VÁLASZ KÁROLYI GYULA BÍRÁLATÁRA

SZABÓ ENDRE

Nagyon szépen köszönöm a bíráló alapos munkáját. A megfogalmazott kritikai észrevételekkel teljes mértékben egyet értek. Az említett hibák és hiányosságok valóban hibák, hiányosságok. Sajnos a doktori eljárás nem ad lehetőséget a Tézisfüzet utólagos javítására.

A bíráló kérdezte:

> A pályamunkában a szerző számos kapcsolódó problémát és sejtést is megfogalmaz. A teljesség igénye nélkül kérdezem, hogy sikerült-e a disszertáció benyújtása óta ezek némelyikében lényeges előrelépést tenni?

Konkrét, a disszertációban megfogalmazott kérdésre tudtommal nem született válasz. Viszont sok témában történtek jelentős előrelépések. Most három ilyen témával szeretnék foglalkozni.

Raz, Sharir és Solymosi a [8] cikkükben belátják, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ egyforma méretű számhalmazok, és $f(u, v)$ egy kétváltozós polinom, akkor vagy $\big|f(A, B)\big| = \Omega\big(|A|^{4/3}\big)$, vagy pedig f nagyon speciális alakú: valamilyen h, ϕ, ψ egyváltozós polinomokból épül fel, $f(u, v) = h\big(\phi(u) + \phi(v)\big)$ vagy $f(u, v) = h\big(\phi(u) \cdot \phi(v)\big)$. Eredményük még általánosabb formában is kimondható. Felső korlátot adnak arra, hogy a $z = f(x, y)$ egyenletű felületnek maximum hány pontja eshet egy $A \times B \times C$ alakú rácsra, ahol $A, B, C \subset \mathbb{R}$ véges számhalmazok. Abban a speciális esetben, amikor a halmazok egyforma méretűek, $|A| = |B| = |C| = n$, a korlát $\mathcal{O}(n^{11/6})$. Érdemes ezt összevetni a Tézisfüzet 14. Tételével. Egyrészt a [8] cikkben csak speciális alakú valós felületekkel foglalkoznak, másrészt viszont a polinom fokától független explicit kitevőt kapnak, és eredményük akkor is használható, ha az A, B, C halmazok mérete nagyon különböző.

A Babai sejtés továbbra is nyitott. A legfontosabb kérdés jelenleg, hogy milyen rang-független becsléseket lehet bizonyítani. Ebben az irányban tett nagy előrelépést Helfgott és Seress [2]. Legyen G az n elemen ható szimmetrikus (vagy alternáló) csoport. Belátták, hogy tetszőleges generátorrendszerre nézve $\operatorname{diam}(G) = \exp\big(\mathcal{O}((\log n)^4 \log\log n)\big) = \exp\big((\log\log|G|)^{\mathcal{O}(1)}\big)$. Ez előtt a legjobb ismert korlát $\exp\big(\mathcal{O}(\sqrt{n\log n})\big)$ volt.

A Szorzat Tétel témakörében nagyon sok eredmény született. Most elsősorban a Lie-csoportokra való általánosításokról, illetve azok alkalmazásáról írok. de Saxcé [6] bizonyított egy diszkretizált Szorzat tételt tetszőleges egyszerű Lie csoportban. Ezt felhaszálva Benois és de Saxcé [1] kiterjesztették a

Date: 2015. február 18..

Spektális Rés tételt tetszőleges egyszerű Lie csoportra. Lindenstrauss és de Saxcé [3] belátták az Erdő–Volkmann probéma csoport-elméleti analógját: Az $SU(2)$ csoportnak minden sűrű Borel-mérhető valódi részcsoportja nulla Hausdorff-dimenziós. A bizonyítás egyik kulcs–eleme Bourgain diszkretizált Szorzattételének egy új, erősebb változata. Az eredményt később de Saxcé [7] kiterjesztette tetszőleges tetszőleges egyszerű Lie csoportra: itt is minden sűrű Borel-mérhető valódi részcsoport Hausdorff dimenziója nulla. Érdemes még megemlíteni Lindensrauss és Varjú [4], [5] eredményeit is. Ezek nem közvetlenül a Szorzat-tételről szólnak, de nagyon szoros kapcsolatban állnak vele. A [4] cikkben centrális határeloszlás tételt bizonyítottak egy véletlen bolyongásra az Euklideszi tér affin transzformációinak csoportjában, meglepően jó hibataggal. Ehhez újfajta Spektális Rés tételre volt szükségük. Az [5] cikkben pedig ennek a Spektrális Rés tételnek az analógját bizonyítják be egy véges test feletti affin transzformációk csoportjában.

Hivatkozások

[1] Y. Benoist, N. de Saxcé, *A spectral gap theorem in simple Lie groups.* preprint (2014). arXiv:1405.1808

[2] H. A. Helfgott, and Ákos Seress, *On the diameter of permutation groups.* Annals of Mathematics 179.2 (2014): 611-658. arXiv:1109.3550

[3] E. Lindenstrauss, N. de Saxcé, *Hausdorff dimension and subgroups of SU(2).* preprint (2013). http://www.ma.huji.ac.il/∼saxce/su2subgroups.pdf

[4] E. Lindenstrauss, P. P. Varjú, *Random walks in the group of Euclidean isometries and self-similar measures.* preprint (2014). arXiv:1405.4426

[5] E. Lindenstrauss, P. P. Varju, *Spectral gap in the group of affine transformations over prime fields.* preprint (2014). arXiv:1409.3564

[6] N. de Saxcé, *A Product Theorem in simple Lie groups.* preprint (2014). arXiv:1405.2003

[7] N. de Saxcé, *Borelian subgroups of simple Lie groups.* preprint (2014). arXiv:1408.1579

[8] O. E. Raz, M. Sharir, and J. Solymosi, *Polynomials vanishing on grids: The Elekes-Rónyai problem revisited.* Annual Symposium on Computational Geometry. ACM, 2014. arXiv:1401.7419

Tisztelettel:

Budapest, 2015. február 18. Szabó Endre