

Opponensi vélemény

Sziklai Péter: Applications of Polynomials over Finite Fields

című MTA-doktori értekezéséről

A folytonos geometriák axiomatizálása során fontos feladat volt a különböző véges alakzatoknak, vagy konfigurációknak a vizsgálata, melyeknek a tartalmazó geometriáktól független leírása vezetett az elmúlt évszázadban a véges modellek, majd pedig a véges geometriák tanulmányozásához. A század közepére ismertté vált, hogy bizonyos konfigurációs axiómák szoros kapcsolatban állnak a koordinátázó struktúrák algebrai tulajdonságaival, a véges konfigurációk tanulmányozása pedig elvezetett a geometriai alakzatok kombinatorikus struktúrájának vizsgálatához. A sok szimmetriával rendelkező véges geometriai struktúrák elmélete pedig hamarosan fontos alkalmazásokra irányította a figyelmet, első sorban kódelméleti és kriptográfiai problémákkal kapcsolatban.

A disszertáció a véges geometriák kombinatorikusan definiált, nagyfokú szabályossággal vagy extrémális tulajdonsággal rendelkező ponthalmazokkal foglalkozik. Ilyenek például a k -lefogó ponthalmazok, melyek minden k -kodimenziós alteret metszenek, vagy a síkbeli k -ívek, melyeket minden egyenes legfeljebb 2 pontban metsz, stb. Az elvégzett kutatás alapvető módszere a $q = p^k$ elemű $\text{GF}(q)$ véges test feletti projektív terek ponthalmazaihoz természetes úton rendelhető polinomok algebrai vizsgálata. Ez a módszer a Rédei László által kezdeményezett hézagos polinomok elméletéhez kapcsolódik. Ennek az algebrai és kombinatorikus elméletnek a rendszeres véges geometriai alkalmazását Szőnyi Tamás és munkatársai fejlesztették ki az elmúlt 2 évtizedben, együttműködve a témakör jelentős nemzetközi kutatóival.

A polinomos módszer alkalmazásaiban Sziklai Péter alapvető eredményeket ért el, melyeket egy monográfiában tervez összefoglalni. A disszertáció ennek a készülő műnek egy tömörített változata.

Az értekezés első 8 szakasza véges testekkel, algebrai görbékkel kapcsolatos alapvető ismereteket foglal össze, különös tekintettel a Rédei polinomokra, azok változataira, valamint viselkedésükre a deriválásra vonatkozóan. Már ebben a részben találunk olyan megfigyeléseket, amelyek a szerző dolgozataiban jöttek elő, és a későbbiekben jelentős szerepet játszanak, (a teljesség igénye nélkül: Lemma 8.9, Result 7.4, 7.5, Theorem 5.8).

A 9. fejezet már egyértelműen olyan eszközöket mutat be, amelyeknek a későbbiekben fontos szerepük lesz. Nagyjából arról van szó, hogy ha egy halmaz a $\text{GF}(q)$ test elemeinek esetleg többszörösen előforduló példányaiból áll és kb. úgy viselkedik, mint $\text{GF}(q)$ plusz/minusz néhány elem, akkor ezeket az elemeket hogyan lehet könnyen megtalálni. A fejezetben ezt terjeszti ki a szerző lineáris ill. alacsony fokú polinomokra. Ebből a fejezetből kissé hiányzik valamilyen jól megfogalmazott állítás, a tárgyalt anyag inkább csak érzékelteti a felhasznált módszereket.

A 10. fejezet olyan ponthalmazokkal foglalkozik, amelyeknél az egyenesekkel való metszési számok előírtak (pl. 10.1-ben ez konstans, 10.4-ben 0, modulo p). A síkbeli esetben az ilyen halmazoknak megfeleltethető a koordinátázó $\text{GF}(q)$ test olyan részhalmaza, amely elemeinek elég sok hatványösszege eltűnik. Ez a tulajdonság vezet el az u.n. Vandermonde halmaz és szuper-Vandermonde halmaz definíciójához. Ebből a fejezetből kiemelhetjük a q/p -nél nagyobb szuper-Vandermonde halmazok leírását megadó 10.13. Tételt, amelyben megmutatja, hogy ezek a halmazok a multiplikatív részcsoportok transzformáltjai. Ugyancsak fontos és szép eredmény a 10.15. Tétel is, amely egy 0 modulo r metszési

számokkal bíró halmaz méretére ad alsó becslést. Kiemeljük, hogy ebből a tételből a páratlan rendű Galois-síkok nem-triviális maximális íveinek nemlétezésére vonatkozó Ball-Blokhuis-Mazzocca eredmény is következik.

A szerző talán legjobban ismert és legerősebb eredményei a lefogó ponthalmazokra vonatkoznak, amelyek a 11. fejezetben kaptak helyet. A szerző az algebrai görbék lefogó ponthalmazokra való alkalmazását mutatja be, a történeti hűségnek megfelelően az egy, két illetve három görbét használó eredményeken keresztül, részletesen tárgyalva a szerzőtől származó, leghatékonyabb három görbés esetet. A fejezet kiemelkedő eredménye a 11. 33. Tétel, (amely a 11.32. Korollárium következménye). Ez lényegében azt mondja, hogy kis blokkoló ponthalmaz exponense osztja h -t, ahol $q = p^h$. Itt az exponens az az e kitevő, amelyre a kis minimális lefogó halmazt minden egyenes 1 modulo p^e pontban metszi. Ezen felül azt is megmutatja a szerző, hogy ha egy egyenes $p^e + 1$ pontban metszi a lefogó ponthalmazt, akkor ezen pontok a $\text{GF}(p^e)$ résztest feletti projektív részegyenest alkotnak. A kilencvenes években sokáig csak ún. Rédei-típusú kis minimális lefogó ponthalmazok voltak ismertek, majd Lunardon és tanítványai (elsősorban Polverino, és részben Polito) konstruáltak nem Rédei-típusú, hanem lineáris kis lefogó ponthalmazokat. Sziklai linearitási sejtése szerint minden kis minimális lefogó ponthalmaz lineáris. A fenti részegyenésekről szóló eredmény mutatja, hogy a sejtéshez mennyire közel sikerült kerülnie. Ezek az eredmények reményt adnak a kis lefogó ponthalmazok leírására. A fejezet néhány magasabb dimenziós lefogó ponthalmazokra vonatkozó következménnyel zárul.

A 12. fejezet fő eredménye a 12.15. Tétel, amelyben kevés irányt meghatározó q^k elemű, n -dimenziós affin térbeli ponthalmazokat vizsgál a szerző. Azt tudja megmutatni, hogy ha $q = p^h$ és $n - 1 \geq (n - k)h$, akkor az U halmaz egy alkalmas kúp (igazából szemléletesen henger) kell legyen.

A 13. fejezet Segre-típusú (más szóval stabilitási jellegű) eredményeket tartalmaz kúpok síkmetszeteikkel való befedéseivel kapcsolatban. A legérdekesebbek a 13.4. és a 13.7. Tételek, melyekben másodrendű illetve bizonyos magasabbrendű kúpok részleges befedéseinek befedéssé való kiegészítésére ad meg csupán a „hiányzó” síkok számára vonatkozó feltételt. Ez a fejezet használja alapvető eszközként a 9. fejezet eredményeit. Érdemes megjegyezni, hogy kúpok részleges befedéseire vonatkozóan ez volt az első Segre-típusú eredmény, és mind a mai napig ez a legjobb becslés a hiányzó síkok számára.

A 14. fejezet egy különösen érdekes problémával foglalkozik. Ha U olyan affin ponthalmaz, amely $0 \leq \varepsilon$ -nal kevesebb pontot tartalmaz, mint egy hipersík, és U nem határoz meg túl sok irányt, akkor lehet-e valamit mondani az U által meg nem határozott irányok számáról. Háromdimenziós térben a 14.13. Tétel azt adja, hogy U vagy kiegészíthető olyan q^2 elemű ponthalmazzá, amely ugyanazokat az irányokat határozza meg, mint U (és ekkor több dolgot tudunk az U halmazról, pl. bizonyos esetekben a 12. fejezet eredményeit lehet alkalmazni), vagy pedig a nemmeghatározott irányok benne vannak egy legfeljebb $\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon$ fokú algebrai síkgörbében (speciálisan, ha ε kicsi, akkor kevés nemmeghatározott irány van). Ez egy nagyon erős eredmény, amely lényeges információt ad a nemmeghatározott irányok struktúrájáról, nem csak a számukról. A bizonyítás algebrai geometriai módszerek eredeti, szellemes alkalmazásán alapul. Ennek a (friss) eredménynek várhatóan nagy hatása lesz, néhány alkalmazását láthatjuk a 14.3 szakaszban.

A 15. fejezet az irányprobléma általánosításával kapcsolatos további érdekes eredményeket tartalmaz.

A dolgozat a szerző készülő könyve alapján íródott. Ennek előnyei mellett hátrányai is vannak. Elsősorban a saját eredmények esetén többször nem világos, hogy pontosan ki-

től, kiktől származik egy-egy eredmény, csak a furcsa [SzP...] hivatkozásokat adja meg a dolgozat. A könyvjellegű felépítésnek egy további nem kívánt mellékhatása, hogy a dolgozat elején nagyon sok technikai jellegű állításon kell átrágnia magát az olvasó (ami kicsit unalmas). Valószínűleg ezen részek rövidítése okozta, hogy pl. a Hasse-deriváltak az 5.3 szakaszban jönnek elő, amely 4.3-ra hivatkozik, de ott csak egy-két mondatot és az 5.3-ra való visszahivatkozást találunk. A nem disszertáció jellegű felépítést a téziszfüzet érdekes szerkezete is mutatja, amelyben a 14. és 15. fejezetben tárgyalt eredmények ismertetése megelőzi a 10. fejezet eredményeit.

A dolgozatban felvonultatott eszköztár igen széles, a kombinatorikus, véges geometriai és algebrai módszereken kívül a polinomok, algebrai görbék és felületek vizsgálati módszerei egyaránt fontos szerepet játszanak. A disszertáció első 8 fejezete részben ismert, részben pedig módszertani újdonsággal rendelkező előkészületeket tartalmaz, amelyek ismerete szükséges a disszertáció 9-15. fejezeteiben tárgyalt főbb eredményeinek tárgyalásához. A legértékesebb, alapvetően új tudományos eredményeket a 10-14. fejezetek tartalmazzák:

- a nagy elemszámú szuper-Vandermonde halmazok leírása,
- a minimális kis lefogó halmazok linearitására vonatkozó eredmények,
- a kavés irányt meghatározó affin ponthalmazok vizsgálata,
- stabilitási eredmények,
- a hipersíknál kisebb affin ponthalmazok által nemmeghatározott irányok leírása.

Ezek közül is kiemelem a kis blokkoló halmazok szerkezetét leíró 11. 33. Tételt, az algebrai görbékre épített hengerek síkmetszetekkel való particionálására vonatkozó 13.7. Tételt és a nemmeghatározott irányok struktúráját meghatározó 14.13. Tételt.

A következő kérdést fogalmazom meg:

Az algebrai görbékre épített hengerek síkmetszetekkel való particionálására és a nemmeghatározott irányok struktúrájára vonatkozó eredményeket lehet-e általánosítani végtelen testek feletti geometriákra?

Összefoglalva: Sziklai Péter akadémiai doktori disszertációja igen jelentős, a szakmai tudományos közvélemény által magasra értékelt kutatási eredményekről ad összefoglaló képet. Ennek alapján megállapítható, hogy Sziklai Péter a véges geometriák algebrai és kombinatorikus elméletének nemzetközi szempontból kiemelkedő szakembere.

Javaslom az akadémiai doktori fokozat megszerzésére vonatkozó nyilvános vita kitűzését és Sziklai Péter számára az MTA doktora fokozat megadását.

Budapest, 2014. január 2.

Nagy Péter Tibor
MTA doktora