

Válasz Dr. Márkus László opponensi véleményére

Mindenekelőtt megköszönöm a bíráló igen alapos, gondos munkáját, konstruktív kritikai észrevételeit, kérdéseit. Köszönöm az összességében támogató döntését. Válaszaim a következők.

Először is meg kell említeni, hogy a kritikai észrevételek egy része olyan matematikai pontatlanságokkal, pongyolaságokkal kapcsolatosak, melyeket egy matematikusnak nyilvánvalóan szóvá kell tennie, de amelyek a meteorológiai, klimatológiai gyakorlatban elfogadhatók, sőt elfogadottak. Emlékeztetek rá, hogy az értekezést az MTA Földtudományok Osztályához klimatológia szakterületen nyújtottam be. Ezért a célkitűzésem az volt, hogy meteorológusok, döntően klimatológusok számára mutassak be modern matematikai statisztikai eszközöket és klimatológiai felhasználásukat úgy, hogy a matematikai részleteket a lehető legegyszerűbben és legrövidebben tárgyaljam, élve olyan elhanyagolásokkal is, melyek egy matematikus számára bántók. Tartottam ugyanis attól, hogy saját tudományom képviselői a túlzott matematikai részletességért, a matematikai eszközök dominanciája miatt fognak kritizálni.

34. oldal. Azt helyesen jegyzi meg a jelölt,...az azonban máát nem igaz, hogy a folytonos tagnak spektrálsűrűségfüggvénye is lenne, hiszen ehhez abszolút folytonosság kellene,.... Ez tipikusan olyan pontatlanság, amivel a válaszomat kezdtem. Itt hallgatólagosan nyilván feltételezzük az abszolút folytonosságot.

38. oldal. A 3.1.1 pontban a 38. oldalon leírt eljárás helyessége általánosságban számomra kérdéses:... a klasszikus becslések torzítása függ a spsf görbületéről is. ... A becslés szórása is függ az igazi spsf-től. Miért lehet e tényeket ignorálva a konstans spsf-re kapott kritikus tartományt alkalmazni más ismeretlen spsf esetére is? A szimuláció valóban egy konstans spsf-hez tartozó periodogrammal kapcsolatos, hiszen a $J(\lambda_i) = I(\lambda_i) / g(\lambda_i)$ normalizált periodogram olyan, mint egy fehérzajból származó periodogram. A szimuláció útján nyert $k(\lambda_i)$ kritikus értékhez azonban nem az $I(\lambda_i)$ periodogramot hasonlítom, hanem a $\hat{J}(\lambda_i) = I(\lambda_i) / \hat{g}(\lambda_i)$ becsült normalizált periodogramot, vagy másképp fogalmazva, az $I(\lambda_i)$ periodogramot $k(\lambda_i)\hat{g}(\lambda_i)$ -hez hasonlítom. Megjegyzem, hogy egyrészt $k(\lambda_i)$ most λ_i -től valójában nem függő k konstans, másrészt a szimulációs eljárással nyert k -val éppen a $\hat{g}(\lambda_i)$ szórását veszem figyelembe. Matyasovszky (2010a) ugyanis megmutatta, hogy a spektrális sűrűségnek a periodogram robusztus simításával

nyert becslésének aszimptotikus szórása a spektrális sűrűséggel arányos. A $\hat{g}(\lambda_i)$ torzításának figyelembevételével kétség kívül már nem tud mit kezdeni az eljárás, de ez a helyzet az ilyenkor szokásos, az ittenitől eltérő esetekben is. A probléma kényege ugyanis az, hogy a periodogram kritikus tartományának meghatározásakor ismerni kellene a valóságos $g(\lambda)$ spektrális sűrűséget. Mivel ez természetesen nem ismert, ezért őt most a periodogram robusztus simításával nyert becslésével helyettesítettem, ami valóban pontatlansághoz vezet. De minden ilyen jellegű vizsgálatban valamilyen feltételezéssel, valamilyen modellel kell élni $g(\lambda)$ -ra vonatkozóan, hiszen nem ismerjük. Ez rendszerint az idősorhoz illesztett AR(1) modell spektrális sűrűsége szokott lenni. Kérdés azonban, hogy ez mennyire jól közelíti a valóságos $g(\lambda)$ -t? Például a NAO index idősorának spektrális sűrűségének becslésére vonatkozó 9. ábra megkérdőjelezi az AR(1) spektrális sűrűség alkalmasságát. Ha tehát a tényleges $g(\lambda)$ helyett bármilyen alkalmasnak hitt függvényt veszünk, az ugyanúgy pontatlanságot jelent, mint az általam követett eljárás esetében.

39. oldal. 1. sor ... a jelölt figyelmét bizonyára elkerülte, hogy Kokoszka és Mikosh cikkében független azonos eloszlású sorozatokról beszélnek ..., és a jelölt helytelenül stacionárius folyamatok periodogramjára is használja, pedig arra érvénytelen. A cikk döntő része valóban független azonos eloszlású sorozatokról beszél. Ám a 6.2 fejezete lineáris folyamatokra vonatkozik. Az értekezésben szereplő igen általános feltételek melletti kitétel tehát a lineáris folyamatokra utal. Az idézett cikk 6.2 fejezetének utolsó képletéből arra gondoltam, hogy a cikk korábbi szakaszának eredményei probléma nélkül átvihetők lineáris folyamatokra, annál is inkább, mert a szerzők maguk fogalmaznak itt úgy, hogy a független azonos eloszlású sorozatokra nyert eredmények többsége átvihető lineáris folyamatokra. Azt azonban kétség kívül nem említik, hogy melyek igen és melyek nem. Viszont Davis and Mikosch (1999, 526. oldal) írja, hogy $\max_{1 \leq i \leq L} \{J(\lambda_i)\} - \ln L$ határeloszlása a standard Gumbel-eloszlás, legalábbis a lineáris folyamatok egy eléggé tág körére.

A periodogram csúcsainak vizsgálatakor ismert nehézség, hogy amennyiben ... Ezért a 6-7 sorban szereplő kijelentés nem helytálló, természetesen annak alkalmazása sem. Whittle valamint Grenander és Rosenblatt is vizsgálták e kérdést és javaslatot is tettek kezelésére, ez azonban különbözik jelöltétől. A periodogram legnagyobb csúcsának vizsgálata a klasszikus Fisher-teszttel történhet, ahol a $\max_{1 \leq i \leq L} \{J(\lambda_i)\} / \sum_{j=1}^L J(\lambda_j)$ próbastatisztika L paraméterű Fisher-eloszlású, ha egyáltalán nincsen diszkrét frekvencia. Itt két megjegyzést kell tenni. Az egyik az, hogy most ne nézzük, honnan ismerjük a

$J(\lambda_j) = I(\lambda_j) / g(\lambda_j)$ kifejezésben $g(\lambda_j) \rightarrow 0$. A másik az, hogy a teszt eredetileg gaussi fehérzajra vonatkozik, amikor $J(\lambda_j) / \sum_{j=1}^L J(\lambda_j) = I(\lambda_j) / \sum_{j=1}^L I(\lambda_j)$. A

$\max_{1 \leq i \leq L} \{J(\lambda_i)\} / \sum_{j=1}^L (J(\lambda_j) / L)$ aszimptotikus megfelelője az, hogy $\max_{1 \leq i \leq L} \{J(\lambda_i)\} - \ln L$

határeloszlása a standard Gumbel-eloszlás; lásd előző kérdés. A probléma a második legnagyobb periodogram elem vizsgálatkor kezdődik, ahogyan azt a bíráló jelzi. Legyenek

$J_{(1)}, J_{(2)}, \dots, J_{(L)}$ a $J(\lambda_i) / \sum_{j=1}^L J(\lambda_j)$ értékek csökkenő sorrendbe rendezve, illetve legyenek

$J^{(1)}, J^{(2)}, \dots, J^{(L)}$ a $J(\lambda_i)$ értékek csökkenő sorrendben. Két út kínálkozik. Az egyik, hogy a már kiválasztott $J_{(1)}$ értéket kirekesztjük a további vizsgálatból úgy, mintha nem is létezett volna, hiszen az őhöz járó frekvenciát már a diszkrét spektrumhoz soroltuk, és így a fennmaradó többi, egyelőre nem a diszkrét spektrumhoz tartozónak tekintett frekvenciával

dolgozunk tovább. Ekkor $J_{(2)} / \sum_{j=2}^L J_{(j)}$ $(L-1)$ paraméterű Fisher-eloszlásúnak tekinthető, ha

nincsen második diszkrét frekvencia. Ennek a Whittle által javasolt módszernek az aszimptotikus megfelelője az, hogy $J^{(2)} - \ln(L-1)$ határeloszlása a standard Gumbel-eloszlás.

Másik lehetőségként diszkrét frekvenciák hiánya mellett Grenander megadta $J_{(r)}$ valószínűségi

eloszlását, ami az r -edik periodogram elem (pontosabban: egyszerre az első r elem) tesztelésére szolgál. Ennek aszimptotikus megfelelőjét alkalmazom $J^{(r)}$ -re $r=2$ esetén az értekezésben,

amikor azt írom, hogy „vizsgáljuk a második legnagyobb normalizált periodogram értéket az ő határeloszlásával”. Ez a határeloszlás a $J^{(1)} - \ln L$ $(\max_{1 \leq i \leq L} \{J(\lambda_i)\} - \ln L)$ kifejezésre

vonatkozó standard Gumbel-eloszlásból megadható. A probléma az, hogy mindez csak akkor működik, ha határozott elképzelésünk van a diszkrét frekvenciák r számáról (ismerjük r -t), és akkor elegendő volna csupán $J_{(r)}$ -rel foglalkozni. A gyakorlatban azonban r rendszerint nem

ismert, ezért haladunk lépésről-lépésre ($r=1,2,\dots$) addig, amíg találunk diszkrét frekvenciát.

Végső soron úgy látom, hogy a bíráló olyan technika alkalmazását igényli tőlem, ami úgy tűnik, nem is létezik. Hiszen az általa említett Whittle vagy Grenander-módszer gyakorlati kivitelezése, mint láttuk, kritizálható, ráadásul éppen a Grenander-módszer aszimptotikus verzióját alkalmaztam.

41. oldal A Matyasovszky 2012b hivatkozás a jegyzékben nem található. A helyes hivatkozás a Matyasovszky (2013a). A 2012b egy korábbi esetre vonatkozott volna, amikor a cikk még nem volt kötetbe foglalva, hanem csak online módon volt elérhető.

44. oldal A null-hipotézis elfogadási tartományának meghatározása hibás. Itt sajnos olyan hibába estem, aminek inkább az ellenkezője történik velem. Nevezetesen, túlmagyaráztam egy dolgot, amit nem kellett volna, és így az egyébként szerencsétlen magyarázat félre vitte a lényegét. Nem kellett volna szerepelnie annak, hogy „E λ -tól függő kvantilis lesz azon null-hipotézis elfogadási tartománya az ε 100% szignifikancia-szint mellett, hogy az idősorból nyert periodogram az OLS-AR(1) spektrális sűrűségből származik”. A lényeg ugyanis mindössze a szimulációs eljárás leírása lett volna, és akkor világos lett volna az is, hogy szándékom szerint az egyes frekvenciákban külön-külön kerül összehasonlításra a periodogram és a frekvenciától függő, a szimulációs eljárással nyert kritikus tartomány.

45. oldal 3.1.3. Vörös zajként az irodalomban általában olyan folyamatot interpretálunk, amelyben a teljesítmény csökken a növekvő frekvencia mellett... Ezzel pontosan egyetértek, ám az észrevétel folytatása meglehetősen ellentmondásos. Először az szerepel, hogy **A jelen értekezés semmit nem mond arról, mit ért vörös zajon...** Ez nem így van, mert a 39. oldal alján írom, hogy „a vörös zaj azt jelenti, hogy az egyre kisebb frekvenciák egyre fontosabb szerepet játszanak a folyamat kialakításában, tehát a spektrális sűrűség a magas frekvenciák irányába monoton csökkenő”. Másrészt az szerepel, **hogy ... A jelölt publikációja (Matyasovszky 2013b) tartalmaz definíciót, de: ... az alapján a fenti AR(1) alosztályt tekinti csupán vörös zajnak.** Itt egyrészt nem tudom, hogy az említett cikk milyen definíciójára gondol a bíráló, másrészt nem csak a vörös zaj AR(1) alosztályát tekintem vörös zajnak a Matyasovszky (2013b) tanulmányban. Ennek épp az ellenkezője igaz. Az egész cikk lényege, és ez így van az értekezésben is, hogy a spektrális sűrűségfüggvény analitikus formájára tett feltételezés nélkül becsülöm a növekvő frekvenciák irányába monoton csökkenő spektrális sűrűséget. Éppen ezért tárgyalom az izoton regressziót a 3.1.3. fejezetben és alkalmazom a 3.2.4. fejezetben.

45. oldal A lineáris folyamat szokásos definíciójában szereplő zaj független értékű, tehát nem egyszerűen korrelálatlan ... Ez valóban így van. Ugyanakkor az itt következő eredmények, például a (3.24) formula, már korrelálatlan esetben is igaz. Általában a különböző modelleket próbáltam (mint más is) a legáltalánosabb módon értelmezni, ezért szerepel például az AR folyamat definíciójában is a zaj pusztán korrelálatlansága (pl. Box and Jenkins, 1970). Ennek persze az ára az, hogy az értekezés azon részeiben, ahol a korrelálatlanság megkövetelése nem elég, ott mindenütt említeni kellett volna a függetlenséget.

Ennek elmulasztása matematikailag hiba, de ismét a válaszom kezdő megjegyzésére kell utalnom: nem kívántam a klimatológus olvasókat a számukra valószínűleg aprónak tűnő eltérések ismételtesével terhelni.

45. oldal A (3.24) képlet szerintem hibás a közölt általánosságban. ... valószínűleg a generáló zajok azonos eloszlása is kell, e feltétel meglétét viszont szerintem a további alkalmazás során ellenőrizni kell. A képlet önmagában helyes, de előtte

három sorral az $Y_t^{(a)} = aY_{t-1}^{(a)} + e_t^{(a)}$ értelmezésénél sajnos lemaradt, hogy

$e_t^{(a)} = (1 - a^2)^{1/2} \rho^{1/2} \cdot e_t$, ahol ρ definíciója (3.24) után azonnal következik ($\rho = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^2$). Az

$e_t^{(a)}$ zaj tehát az e_t zaj olyan konstansszorosa, hogy Y_t és $Y_t^{(a)}$ szórása megegyezzek, hiszen Y_t -t $Y_t^{(a)}$ -val próbáljuk közelíteni. Az, hogy $e_t^{(a)}$ és e_t tekinthető egymás konstansszorosainak Galbraith and Zinde-Walsh (2002) 2.1. fejezetéből látható. A (3.24) formula további alkalmazásáról egyébként nincsen szó, hanem egy lineáris folyamatnak egy AR(1) folyamattal történő közelítésének kérdésére kívánok rávilágítani, megalapozva ezzel a spektrális sűrűségnek a periodogram izoton regresszióval történő becslését.

52. oldal 13. sor „Az adatokat standardizáltuk” ... ez szerintem nem hasznos lépés, bár a periodicitás vizsgálatot kétségtelenül nem rontja el.... Matematikai szempontból semmi szükség a standardizálásra, ám az éghajlati adatsorokat a klimatológusok nagyon gyakran centrálják (anomáliaképzés), sőt standardizálják, amitől az adatsor vizuális megjelenésének szemléletesebbé válását remélik. Tehát egyszerűen követtem a klimatológiai tradíciót.

55. oldal 4. sor „... enyhe, de szignifikáns csúcs ...”. Mint a 39. oldalon tett megjegyzésem mutatja, nem ismerjük a periodogram sokadik csúcsának eloszlását, ezért nem értem, milyen értelemben „szignifikáns” ... Itt nem a periodogram valahányadik csúcsáról van szó, mert akkor ezt a frekvenciát nem volna érdemes említeni, ugyanis itt a sokadik csúcs lép fel. A megfogalmazás azt jelenti, hogy a 44. oldalon ismertetett módon meghatározott frekvenciafüggő kritikus értéket az adott periodogram elem meghaladja. Mivel egy adott szignifikancia-szinthez tartozó kritikus érték az idősorhoz illesztett AR(1) modell spektrális sűrűségének felhasználásával készült, ez azt jelenti, hogy ebben a frekvenciában a spektrum szignifikánsan eltér az AR(1) spektrumtól. Ez az 53. oldal ábra alatti új bekezdést nyitó mondatából kiolvasható.

56. oldal Az autoregresszív együttható 0,989 és 0,999 közé esik. Ez a stacionaritás határára eső érték, ... Nyilván nem lehet ugyanolyan módon, ugyanolyan megbízhatósággal vizsgálni, mint a stabil rezsimet. ... Ennek tükrében nem csoda az

OLS-AR(1) és a WLS-AR(1) közötti óriási különbség. A stacionaritás problémájával kapcsolatos vélemény nyilván jogos, és végső soron magam is hivatkozok erre, amikor írom, hogy a **megmagyarázhatatlan** „ciklusok összhangban vannak egy előző vizsgálatunkkal (Matyasovszky, 2010b), ahol a szóban forgó periódusidő időbeli változását elemeztük.” Itt a szóban forgó periódusidő a 100000 év körülit jelenti, ami az idézett tanulmányom szerint időben nem állandó, hanem jó közelítéssel a két itteni **megmagyarázhatatlan** periódusidő között mozog. A hangsúlyt azonban nem erre, hanem az autoregresszív együttható OLS és WLS becslése közötti különbségére akartam helyezni. Nem említettem, de most pótlom, hogy szimulációs kísérleteket végeztem AR(1), AR(2) és MA(1) (elsőrendű mozgó átlag) folyamatok esetére. Azt tapasztaltam, hogy amikor az idősor AR(1)-ből származott, akkor a becsült OLS és WLS autoregresszív paraméter gyakorlatilag megegyezett. Minél jobban különbözött azonban a generáló folyamat az AR(1)-től, annál inkább különbözött az autoregresszív paraméter kétféle becslése, és így a hozzájuk tartozó spektrális sűrűség is úgy, hogy az általam javasolt WLS spektrális sűrűség közelítette jobban a valóságos spektrális sűrűséget. Az autoregresszív paraméter kétféle becslésének különbözősége tehát bizonyos értelemben a folyamat AR(1)-től való eltérését jellemzi.

58. oldal Az északi hemiszféra adatait a lineáris folyamatokra ismertetett módszere segítségével kívánja elemezni. Fontos lenne tehát előtte megvizsgálni, vajon jogos-e lineáris folyamatként jellemezni ezt az adatsort. ... nem látható, jogosak-e az elvégzett vizsgálatok, eredményük mérvadó-e. A klimatológia irodalma (és biztosan nem csak a klimatológiáé) meglehetősen bővelkedik olyan spektrális elemzésekben, ahol egyáltalán nem vizsgálják az adatsor linearitását. Úgy is mondhatnám, ez a standard eljárás. Nem látom ezért, miért csak a jelen alkalmazás esetében látszik ez problémának. Ugyanakkor sejtem, a linearitás kérdése nyilván azért vethető fel, mert nemlineáris folyamatból származó idősor esetében mind a periodogram izoton regresszióján alapuló, mind – végső soron – a legkisebb négyzetek módszerén alapuló AR(1) spektrális sűrűség becslés más tulajdonságokkal rendelkezhet, mint lineáris folyamat esetén. Itt a legkisebb négyzetek módszerét azért említem, mert az autoregresszív együttható becslését így végeztem el. Az irodalom tanulmányozása során arra a következtetésre jutottam, hogy az izoton regresszió alapuló spektrumbecslés ilyen általánosítása bizonyosan nem történt meg. A legkisebb négyzetek esetében már nem vagyok ennyire biztos, de egyrészt én nem találtam ilyet, másrészt csodálkoznék, ha a nemlinearitás minden formája ugyanúgy lenne kezelhető. Ezért ha valamilyen típusú nemlinearitásra mégis volna eredmény, és azt alkalmaztam volna, a bíráló bizonyosan azt kritizálná, hogy milyen alapon vonatkoztatom az adott speciális eredményt egy potenciálisan más jellegű

nemlinearitásra. Ezért a bíráló kezhez vétele után a surrogate data (Theiler et al., 1992) módszerrel megvizsgáltam, hogy az idősor lineáris folyamatból származásának null-hipotézise fenntartható-e. Arra jutottam, hogy a null-hipotézis viszonylag szűk elfogadási tartományát biztosító 10%-os szignifikancia-szint mellett sem kívánatos a linearitás elvetése.

... miért érdekes, hasznos, informatív a vörös zaj spektrumhoz hasonlítani az adatsor AR(1) spektrálsűrűség becslését. Itt két becslés összehasonlításáról van szó, ezért az eltérés szerintem elvileg éppúgy származhat a becslések tulajdonságaiból, mint a folyamat AR(1)-től eltérő struktúrájából. Természetesen egyetértek, a különbözőségek valamilyen mértékben a becslési tulajdonságokból fakadnak. Rendkívül valószínűtlennek tűnik azonban, hogy a kétféle spektrális sűrűség közötti óriási különbség nagyrészt a becslési hibákból származnának, hiszen ez azt jelentené, hogy legalább az egyik módszer abszolút megbízhatatlan lenne. Másrészt a periodogram tesztelésére vonatkozó kritikus értékek meghatározását célzó, a 44. és a 49. oldalon ismertetett eljárások figyelembe veszik a becslések bizonytalanságát; lásd a következő észrevételre adott választ. Ezért az eltérés, meggyőződésem szerint, a folyamat AR(1)-től eltérő struktúrájából fakad.

... az eltérés alapján hogyan lehet egyes ciklusokra érdemi következtetéseket levonni. A kétféle sűrűség közötti különbségből nyilván nem lehet, de nem is ez történik. A kétféle módszer esetében külön-külön néztem azokat a frekvenciákat, ahol a periodogram kívül esik az adott módszerhez tartozó kritikus értéken, majd egyszerűen felsoroltam a kétféle eredmény közötti különbségeket.

62. oldal. Jól ismert tény, ... Ez azonban egyáltalán nem jelenti azt semmilyen t időpont esetén sem, hogy $Y(t)$ és $Y(t-1)$ kapcsolata determinisztikus lenne. A szó szigorú, matematikai értelmében biztosan helytelen volt a determinisztikus jelző használata. Egy klimatológus azonban egy sztochasztikus folyamat modell mögé nyilván odaképzelt olyan éghajlati elemet, jelenséget, aminek viselkedése vélhetőleg jól leírható a szóban forgó modellel. Ezért ha bizonyos időpontokban az aktuális éghajlati elem értéke hiba nélkül, pontosan, az előző időpontbeli érték ugyanazon konstansszorosa, akkor én ezt az ilyen adatpárok közötti kapcsolatot a szó hétköznapiabb értelmében továbbra is determinisztikusnak nevezném.

63. oldal 1. sor: „lognormális AR(1) modell”.... Az értekezés 62. oldal utolsó előtti bekezdésének végén szerepel az a megfogalmazás, hogy „illetve Grunwald et al. (2002) a feltételes sűrűség egy széles osztályával általánosabb keretbe helyezte a problémát.” Ez a kijelentés nyilván nem volt kellően karakterisztikus, ezért nem keltette fel a bíráló figyelmét. Az említett cikk ugyanis a stacionárius eloszlások meglehetősen tág körére értelmez AR(1) folyamatot. Itt az Y_t -nek az Y_{t-1} -re vonatkozó feltételes eloszlásához kapcsolódó $E[Y_t|Y_{t-1}]$

feltételes várható érték Y_{t-1} lineáris függvénye, a feltételes variancia pedig a feltételes várható érték kvadratikus függvénye. E függvényekben szereplő konstansok könnyen megadhatók arra az esetre is, ha az említett feltételes eloszlás lognormális. A cikkben szereplő Proposition 3 alapján világos, hogy egynél kisebb nem negatív autoregresszív együtttható esetén Y_t ergodikus, lognormális stacionárius eloszlással, ha Y_t -nek az Y_{t-1} -re vonatkozó feltételes eloszlása lognormális. Az ehhez tartozó várható érték és variancia a Proposition 1 és 2 alapján nehézség nélkül megadható.

... az irodalom használja a lognormális AR(1) modell kifejezést más értelemben, ... Ekkor azonban a folyamat egy lépéses autokorrelációja nem egyenlő az AR(1) paraméterrel, pedig a jelölt a 4.3 formulában így használja, tehát egy ilyen választás a 4.3 formulát és ezzel a továbbiakban mondottakat érvénytelenítené. A (4.3) formulában semmilyen autokorreláció nem szerepel, egyszerűen felírtam egy μ és σ paraméterű lognormális sűrűségfüggvényt. Itt most a formula $\mu = \mu(t) = a_0 + a_1 \ln(y_{t-1})$ tagja a fontos, ami a normális és lognormális eloszlások közötti kapcsolatból, továbbá Grunwald et al. (2002) normális eloszlásra vonatkoztatott javaslatából következik. Az a_0, a_1 , továbbá a (4.3)-ban még szereplő σ becslésének ismertetése a formula alatti részben található. Erre a kezelési módra azért van szükség, szemben Grunwald et al. (2002) lognormális eloszlásra vonatkozó eredeti javaslatával, mert a (4.3)-ban szereplő paramétereknek a parlagfű pollen légköri koncentrációjának erős évi menete folytán időfüggőknek kell lenniük; lásd 69. oldal alja.

67. oldal 4.1.2.2. Ellentétben a jelölt által leírtakkal, az ARCH modell stacionárius megoldásának szórása igenis állandó, ... Ami időfüggő, az a feltételes szórás. Egyetértek. Bár szöveggörnyezetéből kiragadva a 4.1.2.2. fejezet első, bevezető mondata valóban nem helytálló, a további mondatok éppen azt ismertetik, amit a bíráló mond.

A 4.16 formulával adott $g(t)$ valószínűségi változó, ..., mégis függvényként hivatkozik rá a jelölt. Valóban így van, pongyola a szóhasználat.

68. oldal Az ARCH folyamat paraméterbecslésére leírt eljárás a kvázi-maximum-likelihood, melyet a szerző pseudo-maximum-likelihoodnak nevez. Bosszantó elírás, hiszen az általam hivatkozott Franq and Zakoian (2004) tanulmány egyértelműen kvázi-maximum-likelihoodról szól.

68. oldal Nem tudom mit ért a szerző „valóságos eloszláson” ... A stacionárius eloszlásról bizonyított, Gauss zaj esetén ... valóban nem lehet Gauss – talán erre gondolhatott a szerző. Valóban ez utóbbira gondoltam, de az aktuális gondolatmenet

szempontjából ez nem releváns, ezért a mondatot törölni akartam, ám az értekezés számos átolvasása során mindig elsikkadt fölötte a figyelmem.

69. oldal A 28. oldalon a jelölt leírja, hogy a pollenkoncentráció értékei jelentősen autokorreláltak. ... a 69. oldalon Kolmogorov-Szmirnov-próbát alkalmaz ezen adatokra. Ismert, hogy a K-S teszt félrevezető eredményeket adhat, ..., illetve az előírtnál lényegesen magasabb az elsőfajú hibája autokorrelált esetben, ..., ezért Matyasovszky ezen érvelése a lognormális eloszlás mellett nem túl meggyőző. Szerencsére pontosan ellenkező a helyzet: az érvelés még meggyőzőbb, mint ami az értekezésből elsőre látszik. Például Zhang and Wang (2010) növekvő autokorreláltságú adatok esetére a független adatok esetéhez képest a teszt növekvő elsőfajú hibáját, továbbá növekvő erejét detektálta. Ennek következtében adott szignifikancia-szint rögzítése után nagyobb eséllyel várhatjuk a null-hipotézis elvetését, mint független adatok esetében. A null-hipotézis jelen esetben az, hogy a napi légköri pollenkoncentrációk lognormális eloszlást követnek. Ezért ha azt látjuk, hogy a korrelált adatok esetében adott szignifikancia-szint mellett nincs ok elvetni a null-hipotézist, akkor független adatok esetében még kevésbé volna okunk elvetni a null-hipotézist. Szemléletesen fogalmazva: ha az adatok korreláltsága mellett arra jutunk, hogy a lognormális eloszlás jó modell, akkor ezt még biztosabban állíthatnánk független adatok esetében.

74. oldal Az AIC kritérium köztudottan túlbecsli a rendeket. Más információs kritériumokat ... számított-e? Az ilyen jellegű feladatok esetében az AIC és BIC kritériumot is nézni szoktam. Gyakran, bár nem mindig, tapasztaltam, hogy a kétféle kritérium ugyanolyan rendű modellt talált optimálisnak. Ha a két kritérium két különböző fokot talál optimálisnak, akkor nyilván ott a kérdés, hogy melyiknek higgyünk. Ha például egy ismert rendű AR folyamatból származó idősorra alkalmazzuk a kritériumokat, akkor AIC nem nyújt konzisztens becslést, míg BIC igen (Medel and Salgado, 2012). Nevezetesen, az idősor hosszával végtelenhez tartva az AIC pozitív valószínűséggel túlbecsli a rendet, míg az alulbecslés valószínűsége nullához tart. (BIC esetében az alul- és felülbecslés valószínűsége egyaránt nullához tart.) Kérdés persze, hogy egy rögzített hosszúság esetén mennyire teljesülnek az aszimptotikus tulajdonságok. Különböző szimulációs kísérletek azt jelzik, hogy nem nagyon hosszú adatsor esetén BIC jelentős valószínűséggel alulbecsli a rendet, míg AIC esetében az alul- és felülbecslés esélye kiegyenlítettebb (Liew, 2004). Az alulbecslés, és így egy szisztematikus hiba csökkentése érdekében ilyenkor tehát célszerűbb az AIC használata. Hogy mi az az idősor-hossz, ami alatt az AIC, fölötte pedig a BIC az előnyösebb, erre tudtommal nem ismert világos szabály. Az értekezés konkrét esetében ez azt jelenti, hogy, Vostokra nem csak AIC, hanem BIC is egyértelműen AR(3)-at jelzett optimális modellnek. NGRIP-re AIC AR(5)-

öt talált optimálisnak, míg BIC értéke közel van egymáshoz az AR(3) és AR(5) esetében, de szigorúan véve az AR(3) a BIC-re alapozott döntés. Az AIC-BIC-adathossz problémakör miatt néztem meg a zaj varianciájának és a Portmanteau-próbastatisztika értékének a modell rendjétől való függését is (ahogyan azt a vonatkozó sorokban említtem is az értekezésben), és mindezek alapján született NGRIP-re is az AR(3) döntés.

74. oldal, alulról a 2. sor. „Mindkét zaj igen alacsony szintű...”, de mihez képest? Önmagában a kis szórású generáló zaj nem biztosít jó előrejelezhetőséget... Ez a megjegyzés tehát nem állja meg a helyét. Megállja a helyét, mert korábban említettem, hogy az idősort standardizáltam, tehát egy szórásúvá tettem. Ezért a zaj szórásának alacsony szintje az egy szóráshoz képest alacsony. Látszik tehát, hogy nem volt haszontalan a korábban kritizált standardizálás.

75. oldal utolsó sor A két folyamat csupán lineáris kapcsolatban nem áll, nemlineárisban állhat. Ez természetesen igaz, de nyilvánvaló, hogy a lineáris modellezés tárgyalása során magam is a lineáris kapcsolatra gondoltam. Ráadásul a nemlineáris modellezés a következő oldalon el is kezdődik a 76. oldal első bekezdésének utolsó három mondatában említettek miatt.

76. oldal 8. sor. Mi a trend, hogyan becsülte, mielőtt kivonta. Ez a következő mondatban, igaz tömören, de szerepel, hiszen írom, hogy „A trendeket ezúttal is a WLR módszerrel becsültük, melynek részletei megtalálhatók Matyasovszky (2010b) tanulmányában.”

77. oldal Érdekelne, hogy az itt leírt ... modellt hogyan, milyen szoftverrel becsülte. Az eljáráshoz Cai et al. (2000) alapján magam készítettem számítógépes programokat.

83. oldal „... ami nemlineáris ARCH folyamat szükségességét veti fel.” Az ARCH folyamat maga egy nemlineáris folyamat... A szerző által említett nemlinearitáson itt rezsimváltás értendő... Itt megint egy olyan pongyolaságról van szó, amit azért követtem el, mert azt gondoltam, hogy a nem matematikus olvasók számára így érthetőbb. Ráadásul, a következő sorokban a gondolat folytatásaként és magyarázataként magam is kijelentem, hogy az ARCH folyamat nemlineáris, amikor azt írom, hogy „így a nemlineáris ARCH modellhez további nemlinearitás csatlakozik.”

Saját, elsősorban hidrogeológiai folyamatokra vonatkozó tapasztalataim szerint a klasszikus ARCH-GARCH folyamatok túl vastag farkú eloszlással rendelkeznek, ezért nem alkalmasak ilyen célra, a feltételes variancia négyzetesnél kisebb kitevőjű választása hasznosabbnak bizonyult. ... végzett-e, s ha igen, milyen vizsgálatokat a

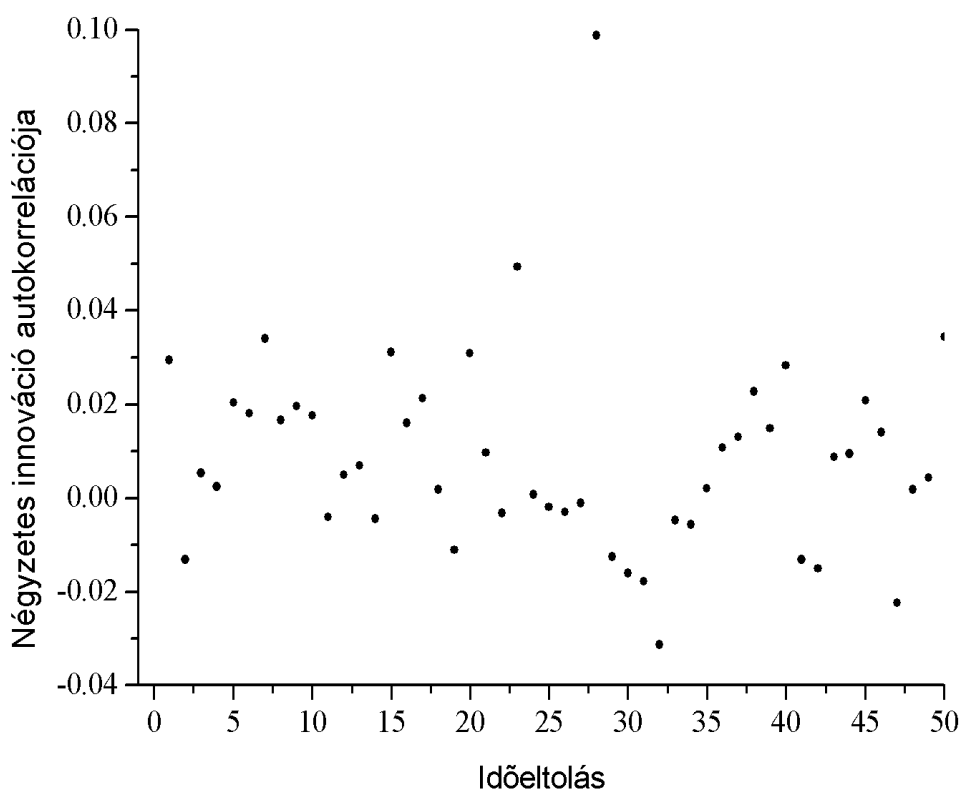
jelölt, amelyek megalapozzák az ARCH folyamat használatát. Korábban nem végeztem ilyen vizsgálatot, mert az értekezés 19. ábráján látható klasztereződő adatsor számomra egyértelműen ARCH-GARCH típusú hatást jelzett. Ráadásul az ARCH, illetve GARCH modell fokára BIC nullánál lényegesen nagyobb értéket jelzett, amely foknak nullának kellene lennie ARCH-GARCH hatás jelenléte nélkül. A bíráló kezhez vétele után azonban elvégeztem a Lagrange multiplier tesztet (Lee, 1991) is. Nem meglepő módon ez ahhoz vezetett, hogy gyakorlatilag minden ésszerű szignifikancia-szinten el kellett vetni az AR folyamat zajára vonatkozó ARCH hatás hiányát feltételező null-hipotézist.

... hiányolom a goodness of fit vizsgálatokat. Az értekezés (4.27)-(4.29) formuláival megadott modell értékelése valóban megmaradt azon a ponton, hogy a Dansgaard-Oeschger (DO)-események idősor modell alapú értelmezése és ezen események detektálása klimatológiai alapon kifejezetten sikeresnek mondható. Hadd említsem meg, hogy az ARCH típusú modell alkalmazásának felvetődésekor nem is számítottam az értekezés 20. ábráján látható meggyőző képre. Utólag a modell matematikai értékelésére Portmanteau-próbát végeztem. Ez azon alapszik, hogy ha a (4.27)-(4.29) modell helyt álló (az idősor a modell folyamatból származónak tekinthető), akkor a $z_t^2 = e_t^2 / g^2(t)$ négyzetes innovációk korrelálatlanok. Itt

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t), & e_{t-1} \geq 0,58 \\ g_2(t), & e_{t-1} < 0,58 \end{cases}, \text{ ahol } g_1(t) \text{ és } g_2(t) \text{ (4.29) szerint értelmezett. Az idősor konkrét}$$

értékeit (4.27)-be írva előállítható az ezen idősorhoz tartozó négyzetes innováció idősora, és kiszámíthatók az ebből az idősorból becsült autokovarianciák. E kovarianciákból képezünk egy próbastatisztikát (Carbon and Franq, 2010) és döntünk az említett próba alapján a korrelálatlanságra vonatkozó null-hipotézis fenntarthatóságáról. Arra vonatkozóan nem tudok szabályról, hogy hány kovarianciát vegyünk figyelembe. Ezért elvégeztem a próbát $M=10, 15, 20, 25$ kovariancia figyelembevételével, és a próbastatisztika értéke legalább az 5%-os szignifikancia-szinthez tartozó kritikus érték alatt maradt, tehát nem láttam okot a null-hipotézis elvetésére. További autokovarianciák bevonása esetén azonban a 28-as időeltolás (1400 évnél megfelelő) melletti kiugróan nagy kovariancia megzavarja a képet. (A szemléletesség érdekében az 1. ábrán a korrelációkat tüntettem fel.) Nevezetesen, $M=30, 35, \dots, 50$ esetében már az 1%-os szinten is el kellett vetni a null-hipotézist. Meglehet, bölcsőbb lenne nem keresni magyarázatot e kiugró érték jelentkezésére, de észre lehet venni az 1400 éves időeltolás és a DO események jelentkezési gyakoriságában domináló 1470 év (lásd 3.2.2 fejezet) közötti hasonlóságot. Úgy tűnhet, mintha az AR-ARCH modell alul- vagy felülreprezentálná ezeket az eseményeket. Alulreprezentálásról azonban úgy vélem, nem lehet szó a 20. ábrán látható

meggyőző eredmények láttán, ezért marad inkább az ellenkező lehetőség. A túlreprezentálás elkerülésére valóban alkalmas lehet a bíráló által említett Power ARCH típusú modell, melyet a későbbi esetleges nemlineáris idősor modellezési gyakorlatomba be is kívánok építeni. Lehet azonban, hogy mégsem erről van szó, ugyanis a DO eseményekkel kapcsolatos 1470 év tisztán az elmúlt 15000 év és 60000 év közötti időszakban jelentkezik, a megelőző periódusban a $\delta^{18}\text{O}$ adatok egyre kevésbé intenzív ingadozásokat mutatnak. Tehát ez az általam, az egyszerűség kedvéért, túlreprezentálásnak nevezett helyzet valószínűleg csak az idősor elején léphet fel. Összességében úgy látom, hogy az általam létrehozott AR-GJR-ARCH modell nem optimális, de célkitűzésemnek, nevezetesen a DO események idősor modell alapú értelmezésének és ezen események detektálásának egyértelműen megfelel.



1. ábra A (4.27)-(4.29) modellhez tartozó négyzetes innováció becsült autokorrelációi

Érdekes lenne tudni valamit a jelölt által felhasznált szoftverekről. A Tézisekben szólok erről: „Elemzéseink mindegyike saját fejlesztésű számítógépes programmal készült, az Origin 6 grafikus programon kívül egyéb szoftvert nem vettünk igénybe.”

Ismét megköszönöm a bíráló alapos munkáját, és remélem, hogy a számos nem éppen egyszerű észrevételére adott válaszomat kielégítőnek találja.

Irodalom

- Carbon M, Franq C, 2010: Portmanteau goodness-of-fit test for asymmetric power GARCH models. MPRA Paper 27686.
- Davis RA, Mikosch T, 1999: The Maximum of the Periodogram of a Non-Gaussian Sequence. *Ann Probab* 27: 522-536.
- Lee JHH, 1999: A Lagrange multiplier test for GARCH models. *Econ Lett*: 37: 265-271.
- Liew VKS, 2004: On Autoregressive Order Selection Criteria. Putra University Malaysia.
- Medel CA, Salgado SC, 2012: Does BIC Estimate and Forecast Better than AIC? MPRA Paper 42235.
- Theiler J, Eubank S, Longtin A, Galdrikian B, Farmer JD, 1992: Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data. *Physica D* 58: 77-94.
- Zhang Z, Wang C, 2010: Investigating the effect of dependence on the performance of Kolmogorov-Smirnov test, Course Project, Michigan State University.

2014. június 9.

Matyasovszky István