

VÁLASZ LEMPERT LÁSZLÓ BÍRÁLATÁRA

SZABÓ ENDRE

Nagyon szépen köszönöm a bíráló alapos munkáját. Igyekszem a bírálat minden kérdésre, felvetésére reagálni. Van, ahol ez csak pár szó: igen teljesen igaza van. És van, ahol hosszabb válaszra, magyarázatokra, külső hivatkozásokra van szükség. Remélem, a válaszaim hasznosak lesznek! A bíráló csoportosította a megjegyzéseit — itt ugyanezt a csoportosítást követem.

Formai megjegyzések:

A 31. oldalon a reducibilitás–irreducibilitás fogalma fel lett cserélve, valószínűleg a többszörös tagadásnak estek áldozatul.

Valóban.

A 41. oldalon, amikor k először jelenik meg a 7. sorban, semmi magyarázat nincs rá; később megtudjuk, hogy $\dim(G)$ -t jelöli; de aztán az alulról 10. sorban k átváltozik egy kombinatorikus dimenzióvá, melynek értéke $= 2$. (Ugyanebben a bizonyításban, néhány sorral lejjebb, k még egy újabb szerepet kap, futó index lesz, de ez már senkit se zavarhat meg.)

Igen, igaza van.

A 2.12.3 Állításban k definíciójából kimaradt, hogy “nem triviális” reprezentációkról van szó. Az ugyan világos volt, hogy a triviális reprezentációt ki kell zárni, de elképzelhető lett volna, hogy csak hűséges reprezentációkra szorítkozva kell kiszámítani a minimumot.

Igen, k itt a legkisebb nem-triviális reprezentáció foka. Valóban, a hűséges reprezentációk vizsgálata is érdekes, vannak már arra vonatkozó eredmények is.

A 2.12.12 Állításban ϕ -ről ki kell kötni, hogy monomorfizmus.

Igen, igaza van.

A 4.3.1 Definícióban, ha $G \subset \mathbb{R}^2$, nem kell megkövetelni, hogy f valós értékű legyen?

Jogos észrevétel.

A 4.4.1 Tételben jó lett volna megemlíteni, hogy a G_i tartományok $\mathbb{R}^2$ -ben vannak (vagy $\mathbb{C}^2$ -ben?).

Valóban pontatlan a Tétel megfogalmazása. Az állítás egyaránt érvényes $\mathbb{R}^2$ -ben és $\mathbb{C}^2$ -ben is. A bizonyítást úgy fogalmaztuk, hogy mindkét esetben érvényes legyen, és ahol szükséges volt, meg is jelent ez a kettősség — de sajnos a Tétel kimondásából kimaradt.

A fentebbiektől eltérően, az alábbi észrevételnek talán még hasznát tudja venni a jelölt: angolul szokásosabb a fixpontot “fixed point”-nak nevezni, még ha a Wikipedia el is ismeri az értekezésben preferált “fixpoint” változatot is.

Igen, elfogadom.

Nekem úgy tűnik, hogy a kombinatorikus dimenzió 1.2.1 Definícióját egyszerűbben lehetett volna megadni a következőképpen: $\text{cdim}_b(S, T) \leq k$, ha T -ből elhagyható b csúcs úgy, hogy a maradék (S, T') páros gráf ne tartalmazza a $K_{b+1, k}$ teljes páros gráfot. Ez ugyan nem pontosan azt adja, mint az értekezésbeli fogalom, de ha b -t megnövelhetjük kb -re (és az értekezésben ez nem változtat a lényegen), akkor ez a fogalom ekvivalens lesz az értekezésbelivel.

Igen, ez így van. Érdekes észrevétel, valóban leegyszerűsíti a fogalmat. Köszönöm szépen!

Az 1.2.5 és 1.2.6 Tételekben az állítás fölöslegesen bonyolultan van megfogalmazva. Fölösleges ε -t és D -t bevezetni, egyszerűen azt lehet írni, hogy létezik egy $\alpha_0 > (k-1)/k$, hogy

$$\frac{k-1}{k} < \alpha < \frac{d(k-1)}{dk-1} \quad \text{ill.} \quad \frac{k-1}{k} < \alpha < \alpha_0$$

és $\beta = k(1 - \alpha)$ választással ez és ez a becslés áll. Az így megadott egyenlőtlenségeket aztán egyszerűbb lenne felhasználni a 41. oldal vége felé.

Valóban, így egyszerűbb.

A 4.4.1 Tétel áttekinthetőbb lenne, ha a “parciális burkoló” fogalma nem jelenne meg; végül is arról van szó, hogy egy $\mathcal{E} \subset G_1 \cap G_2 \cap bd(G_3)$ görbére van szükségünk, aminek minden pontja szinguláris pontja f_3 -nak. Ez egy elég természetes fogalom, még ha nem is annyira geometriai, mint a parciális burkoló.

Igen, elfogadom.

(A) kérdések:

A 86. oldal közepén ez áll: “But G is non-nilpotent, hence G has several maximal tori.” Ez miért igaz? Vagyis abból, hogy G -nek csak egy maximális tórusza van, miért következik, hogy nilpotens?

A szóbanforgó G egy összefüggő lineáris algebrai csoport. Tegyük fel, hogy T az egyetlen maximális tórusz G -ben. Világos, hogy $T \triangleleft G$ normálosztó, hiszen ha volnának T -nek konjugáltjai, azok is maximális tóruszok lennének.

Legyen $R \triangleleft G$ a (félig-egyszerű) radikál — tehát a legnagyobb összefüggő feloldható normálosztó. Ismert, hogy a G/R faktorcsoport minden maximális tórusza egy G -beli maximális tórusz képe. Ezért G/R -nek is csak egyetlen maximális tórusza van. Jelöljük ezt T' -vel. A fenti érvelést elismételve látjuk, hogy T' normálosztó G/R -ben. De G/R félig egyszerű csoport, nincs nem-triviális Abel normálosztója. Ezért $T' = \{1\}$, és így $G/R = \{1\}$.

Ezzel beláttuk, hogy $G = R$, azaz G feloldható. Legyen $U \triangleleft G$ az unipotens radikál — azaz a legnagyobb unipotens normálosztó. Ismert, hogy minden összefüggő feloldható lineáris algebrai csoport az unipotens radikál és egy maximális tórusz szemidirekt szorzata: $G = U \rtimes T$. A mi esetünkben T és U is normálosztók, tehát a kommutátoruk $[T, U] \leq T \cap U = \{1\}$, és így $G = U \times T$. Mivel T és U is nilpotensek, azért G is az.

Honnan tudjuk, hogy a 93. oldal első mondatában felsorolt tulajdonságú algebrai csoport létezik?

A Lie típusú véges egyszerű csoportoknak ez a leírása Steinbergtől származik (lásd [9]), ajánlok még egy jól olvasható összefoglalót: [5, Sections 1.17 – 1.19]. Itt most Steinberg [9] cikkét követjük.

Legyen G egy egyszerű lineáris algebrai csoport egy tetszőleges algebrailag zárt test felett. Steinberg azt vizsgálta, hogy mi lehet egy $\sigma : G \rightarrow G$ endomorfizmus G_σ fixponthalmaza (Steinberg alsó indexet használt, a Disszertációban viszont a G^σ jelölés szerepel). A 11.6. szakaszban klasszifikálja az összes lehetséges endomorfizmus-típust, melyekre G_σ véges. Ezen G_σ csoportok nem mind egyszerűek, de a kompozíciófaktoraik között legfeljebb egy nem-kommutatív egyszerű csoport van, és minden Lie típusú véges egyszerű csoport szerepel a listán.

Tegyük most fel, hogy G „adjoint”-csoport, azaz centrum-mentes, jelölje $\tilde{G}$ az univerzális fedőjét. A G csoport minden fedőcsoportján ugyanolyan típusú endomorfizmusok hatnak, jelölje $\tilde{\sigma}$ az univerzális fedő σ -val azonos típusú endomorfizmusát. A 12.8. szakaszban Steinberg azt diszkutálja, hogy G_σ -ban és $\tilde{G}_{\tilde{\sigma}}$ -ban ugyanaz az L egyszerű csoport fordul elő kompozíciófaktoroként, de amíg ez G_σ -ban részcsoporthoz tartozik, addig $\tilde{G}_{\tilde{\sigma}}$ -nak (néhány kivételtől eltekintve) a centrum szerinti faktorcsoporthoz tartozik.

Nekünk tehát L indexét kell megbecsülnünk G_σ -ban. A 11.16 szakaszban Steinberg általános képletet ad a fixpont-csoport méretére. Ebből azonnal látszik, hogy $|G_\sigma| = |\tilde{G}_{\tilde{\sigma}}|$, sőt, G minden fedőcsoportjából ugyanekkora fixpont-csoportot kapunk. Tehát L indexe G_σ -ban megegyezik (a fenti egyetlen kivételtől eltekintve) $\tilde{G}_{\tilde{\sigma}}$ centrumának méretével. Ez felülről becsülhető L Schur-multiplikátor csoportjával (valójában megegyezik vele, sőt, a $\pi_1(G)$ fundamentális csoporttal is). A Schur multiplikátorok jól ismertek, a méretük korlátozható a Lie rang függvényében (lásd például [8, Theorem 5.1.4]).

Essen még pár szó a kivételekről. A $\tilde{G}_{\tilde{\sigma}}$ csoport centrum szerinti faktora néhány (kis elemszámú) esetben nem egyszerű. Ezek mind vagy feloldható csoportok, vagy pedig a kommutátor részcsoporthoz tartoznak egyszerűen. (Ilyen például a Tits csoport, az ${}^2F_4(2)$ kommutátora). A kommutátor indexe minden esetben legfeljebb három, tehát az index-becslésünkben a Schur multiplikátorok számát még meg kell szoroznunk hárommal, hogy a kivételekre is működjön.

Mit értünk „monomial” mátrixon (2.14.1 Példa)?

„Monomiális mátrixnak”, vagy másképpen „általánosított permutáció mátrixnak” hívják az olyan négyzetes mátrixokat, melyeknek minden sorában és minden oszlopában pontosan egy nem-nulla elem van.

116. oldal. A 3.1.2 Tételből hogyan következik a Szorzat-tétel?

Legyen $L \leq GL(n, \mathbb{F})$ a Lie típusú egyszerű csoportot definiáló mátrix-reprezentáció (lásd [8, §5.4]), itt n egy csak r -től függő (r^2 nagyságrendű) egész. Tegyük fel, hogy $A = S$ egy szimmetrikus generátorrendszer L -ben. A 3.1.2 Tételt a $K = |A|^\varepsilon$ paraméterrel fogjuk alkalmazni, az ε értékét később adjuk meg. Ha A ellenpélda a Szorzat-tételre, akkor $|A^3| \leq |A|^{1+\varepsilon} = K|A|$, tehát alkalmazható a 3.1.2 Tétel. A kapott $P \leq \Gamma$ részcsoporthoz kicseréljük az L -vel vett metszetükre, a 3.1.2 Tétel feltételei érvényesek maradnak. Mivel A normalizálja P -t és Γ -t, azért az egész L normalizálja őket. Mivel L -ben nincs nem-triviális normálosztó, azért mindkét részcsoporthoz vagy $\{1\}$ -gyel, vagy L -vel egyenlő.

Két esetet különböztetünk meg. Ha $P = L$, akkor $A^3 = L$, tehát L -re mégis teljesül a Szorzat-tétel. Ha pedig $P = \{1\}$, akkor Γ egy feloldható

normálosztó L -ben, tehát $\Gamma = \{1\}$. Tudjuk a 3.1.2 Tételből, hogy A lefedhető Γ legfeljebb $K^{c(n)}$ mellékosztályával, tehát $|A| \leq K^{c(n)} = |A|^{\varepsilon c(n)}$. Ez lehetetlen, ha ε -t kisebbre választjuk $\frac{1}{c(n)}$ -nél.

A 3.2.2 Állításnak és a 3.2.5 Lemmának mi a bizonyítása (vagy mi egy meggyőző hivatkozás ezekre az eredményekre)?

A 3.2.2 Propozíciót magába foglalja a korábbi 2.12.19 Propozíció. A 3.2.5 Lemma első fele megegyezik a korábbi 2.7.1 Lemmával, a második fele azonnal következik az első feléből és a 3.2.4 Propozícióból. A cikkek összefésülésakor egy sajnálatos hiba folytán ezek a hivatkozások kimaradtak.

A 4.3.7 Definíció (ii) pontja „sub-arc”-ról beszél. Ez mintha arra utalna, hogy most a valós test fölött dolgozunk. Jól látom ezt? Ha nem, akkor mit is értünk egy komplex analitikus görbe „rész-ívén”?

Ez a Definíció, sőt, az egész 4.3 szakasz, egyszerre foglalkozik a valós- illetve a komplex sík görbéivel. Szerencsétlen választás volt a „sub-arc” kifejezés, amit csak valós görbékre használnak. Jobb lett volna így fogalmazni:

„no (non-empty) open subset of $\mathcal{E}$ is contained in any $\gamma^{(t)} \in \Gamma$;

(B) kérdések:

Mi ismert a következő kérdésről: Ha A, B, C, F olyanok, mint azt az 1.4.2 Tétel konklúziója állítja, következik-e, hogy általános helyzetű X, Y, Z -vel a tétel feltétele is teljesül? Vagy ellenkezőleg, lehet-e azt várni, hogy a tétel úgy erősíthető, hogy a feltételekből még az is következik, hogy a tétel hátterében szereplő G csoport nilpotens lesz?

Az 1.4.1 Definíció és az 1.4.2 Tétel jelöléseit használom. A kérdésben említett két lehetőséget külön-külön vizsgálom.

1. Mit mondhatunk az X, Y, Z halmazok struktúrájáról?

Tekintsük a G csoportban az $H = \alpha^{-1}(X)$ részhalmaz Hy eltoltjait, ahol $y \in \beta^{-1}(Y)$. A feltétel szerint ezek között legalább $n^{1-\eta}$ olyan van, amelyik legalább $n^{1-\eta}$ pontban metszi a $\gamma^{-1}(Z)$ halmaz inverzét. Másrészt, ha X elég általános helyzetű, akkor a Hy eltoltak közül bármely kettő csak korlátos sok pontban metszi egymást, ami ellentmond az előbbinek. Tehát csak nagyon speciális helyzetű X halmazokhoz tudunk olyan Y és Z halmazt találni, ami kielégíti az 1.4.2 Tétel feltételeit. (Ez nem mond ellent az „általános helyzet” feltételnek, hiszen ott pontosan meghatároztuk, milyen konfigurációkat zárunk ki, ettől még X lehet „nagyon speciális” ebben a mostani értelemben). Nem tudok olyan eredményről, ami pontosan a fenti tulajdonságú H részhalmazokkal foglalkozik. De van két ennél valamivel erősebb megszorítás, amit sokan vizsgáltak.

Azt mondjuk, hogy H -nak kicsi a „doubling”-ja, ha $|H^2|/|H|$ kicsi. Egy friss áttekintő cikk: [2]. Ebből kiderül (4.2 Tétel), hogy minden ilyen H halmaz lefedhető egy „approximate subgroup” korlátos sok eltoltjával, tehát a kis „doubling” vizsgálata „lényegében” ekvivalens az „approximate subgroup”-ok vizsgálatával.

Azt mondjuk, hogy H egy „ K -approximate group”, ha $H^2 = HY$ egy legfeljebb K elemű $Y \subseteq H$ részhalmazra. Az ilyen halmazokról szól a Disszertáció 2. és 3. fejezete (egy másik, lényegében ekvivalens definícióval). Kiderül, hogy H lefedhető egy virtuálisan feloldható csoport korlátos sok eltoltjával (2.13.4. Corollary, pontosabb leírás: 3.1.2 Polynomial Inverse Theorem). Breuillard, Green és Tao [3] pedig belátták, hogy virtuálisan feloldható helyett itt (azaz komplex algebrai csoportokban) H egy nilpotens részcsoporthoz mellékosztályokkal is lefedhető. Később a [4] cikkben pedig belátták, hogy H lefedhető egy nála nem sokkal nagyobb „coset nilprogression”-nal. (A „coset nil progression” a mellékosztályok és a számtani sorozatok közös általánosítása. Később, a Helfgott-Lindenstrauss sejtés kapcsán majd pontosan definiálom.) A fent említett [2] áttekintés ezeket az eredményeket is taglalja.

Elképzelhetőnek tartom, hogy hasonló struktúrális leírás adható a mi eredeti H halmazunkra is, bár az a priori nem „small doubling”.

2. Igaz-e, hogy a G csoport mindig nilpotens?

A korábbiak fényében remélhetjük (bár bizonyítani nem tudjuk), hogy H lefedhető egy N nilpotens részcsoporthoz korlátos sok mellékosztályával. N -nek van egy korlátos indexű részcsoporthoz, ami benne van G egy korlátos fokú összefüggő nilpotens részcsoporthozban (ilyeneket centralizátorokkal tudunk gyártani), tehát feltehetjük, hogy maga az N egy korlátos fokú összefüggő nilpotens részcsoporthoz.

Legyenek $H_1, \dots, H_k$ a H eltoltjainak N -nel vett metszetei, és X_i, Y_i, Z_i az eredeti X, Y és Z azon részhalmazai, amelyeket H helyett H_i -ből kapunk. Ha $N \neq G$ volna, akkor mindegyik X_i, Y_i és Z_i benne volna egy korlátos fokú részvarietásban, ami ellene mond az „általános helyzet” hipotézisnek. Ez alátámasztja azt a sejtést, hogy G nilpotens.

Az összes ismert példa (Example 1.4.3 a Disszertációban, és annak variációi) nilpotens G -ből származik. Hrushovski egy levélben felhívta rá a figyelmet, hogy a nem-kommutatív példákban X, Y és Z nem lehet általános helyzetű. Itt ugyanis a H halmaz képe a $G/\mathcal{Z}(G)$ faktorcsoporthozban legfeljebb $\mathcal{O}(n^{1-1/\dim(G)})$ méretű, tehát H -nak legalább $\Omega(n^{1/\dim(G)})$ pontja van a $\mathcal{Z}(G)$ centrum bizonyos mellékosztályaiban. Hrushovski szerint érdekes volna úgy gyengíteni az „általános helyzet” felételt, hogy a nilpotens példák is beleférjenek.

Van-e az 1.4.2 Tételnek olyan tartalmas változata, ami nem három, hanem több varietás direkt szorzatában tekint egy F részvarietást, és azt vizsgálja, hány pontot tud F tartalmazni a varietások n pontú részhalmazainak direkt szorzatából? Egy ilyen kérdésnek van-e olyan geometriai kapcsolata, mint az 1.4.2 Tételnek?

Többször próbáltam egy ilyen szituációt visszavezetni a háromtényezős esetre, másokkal is beszéltem erről a kérdésről: úgy tűnik, hogy ez a fajta redukciós érvelés nem működik. Viszont az eredeti bizonyítás jó eséllyel átvihető a többtényezős konfigurációkra is — bár ezt a gondolatot eddig még senki sem vitte végig.

Az világos, hogy egy soktényezőre vonatkozó, az 1.4.2 Tételre hajazó állításhoz könnyedén lehet gyártani számtalan szép kombinatorikai-geometria „alkalmazást”. A fő kérdés persze az, hogy van-e „meggyőző” alkalmazás, azaz olyan probléma, amit már mások is megkérdeztek, sok embert érdekel, és más eszközökkel nem tudjuk megtámadni. Ilyet egyelőre nem ismerek, talán éppen ez az oka annak, hogy az 1.4.2 Tételnek még nincsenek ilyen típusú általánosításai.

A 3. Fejezet címében szereplő Helfgott–sejtés mit is mond ki?

Ez a sejtés sokáig inkább csak a folklórban élt, nehéz pontos hivatkozást találni az eredetére, még az elnevezése sem teljesen egységes. Egy friss (és alapos) áttekintés: [1]. Ebben a Conjecture 1.15 így szól:

Sejtés (Helfgott–Lindenstrauss). *Legyen G egy tetszőleges csoport! Legyen A egy „ K -approximate subgroup” G -ben (azaz $A^2 = AY$ egy legfeljebb K elemű $Y \subseteq A$ részhalmazra). Ekkor vannak olyan $P, X \subset G$ véges részhalmazok, melyekre:*

- (1) $A \subset PX$.
- (2) $|X| \leq \mathcal{O}_K(1)$.
- (3) $|P| \leq \mathcal{O}_K(1)|A|$.
- (4) P egy „coset nilprogression”; azaz $P = HL$, ahol H egy véges részcsoport G -ben és L egy olyan véges részhalmaz a H csoport G -beli normalizátorában, $\mathcal{N}_G(H)$ -ban, amelyre HL/H egy $\mathcal{O}_K(1)$ -komplexitású nilpotens részcsoportot generál $\mathcal{N}_G(H)/H$ -ban (azaz a generátorok száma, és a nilpotencia osztálya $\mathcal{O}_K(1)$).

A 163. oldalon a 6.1.6 Kérdés utáni diszkusszió a következő kérdést veti fel: Mi a helyzet a Szorzat-tétellel az alternáló csoportok esetén?

A Szorzat-tételben az ε konstans a véges egyszerű csoport Lie rangjától függ. Ugyanez a rangtól való függés jellemző a Disszertáció többi eredményére is. Az A_n alternáló csoport a körülbelül n rangú Lie típusú csoportokkal áll rokonságban: az ennél kisebb rangú Lie típusú csoportoknak nincs is A_n részcsoportjuk. A Szorzat tétel — az eredeti formájában — nem is érvényes rang-független ε konstanssal (lásd a Disszertáció 2.14 szakaszát). A legjobb, amire számíthatunk, egy $\varepsilon = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ becslés lenne, és ugyanilyen nagyságrendű becslés érvényes lehet az alternáló csoportokban is. Egyelőre semmilyen explicit felső becslés nem ismert arra, hogyan függ ε a rangtól.

Rokon téma a Babai sejtés (Conjecture 2.1.1 a Disszertációban), itt szintén rang-független becslésekre volna szükség. Alternáló csoportok esetén Helfgott és Seress [7] jelentős áttörést értek el a közelmúltban.

(C) kérdés:

Az értekezés beadásakor a 2. fejezet alapjául szolgáló [10]-es cikk még nem jelent meg. Történt azóta változás a cikk státuszában? Legalább be van már nyújtva közlésre?

A cikket 2010. decemberében nyújtottuk be közlésre. Hosszú elbírálás után, a bírálók kérésére, a cikket alaposan át kellett dolgoznunk. Az új (lényegesen olvashatóbb) változat 2014. október 31-én jelent meg elektronikusan a Journal of the AMS-ben.

HIVATKOZÁSOK

- [1] E. Breuillard, *A brief introduction to approximate groups*. in: *Thin groups and superstrong approximation*, MSRI Publications **61** (2013) <http://library.msri.org/books/Book61/files/15breu.pdf>
- [2] E. Breuillard, B. Green, T. Tao, *Small doubling in groups*, arXiv:1301.7718
- [3] ———, *Approximate subgroups of linear groups*, Geometric And Functional Analysis **21** (2011), no. 4, 774–819. arXiv:1005.1881
- [4] ———, *The structure of approximate groups*, Publ. Math. IHES **116** (2012), no. 1, 115–221, arXiv:1110.5008.
- [5] R. W. Carter, *Finite Groups of Lie Type, Conjugacy Classes and Complex Characters*, Chichester: Wiley (1985).
- [6] B. Green and I. Ruzsa, *Freiman's theorem in an arbitrary abelian group*, Jour. London Math. Soc. **75** (2007), no. 1, 163–175. arXiv:math.NT/0505198
- [7] H. A. Helfgott, Á. Seress, *On the diameter of permutation groups*. Annals of Mathematics **179** (2014), no. 2, 611–658. arXiv:1109.3550
- [8] P. Kleidman, M. W. Liebeck, *The subgroup structure of the finite classical groups*. LMS Lecture Notes 129, Cambridge Univ. Press (1990)
- [9] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **80**(1968)
- [10] L. Pyber and E. Szabó, *Growth in finite simple groups of Lie type*, J. Amer. Math. Soc. <http://www.ams.org/journals/jams/0000-000-00/S0894-0347-2014-00821-3/>

Tisztelettel:

Budapest, 2015. február 18.

Szabó Endre