

Opponensi vélemény  
Szabó Endre  
Application of Algebraic Geometry in Combinatorics and in  
Group Theory  
című  
MTA doktori értekezéséről

A dolgozat általános témája kombinatorikus geometria és csoportelmélet. Mindkét témakörben kulcsszerepet játszik az algebrai geometria eszközök alkalmazása.

**Eredmények.** A dolgozat eredményeit három részre osztja a szerző. Az első két kategóriában szerepelnek a kombinatorikus geometriai eredmények. Az első rész fő eredménye egy meglehetősen általános tétel, amely felső becslést ad arra, hogy pontok és algebrai sokaságok véges halmazai között hány illeszkedés lehet, ha kizárunk bizonyos elfajuló konfigurációkat. Az elfajulás kizárása a kombinatorikus dimenzió segítségével történik. Ez az eredmény többek között általánosítja Szemerédi és Trotter egy tételét.

A második rész fő eredménye két tételben van kimondva. Mindkettő arról szól, hogy milyen struktúrája van egy algebrai halmaznak, ha egy  $X \times Y \times Z$  alakú kombinatorikus kockát sok pontban metsz. Az első tétel három dimenzióban van megfogalmazva, míg a második tárgyalja a magasabb dimenziós esetet. A tételek egy különlegessége, hogy a struktúra leírásában komplex algebrai csoportok jelennek meg. Ez is rámutat az eredmények mélységére.

A harmadik rész eredményei azzal a kérdéssel foglalkoznak, hogy ha egy  $G$  csoportban  $S \subset G$  részhalmaz esetén az  $S^3$  komplexus szorzat mérete nem "sokkal nagyobb" mint  $S$  mérete akkor mit mondhatunk  $S$  struktúrájáról. A "product theorem" nevű tétel azzal az esettel foglalkozik, amikor  $G \leq SL(n, q)$  egyszerű csoport. A tétel szerint ha  $|S^3| \leq |S|^{1+\epsilon}$ , akkor ha  $S$  generálja  $G$ -t, abból következik hogy  $S = G$  (az  $\epsilon$  értéke csak  $n$ -től függ). Két másik tétel azt vizsgálja, amikor  $G = SL(n, K)$  tetszőleges  $K$  test felett és  $|S|^3 \leq c|S|$  valamilyen  $c \in \mathbb{R}$  konstansra.

**Értékelés.** A disszertáció eredményeire jellemző, hogy a modern matematika élvonalába tartoznak. Rengeteg hivatkozás található olyan nevektől mint T.Tao, J. Bourgain, E. Hrushovski, A. Lubotzky, B. Green, P. Sarnak

akik mostanában szorosan kapcsolódó dolgokkal is foglalkoztak. Elmondhatjuk, hogy az eredmények a saját témakörükön belül centrálisak, nemzetközileg ismertek és számos fontos következménnyel rendelkeznek. Megjegyzem, hogy Princetonban egy személyes beszélgetésben Peter Sarnak hosszasan méltatta a Pyber-Szabó eredményeket, amelyek a számelméletben is fundamentálisnak bizonyulnak. Ezen kívül számos nemzetközi konferencián hallottam a disszertáció különböző eredményeiről, ami szintén mutatja az impaktjukat. Az is jól kirajzolódik, hogy Szabó Endre jelenleg az egyik legjobb szakértője annak, hogy az algebrai geometria eszközei hogyan használhatóak kombinatorikus jellegű kérdésekben. Emiatt a különleges tudása miatt jelentősre becsülöm a hozzájárulását a társszerzős cikkekben.

**Publikációk.** A dolgozat anyagát hét cikk alkotja, ezek hét fejezetben vannak egyenként ismertetve.

A disszertáció anyagát alkotó 7 cikk közül 4 cikk már publikálásra került, a maradék három cikk vagy el van fogadva, vagy be van nyújtva. Jelentősége miatt kiemelendő a Pyberrel közös Szorzattétel, amit jelenleg fogadtak el a Journal of American Mathematical Society-ben, amely a legrangosabb újságok egyike. Ez az eredmény valódi mérföldkőnek számít a csoportelméletben, így több kutatócsoport feldolgozta már, többek között Breuillard az Institut Henri Poincaré ‘Random Walks and Asymptotic Geometry of Groups’ című 2014-es szemeszterén több előadást tartott róla. Külön kiemelném, hogy a cikkekre, bár még csak most lett elfogadva, már 62 hivatkozás található a Google Scholar-ban.

A megjelent cikkek a következő folyóiratokban lettek publikálva: Combinatorics, Probability and Computing, Combinatorica, Groups, Geometry, Dynamics és Proc. of the AMS és JAMS. Ezek mind jó hírű nemzetközi folyóiratok, a cikkek pedig nagy érdeklődést váltottak ki és további kutatásra ösztönözték a matematikai közösséget. A dolgozat anyagát adó hét cikk társszerzős: kettő Pyber Lászlóval, kettő Elekes Györggyel, egy Elekes Györggyel és Simonovits Miklóssal, egy Cheryl Praegerrel, Pyber Lászlóval és Pablo Spigával, egy pedig Nick Gillel, Pyber Lászlóval és Ian Shorttal. A társszerzős cikkekben természetesen lehetetlen kívülről megítélni Szabó Endre egzakt szerepét, de a fent említett oknál fogva is nyilvánvaló, hogy ez a szerep az összes, a dolgozatban felhasznált cikkben jelentős.

**Matematikai munkásság, fejlődés az előző tudományos fokozat óta.** A bíráló személyes tapasztalata, hogy Szabó Endre munkáit külföldön sokan

ismerik és értékelik, eredményeit előadásokban és beszélgetésekben is sokszor említik.

Szabó 1993-ban kapott PhD fokozatot (ezt 2001-ben honosította). Első cikke 1994-es, azóta folyamatosan publikál. Alapnyelve az algebrai geometria. Bár főbb eredményei kimondásakor ez nem világos, mégis legtöbb eredményében rejtve nagyon is szerepet játszik.

Az utóbbi néhány évben széles körben ismert matematikussá vált. Ez köszönhető egyrészt Pyber Lászlóval közös munkájának, amely a disszertáció fontos részét alkotja, másrészt a szofikus csoportokról írt, Elek Gáborral közös, szintén alapvető jelentőségű cikkeinek. Ezek az eredmények (4 cikk, jelenleg összesen körülbelül 220 Google Scholar hivatkozással) Elek Gábor nagydoktori dolgozatában benyújtásra kerültek, így Szabó disszertációjába nem kerültek bele. Az anyag ezek nélkül is bőven megüti a mércét.

**Problémák.** Szabó kifejezett erőfeszítést tett a dolgozatban (és a tézisekben), hogy az eredmények mellé a történetet is elmondja. Ez néhol jobban, máshol kevésbé sikerült, de összességében kielégítő leírását adja annak, hogy a tézis anyaga hogyan ágyazódik be a matematika egészébe.

A dolgozat angolsága megfelelő. A tézisek magyarsága viszont néhol nem tökéletes. A helyesírási és stilisztikai hibák azonban nem befolyásolják a dolgozat érthetőségét.

**Összegzés.** Szabó Endre dolgozata jelentős súlyú, részben Magyarországon is aktívan művelt, de egyelőre főként különállóan létező matematikai területeket köt össze produktívan. Az eredmények eredetiek, izgalmasak, illeszkednek az aktuális matematikai kutatás fő sodrába, és többségükben nem lezáró jellegűek, tehát várhatóan további kutatást fognak generálni. A fentiek alapján a bíráló Szabó Endrét az akadémiai doktori címre teljes mértékben alkalmasnak találja, ezért javasolja a nyilvános védés kitűzését és a doktori cím odaítélését.

Budapest, 2014. december 10.

Szegedy Balázs, PhD