

January 30, 2014

Szabo Endre doktori értekezésének biralata

I. Általános megjegyzések

Elso megjegyzésem magára a biralatra vonatkozik: elnezest kerek a lemaradt ekezetekért.—A továbbiakban az értekezésről fogok szólni.

A disszertációt kivalónak találtam. A jelölt olyan témában produkált elsorangu eredményeket, amikről nemcsak azt mondhatjuk el, hogy hosszú idő óta rendkívül népszerűek, de azt is, hogy e témakon Fields- és Abel-díjasok közül is többen dolgoznak vagy dolgoztak. Szabo idonként ezekkel és más nagyagyukkal versenyben érte el eredményeit, idonként pedig alaposan kiterjesztette azok korábbi teteleinek érvényességét. Az értekezés meggyőzően bizonyítja Szabo matematikai kvalitásait: rendkívül széleskörű tudását és érdeklődését, kepesseget nagyívű bizonyítások felfedezésére és végigvitelére, de azt a kepesseget is, hogy frappáns ötleteivel rövid és elegáns bizonyításokat adjon.

Ahogy a címe is jelzi, a disszertáció főleg azzal foglalkozik, hogyan lehet algebrai geometriai csoportelméleti és kombinatorikai (“Erdős-geometriai”) celokra felhasználni. Az algebrai geometriából először is olyan alapfogalmak és –eredmények kerülnek felhasználásra, mint varietások, dimenzio, fokszám, algebrai halmazok varietásokra bontása; másodszor az algebrai csoportok elmélete, amire kis egyszerűsítéssel a Lie-csoportok elméletének tetszőleges alaptestre érvényes kiterjesztéseként lehet gondolni; harmadszor pedig Hrushovsky modellelméleti indíttatású eredményei. Az alant következő részletesebb értekezésben két témával foglalkozom, ezeket látom a disszertáció legsúlyosabb részenek. A két temat az első két fejezet tartalmazza, a továbbiak az itteni eredményeket fejlesztik tovább vagy alkalmazzák különbozó problémákra. Természetesen itt nem holmi triviális alkalmazásokra kell gondolni, a későbbi fejezetek is telis-tele vannak jó gondolatokkal.

A biralatomban a hivatkozási számok a disszertáció irodalomjegyzékének felelnek meg.

II. Direkt szorzatok és függvénygrafok

Az első fejezet Elekes Györggyel közös munka, Elekes és Ronyai egy eredményt fejleszt ki tovább óriási mértékben. A következő problémát vizsgálja. Legyenek A, B és C azonos, d dimenziójú projektív varietások, mondjuk a komplex számok felett. Például lehetnek a k dimenziós komplex projektív tér oszszefuggó reszsokaságai; az eredmény akkor is érdekes, ha $A = B = C$ egyszerűen az 1-dimenziós projektív tér, vagyis a Riemann gömb. Tekintsünk egy $2d$ dimenziós $F \subset A \times B \times C$ reszvarietást, amire úgy gondolhatunk, mint egy $A \times B \rightarrow C$ függvény grafjára, csak éppen megengedjük, hogy ez a függvény többértékű legyen. F -ről csak annyit követelünk meg, hogy $A \times B$ -re, $B \times C$ -re és $A \times C$ -re vett vetülete szurjektív legyen. Tekintsünk továbbá n általános helyzetű pontból álló $X \subset A$, $Y \subset B$ és $Z \subset C$ reszhalmazokat, és tegyük fel, hogy F az $X \times Y \times Z$ direkt szorzatból kis híján n^2 pontot tartalmaz. A 1.4.2 Tétel ilyen körülmények között azt állítja, hogy ha n kelletlenül nagy, akkor A, B, C, F -nek egy

G algebrai csoportból kell származnia. A legegyszerűbb esetben ez azt jelenti, hogy A, B, C izomorf G -vel és az izomorfizmusnal F a

$$G_{\text{sp}} = \{(a, b, c) \in G^3 : abc = 1\}$$

reszsokaságnak felel meg. Altalában ennél csak egy gyengébb kapcsolatot lehet garantálni a varietasaink és egy algebrai csoport között: a $G \rightarrow A$ stb. izomorfizmusok helyett csak tobberteku rakepezések lehetnek. Az Elekes–Ronyai tételnek hasonló volt a konklúziója, de Elekes és Ronyai csak azt az esetet vizsgálták, amikor $A = B = C = \mathbb{R}$ a valós egyenes és F egy polinomnak (tehát egyverteku függvénynek) a grafja. Az ő értelmezésükben a “kis híján n^2 ” kitétel is erősebb megkövetelés volt, mint most.

A bizonyítás két pilléren nyugszik. Az egyik az 1.2.6 Tétel. Ez a projektív tér algebrai halmazainak egy d dimenziós V családjából tekint v darab algebrai halmazt és azt vizsgálja, hogy ez a v darab halmaz a projektív tér adott p pontjával hány illeszkedést (tartalmazási relációt) tud produkálni. Szemerédi és Trotter oldották meg először ezt a problémát abban a speciális esetben, amikor az algebrai halmazok síkbeli egyenesek. A továbbiakban sokan foglalkoztak ezzel a kérdéssel, számos alkalmazásával és általánosításával. Elekes és Szabo bevezetik a pontokból és halmazokból álló rendszer *kombinatorikai dimenziójának* a fogalmát, és ha ez a dimenzió $k \geq 2$, az illeszkedések I számára a következő becslést adják:

$$I \leq C(p^\alpha v^{k(1-\alpha)} + p + v \log(2p)).$$

Itt α körülbelül $1 - 1/k$ (annál egy picit nagyobb), C pedig egy olyan konstans, ami megint csak a rendszer kombinatorikai komplexitásától, α -tól és a V család néhány alapvető algebrai geometriai karakterisztikájától függ. (A Szemerédi–Trotter tétel a speciális esetben lenyegeben ugyanezt a becslést adja, $k = 2$ és $\alpha = 2/3$ paraméterekkel, ami az általános Elekes–Szabo tételben éppen nincs megengedve; a speciális esetben a $\log(2p)$ tényező is elhagyható. Hasonló becslést adott Solymosi és Tao valós algebrai halmazok és pontok illeszkedésére. Ez utóbbi mu, [145], valószínűleg függetlenül született Elekes–Szabo [48]–as cikketől, mindenesetre egyik se hivatkozik a másikra. [48] először 2008-ban lett benyújtva közlésre, a végleges változat 2011 szeptember 20-án; [145] először 2011 március 21-en lett benyújtva, akkoriban jelent meg első változata is az arxivon, a végleges változat pedig 2012 január 27-en lett benyújtva.)

A bizonyítás másik pillére Hrushovski egy nagyon általános tetele. Ennek az alábbi jellegű speciális esetére van sikere az értekezésnek. Tegyük fel, hogy adottak P, Q, R, S és T projektív algebrai varietások, továbbá $P \rightarrow Q$ ill. $Q \rightarrow R$ tobberteku F_t ill. G_s függvényeknek T -vel ill. S -sel parameterezett családjai. Tegyük fel, hogy $\dim S = \dim T = d$ és a $G_s \circ F_t$ családot szintén lehet egy d dimenziós varietással parameterezni. (A család természetes módon $S \times T$ -vel, tehát egy $2d$ dimenziós varietással parameterezhető; a feltétel azt követeli meg, hogy a kompozíciók között rendkívül sok egybeesés legyen.) Akkor a varietasaink és F_t, G_s függvényeink egy d dimenziós Γ algebrai csoport valamilyen V varietason való hatásából származtathatóak egy egyszerű recept szerint. Az értekezés ennek a speciális esetnek (1.3.6 Lemma) megadja a bizonyítást, abból a megfontolásból, hogy az általános tételnek és bizonyításának modell-elméleti nyelvvezete és eszközei az értekezés átlagolvasója számára valószínűleg nehezen emészthetőek lennének.

Ebből a két eredményből az 1.4.2 Tétel a következőképpen vezethető le. Apro redukció után feltehető, hogy minden $s \in C$ -re az

$$\{(a, b) \in A \times B : (a, b, s) \in F\}$$

halmaz egy $F_s : A \rightarrow B$ tobbberteku függvény grafja. Tekintsük az $\{F_s^{-1} \circ F_t : s, t \in C\}$ családot. Az 1.2.6 (Illeszkedési) Tétel alapján Elekes és Szabo belátják, hogy ez a család d dimenziós varietással parameterezhető. Következésképpen Hrushovsky tetele alkalmazható, amiből a kívánt állítás egyszerűen következik.

A fejezet két alkalmazással zárul. Az egyik megjavítja Megyesi és Szabo korábbi eredményét, ami Hirzebruchnak kúpszeletek közötti érintkezések maximális számára vonatkozó kérdésére válaszolta meg. A másik korszakok háromszoros metszéspontjait vizsgálja, és egy Erdős–Lovász–Vesztergombi cikkben felvetett problémának adja teljes megoldását.

Az, hogy éppen a témában illeszkedési becslések fontos szerepet játszanak, már az Elekes–Ronyai cikkből is kiderült. Amennyire meg tudom állapítani, az a gondolat, hogy Hrushovsky tetele is szerepet játszhat, az ennek a fejezetnek az alapjául szolgáló cikkben merült fel először.

III. Novekedés csoportokban

Az értekezés második, legterjedelmesebb fejezete Pyber Lászlóval közös munka [132,133]. Tekintsük egy véges G csoportnak egy α reszhalmazát. A fejezet azt vizsgálja, hány elemet kapunk, ha α -ból kepezett parokat, hármasokat, stb. összeszorozunk. Jelöljük az α -ból kepezhető m tenyezés szorzatok halmazát α^m -nel. Az várható, hogy m -mel α^m számossága novekedni fog, de persze, mivel véges csoportban vagyunk, ez a novekedés nem tarthat a végtelenségig. Pontosabban legfeljebb addig tarthat, amíg α^m nem lesz egy csoport. A kérdés az, milyen utemu ez a novekedés, amíg α^m nem valik csoportta, vagy egy csoportra sok tekintetben hasonló komplexussa.

Az már korábban is ismert volt, hogy elsősorban szimmetrikus α -val (vagyis amikor $\alpha^{-1} = \alpha \ni 1$) és az $m = 3$ értékekkel kell elsősorban foglalkozni. Míg kommutatív csoportban már α^2 elemszámát is jól meg lehet becsülni alulról (ld. Freiman–Ruzsa tételt és továbbfejlesztéseit), addig általános csoportokban példák mutatják, hogy α^2 nem nagyon becsülhető. Mafelöl α^m merete $m > 3$ -ra szoros kapcsolatban van α^3 és a szimmetrizált $(\alpha \cup \alpha^{-1} \cup \{1\})^3$ halmaz meretével (ezt az észrevételt az értekezés Ruzsanak tulajdonítja). A fejezet foeredményeinek a következő kettőt (és általánosításait) tartom:

A 2.1.4 Szorzat-tétel szerint, ha q egy primhatvány, $n = 2, 3, \dots$ és $\Gamma \subset \text{SL}(n, q)$ egy egyszerű reszcsoport, akkor letezik egy n -től függő $\epsilon > 0$ a következő tulajdonsággal: Γ -nak tetszőleges α generator-rendszerére

$$\text{vagy} \quad \alpha^3 = \Gamma \quad \text{vagy} \quad |\alpha^3| \geq |\alpha|^{1+\epsilon}.$$

A 2.13.4 Következmeny szerint pedig, ha $\mathbb{F}$ egy test, $\alpha \subset \text{SL}(n, \mathbb{F})$ egy véges halmaz és $K = |\alpha^3|/|\alpha|$, akkor letezik egy $\Delta \subset \text{SL}(n, \mathbb{F})$ virtualisan feloldható reszcsoport, aminek $\leq K^m$ mellekosztálya lefedi α -t. Itt m egy n -től függő egész, és Δ virtualis feloldhatóságon azt értjük, hogy tartalmaz egy véges indexu feloldható reszcsoportot.

Abban az esetben, amikor $n = 2$ vagy 3 és q primszám, a Szorzat-tétellel rokon eredményt bizonyított Helfgott 2008-ban és 2011-ben. E két eredmény és Helfgott ötletei nagyban befolyásoltak a későbbi kutatásokat. Az általános

Szorzat-tételhez nagyon közeli eredményeket bizonyított Breuillard, Green és (megint!) Tao. Ez utobbiak ugyanakkor jelentettek be eredményüket 2010-ben, mint Pyber és Szabo.

A bizonyítás a fentebb kimondottaknál általánosabb körülmények között vizsgálja bizonyos G algebrai csoportok veges α reszhalmazainak a növekedését. Az már korábban világos volt Gowers és Nikolov–Pyber munkája alapján, hogy tetszőleges veges Γ csoportban $\alpha^3 = \Gamma$, ha az $|\alpha|/|\Gamma|$ arány nagyobb, mint egy bizonyos küszob, amit Γ nemtrivialis reprezentációinak minimalis dimenzója határoz meg. Az még egészen világos, hogy ha $|\alpha|$ egy fix korlát alatt van, akkor mindkét fentebbi tétel áll. A kérdés tehát csak az, mit lehet mondani, ha az arány kisebb a küszobnál, de $|\alpha|$ nagyobb egy esetleg oriaszi de fix számmal. Mint mondtuk, feltehető, hogy α szimmetrikus. Ennek az esetnek a kivizsgálása az algebrai geometria eszközeivel a fejezet főerdeme.

Mivel algebrai geometria algebrailag zárt testek felett a leghatekonyabb, Pyber és Szabo—például az Szorzat-tétel bizonyítása során— algebrailag lezárja a $\mathbb{F}_q$ testet. Az $\mathbb{F}_q$ fölött definiált algebrai csoportoknak a $\overline{\mathbb{F}}_q$ lezárt fölötti pontjain hat egy σ Frobenius automorfizmus, aminek fixpontjai a csoport $\mathbb{F}_q$ -beli pontjai. Egyebek között Hrushovski egy tételének segítségével kapcsolat teremthető a fixpontok $G^\sigma \supset \alpha$ csoportjának számossága és $\Gamma \subset G^\sigma$ reprezentációinak minimalis dimenzója között. Ha most a $G \supset \Gamma$ algebrai csoportot úgyesen választjuk Γ -hoz (ehhez kapcsolódóan majd lesz egy kérdés a biralat V. szakaszában), akkor $|G^\sigma : \Gamma|$ és G egyéb karakterisztikai korlátozottak lesznek. Ebben az esetben (sőt, lényegesen általánosabban is) a 2.11.5 Tétel alkalmazható, és adja végül is $|\alpha^3|$ -re a Szorzat-tétel also becslését. A kulcsfontosságú 2.11.5 Tétel bizonyítása bonyolult, sok segédtevéből áll össze, itt most celtalan lenne akár csak megpróbálnom vázolni.

Osszefoglalva: a fejezet főeredményeinek hosszú bizonyítása számos ötletet felhasznál. Ezek egy részét Helfgott ihlette, vagy egyenesen tőle lettek kölcsönözve. Azonban sok gondolat itt jelenik meg először; a fejezet lényegesen melyebbre hatol az algebrai csoportok vizsgálatában, mint Helfgott cikkei.

Mint mondtuk, fejezet eredményeit bejelento [132]-es publikáció egyszerre jelent meg Breuillard–Green–Tao [24] cikkevel, ami nagyon hasonló eredményeket közöl, bár valamivel specialisabb körülmények között.

IV. Formai megjegyzések

A disszertáció általában nagyon jól van megírva. Szabo bonyolult bizonyításai világosak, a nem egészen standard fogalmakat, a hatteret és a motivációt gondosan és jól magyarázza el. Elírások és feleslegesen elbonyolítottak tünő megfogalmazások azért akadnak. Talán a bíráló feladata, hogy ezekről is beszámoljon, mindenesetre itt egy lista:

A 31. oldalon a reducibilitas–irreducibilitas fogalma fel lett cserélve, valószínűleg a többszörös tagadásnak estek áldozatul.

A 41. oldalon, amikor k először jelenik meg a 7. sorban, semmi magyarázat nincs rá; később megtudjuk, hogy $\dim G$ -t jelöli; de aztán az alulról 10. sorban k átvaltozik egy kombinatorikus dimenzióvá, melynek értéke $= 2$. (Ugyanebben a bizonyításban, néhány sorral lejjebb, k meg egy újabb szerepet kap, futo index lesz, de ez már senkit se zavarhat meg.)

A 2.12.3 Allitasban k definiciojabol kimaradt, hogy “nem trivialis” reprezentaciokrol van szo. Az ugyan vilagos volt, hogy a trivialis reprezentaciott ki kell zarni, de elkepzelheto lett volna, hogy csak huseges reprezentaciokra szoritkozva kell kiszamitani a minimumot. A 2.12.12 Allitasban ϕ -rol ki kell kotni, hogy monomorfizmus.

A 4.3.1 Definicioban, ha $G \subset \mathbb{R}^2$, nem kell megkovetelni, hogy f valos erteku legyen?

A 4.4.1 Tetelben jo lett volna megemliteni, hogy a G_i tartomanyok $\mathbb{R}^2$ -ben vannak (vagy $\mathbb{C}^2$ -ben?).

A fentebbiektol elteroen, az alabbi eszrevetelnek talan meg hasznat tudja venni a jelolt: angolul szokasosabb a fixpontot “fixed point”-nak nevezni, meg ha a Wikipedia el is ismeri az ertekezesben preferalt “fixpoint” valtozatot is.

Nekem ugy tunik, hogy a kombinatorikus dimenzio 1.2.1 Definiciot egyszerubb lehetett volna megadni a kovetkezoekppen: $\text{codim}_b(S, T) \leq k$, ha T -bol elhagyhato b csucs ugy, hogy a marado (S, T') paros graf ne tartalmazza a $K_{b+1, k}$ teljes paros grafot. Ez ugyan nem pontosan azt adja, mint az ertekezesbeli fogalom, de ha b -t megnovelhetjuk kb -re (es az ertekezesben ez nem valtoztat a lenyegen), akkor ez a fogalom ekvivalens lesz az ertekezesbelivel.

Az 1.2.5 es 1.2.6 Tetelekben az allitas foloslegesen bonyolultan van megfogalmazva. Folosleges ϵ -t es D -t bevezetni, egyszeruen azt lehet irni, hogy letezik egy $\alpha_0 > (k-1)/k$, hogy

$$\frac{k-1}{k} < \alpha < \frac{d(k-1)}{dk-1} \quad \text{ill.} \quad \frac{k-1}{k} < \alpha < \alpha_0$$

es $\beta = k(1-\alpha)$ valasztassal ez es ez a becsles all. Az igy megadott egyenlotlensegeket aztan egyszerubb lenne felhasznalni a 41. oldal vege fele.

A 4.4.1 Tetel attekinthetobb lenne, ha a “parcialis burkolo” fogalma nem jelenne meg; vegul is arrol van szo, hogy egy $\mathcal{E} \subset G_1 \cap G_2 \cap bG_3$ gorbere van szuksegunk, aminek minden pontja szingularis pontja f_3 -nak. Ez egy eleg termeszetes fogalom, meg ha nem is annyira geometriai, mint a parcialis burkoloe.

V. Kerdesek

Kerdeseim harom osztalyba sorolom. Az elso csoportba a nem kelloen alata-masztottnak talalt bizonyitasreszletekkel kapcsolatos kerdeseket vettem be, a masodikba meg azokat, amiket az ertekezes felkeltette matematikai kivancsi-sagom szult. A harmadik csoport egy kerdesbol all.

(A) A 86. oldal kozepen ez all: “But G is non-nilpotent, hence G has several maximal tori.” Ez miert igaz? Vagyis abbol, hogy G -nek csak egy maximalis torusza van, miert kovetkezik, hogy nilpotens?

Honnan tudjuk, hogy a 93. oldal elso mondatban felsorolt tulajdonsagu algebrai csoport letezik?

Mit ertunk “monomial” matrixon (2.14.1 Pelda)?

116. oldal. A 3.1.2 Tetelbol hogyan kovetkezik a Szorzat-tetel?

A 3.2.2 Allitasnak es a 3.2.5 Lemmanak mi a bizonyitasa (vagy mi egy meggyozo hivatkozas ezekre az eredmenyekre)?

A 4.3.7 Definicio (ii) pontja “sub-arc”-rol beszél. Ez mintha arra utalna, hogy most a valos test folott dolgozunk. Jol latom ezt? Ha nem, akkor mit is ertunk egy komplex analitikus gorbe “resz-iven”?

(B) Mi ismert a kovetkezo kerdesrol: Ha A, B, C, F olyanok, mint azt a 1.4.2 Tetel konkluzioja allitja, kovetkezik-e, hogy altalanos helyzetu X, Y, Z -vel a tetel feltetele is teljesul? Vagy ellenkezoleg, lehet-e azt varni, hogy a tetel ugy erositheto, hogy a feltetelekbol meg az is kovetkezik, hogy a tetel hattereben szereplo G csoport nilpotens lesz?

Van-e az 1.4.2 Tetelnek olyan tartalmas valtozata, ami nem harom, hanem tobb varietas direkt szorzataban tekint egy F reszvarietast, es azt vizsgalja, hany pontot tud F tartalmazni a varietasok n pontu reszhalmazainak direkt szorzatabol? Egy ilyen kerdesnek van-e olyan geometriai kapcsolata, mint az 1.4.2 Tetelnek?

A 3. Fejezet cimeben szereplo Helfgott-sejtes mit is mond ki?

A 163. oldalon a 6.1.6 Kerdes utani diszkusszio a kovetkezo kerdest veti fel: Mi a helyzet a Szorzat-tetellel az alternalo csoportok eseten?

(C) Az ertekezes beadasakor a 2. fejezet alapjaul szolgalo [133]-as cikk meg nem jelent meg. Tortent azota valtozas a cikk statuszaban? Legalabb be van mar nyujtva kozlesre?

VI. Vegkovetkeztetes

Az ertekezes magas szintu munka, a doktori fokozat odaitelesehez bosesegen elegendo matematikai tartalommal. Az sajnalatos, hogy a 2. fejezet alapjaul szolgalo cikk meg nem jelent meg (ha tenyleg nem jelent meg), annak ellenere, hogy az eredmeny eredetileg 2010 januarjaban lett bejelentve, majd 2010 majusaban a reszletek is felkerultek az arxivra. Az a teny, hogy az erre a cikkre epito [125] mar megjelent es [61] kozlesre van elfogadva szinvonalas nemzetkozi folyoiratban, azert jelzi, hogy [133] eredmenyeit a szakertok elfogadjak.

Az ertekezes nyilvános vitara tuzeset javaslom, es ha a vedes sikeres—specialisan a jelolt a fentebbi V. szakasz (A) csoportjaban feltett kerdeseimre kielegito valaszt ad—, javaslom az MTA doktora cim odaiteleset.

Lempert László
az MTA kulso tagja