a klimatológia művelőiről. A feltételek teljesülésének elemzése azonban gyakran a matematikai munkákban is elmarad. Kiragadott estként hadd említsem, hogy ez a helyzet például Tong and Lim (1980) tanulmányával is, ahol az idősor elemzésben igen nevezetes kanadai róka adatokhoz egy TAR modell illesztése történt. Ugyanezt az adatsort vizsgálta korábban Tong (1977) és egy AR(11) modellt talált optimálisnak az AR modellek köréből az AIC kritérium alkalmazásával. Később azonban Tong (1990) leírja, hogy ezen adatsornál nem is teljesül a normalitás.

Ugyancsak hiányoltam pontosabb irodalmi hivatkozást a 66. oldal alján tett kijelentéssel kapcsolatban,... A formula számos helyen megtalálható, igaz megemlítve s gyakran hangsúlyozva (például Chan and Tong, 1990), hogy e formulával összefüggő statisztikai próba nem eléggé pontos, mert a küszöbparaméterek nem ismertek, hanem őket is becsülni kell. Az értekezésben szereplő példa esetében azonban ezt a próbát nem is

alkalmaztam, hanem Tsay (1998) módszerét követtem, amit az értekezés 77.-dik és 78.-dik oldalán említék is.

... a 76. oldal alján – egy idősor linearitásával kapcsolatban - tett megállapítás pontatlan. ... Az adódó modell nyilvánvalóan nem lesz ugyanaz, hiszen például a hibafolyamat az egyik esetben a múltbeli folyamatértékek függvénye, az idő megfordításával pedig a jövőbelieké. Azt a mondatomat, hogy „egy lineáris folyamat esetében a folyamat egy elemének az időben rákövetkező elemekkel való közelítése ugyanazt a modellt eredményezi, mint a megelőző elemekkel való közelítése” a következőképp értem. Vegyünk egy stacionárius folyamatból származó n hosszúságú idősort, amit $AR(p)$ modellel kívánunk leírni. Becsüljük a folyamat paramétereit (autoregresszív együtthatóit és a zaj varianciáját) az idő valóságos iránya szerint, majd tegyük ugyanezt az idő megfordításával. A paraméterek kétféle becslése csak az idősor első p számú és utolsó p számú adatainak különbözősége folytán fog különbözni. Ezért ha n sokkal nagyobb, mint p , akkor a kétféle modell paraméterei csaknem megegyeznek ($n \rightarrow \infty$ mellett határértékben megegyeznek). Hasonló azonban biztosan nem mondható el például az értekezésben tárgyalt NGRIP idősor nemlineáris modellezése esetében. A Dansgaard-Oeschger-események ugyanis rövid és nagy felmelegedéssel, majd jóval hosszabb visszahűléssel jellemezhetők. Az időskála megfordításával viszont a felmelegedést tapasztalnánk lassúnak és a lehűlést gyorsnak. Rögzített típusú nemlineáris modell esetében tehát a megfordított időskálán alapvetően más paraméterekkel rendelkező modellt kapnánk, mint az eredeti időskálán. Ezt, igaz kicsit másként megfogalmazva, az értekezésben is említtem a kifogásolt mondat után.

Bízva abban, hogy a bíráló kielégítőnek találja válaszomat, még egyszer megköszönöm a bírálat elkészítésére szánt idejét és munkáját.

Irodalom

- Chan KS, Tong H, 1990: On Likelihood Ratio Tests for Threshold Autoregression. J R Statist Soc B 52: 469-476.
- Mathai AM, Provost SB, 1992: Quadratic Forms in Random Variables. Taylor & Francis.
- Matyasovszky I, 2014: Estimating spectra of unevenly spaced climatological time series. Időjárás, Accepted.
- Önöz B, Bayazit M, 2003: The Power of Statistical Tests for Trend Detection. Turkish J Eng Env Sci 27: 247-251.
- Tong H, 1977: Some Comments on the Canadian lynx data. J R Statist Soc A 140: 432-436.
- Tong H, Lim KS, 1980: Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data. J R Statist Soc B 42: 245-292.
- Tong H, 1990: Non-linear Time Series. Calderon Press.

- Tsay RS, 1998: Testing and Modeling Multivariate Threshold Models. J Amer Statist Assoc 93: 1188-1202.
- Yuan K-H, Bentler PM, 2010: Two simple approximations to the distributions of quadratic forms. Br J Math Stat Psychol 63, 273-291.

2014. június 9.

Matyasovszky István