A Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya részére

Opponensi vélemény Szabó Endre
"Application of Algebraic Geometry in Combinatorics and in Group Theory"
című akadémiai doktori értekezéséről

Az értekezés. Az angol nyelven írt, közel 200 oldal terjedelmű értekezés egy 20 oldalas bevezető áttekintést követően 7 számozott fejezetből áll, melyek a szerző egy-egy cikkét dolgozzák fel. Valamennyi cikk közös munka eredménye; a társszerzők Elekes György (3 cikk esetében), Nick Gill, Cheryl Praeger, Pyber László (4 cikk esetében), Ian Short, Simonovits Miklós, Pablo Spiga. Mivel a társszerzőség kérdése sokat vitatott téma, erre az érékelés végén még visszatérek. A cikkek nagy része igen színvonalas nemzetközi folyóiratban jelent meg. A "Growth in finite simple groups of Lie type" c. dolgozat például nemrég jelent meg online a Journal of the American Mathematical Society-nél, ami az Annals of Mathematics és az Acta Mathematica mellett a három legerősebb folyóirat egyike, viszont elfogadására csak másfél évvel a disszertáció benyújtása után került sor. Az "On tripe lines and cubic curves — the orchard problem revisited" pedig csak egy, az arXiv-ra feltett kézirat formájában létezik, ami — legalábbis részben —, magyarázatul szolgálhat a bírálat elhúzódására.

Az áttekintő részben a szerző a disszertáció eredményeit öt csoportba osztja, melyek két fő cím alatt foglalhatók legjobban össze: csoportokban történő növekedés, illetve illeszkedési geometria. Mindkét téma központi eredményében, de sokszor az alkalmazások során is fontos szerephez jut az algebrai geometria, ami Szabó Endre elvitathatatlan érdemét jelenti a szóban forgó munkákban. A két nagy témát azonban ennél sokkal több kapcsolja össze, hiszen azon túl, hogy szervesen illeszkednek az Elekes György által megkezdett és megálmodott programhoz, történetileg és tartalmilag is érezhető egymásra gyakorolt hatásuk.

Mindkét téma nagyon időszerű, intenzív nemzetközi kutatások homlokterében van. A Fields-érmes Bourgain és Tao neve mellett legyen elegendő megemlíteni ezen a ponton Babai, Helfgott, Hrushovski, Sarnak, valamint a legújabb magyar matematikus generáció kétségkívül legerősebb és legeredményesebb képviselője, Varjú Péter nevét. Az értekezés igen nehéz problémákkal foglalkozik, számos mély, régen várt eredményt tartalmaz. Mind ezek, mind a kidolgozott módszerek jelentős közvetlen hatást fejtettek már ki a két terület fejlődésére. Az alábbiakban a disszertáció eredményeit a fent megnevezett két témakör szerinti bontásban ismertetem és értékelem, az igen gazdag anyagból csak azokat a legfontosabbakat kiragadva, melyek viszonylag egyszerűen megfogalmazhatók.

Illeszkedési geometria. Az első fejezet központi eredménye az ún. felülettétel, melynek további alkalmazásai kerülnek bemutatásra a 4. és az 5. fejezetben. A Tao által Elekes–Szabó elméletnek titulált megközelítés számos Erdős-típusú nehéz geometriai probléma megtámadására, esetenként végső elintézésére teremt lehetőséget. A háromdimenziós tér egy felületét gazdagnak nevezzük, ha végtelen sok n-re található az alaptestnek három olyan n-elemű részhalmaza, melyek Descartes-szorzata a felületet legalább cn^2 pontban metszi. Az 1.1.3 Tétel, melynek pontos kimondása több oldalt venne igénybe, az ilyen felületek hathatós jellemzését adja meg. Az első ilyen jellegű eredmény Elekes és Rónyai nevéhez fűződik: a valós euklideszi tér azon speciális gazdag felületeit írja le, melyek megkaphatók valamely F kétváltozós polinom grafikonjaként. Ekkor a felület pontosan akkor gazdag, ha F előállítható úgy, hogy két egyváltozós polinom összegét vagy szorzatát helyettesítjük egy egyváltozós polinomba. Ez a tétel adott lehetőséget Purdy kombinatorikus geometriai sejtésének igazolására. Az 1.1.3 Tétel ezt több irányban terjeszti ki: a valós számok testéről a komplex számokéra, illetve polinomok grafikonjáról algebrai varietásokra, továbbá a gazdagság követelményén is enyhít. Kiderül, hogy a V algebrai felület pontosan akkor gazdag, ha V-nek van olyan irreducibilis komponense, ami vagy egy kétváltozós görbe feletti henger, vagy egy egydimenziós összefüggő algebrai csoportból származtatható valamely jól meghatározott módon. Az 1.4.2 Tétel ennek magasabb dimenziós változata.

A Hilbert-sémákat használó bizonyítás egyik alappillére egy geometriai illeszkedések számára vonatkozó becslés (1.2.6 Tétel), valamint az ún. kompozíciós lemma (1.3.6 Lemma), ami Hrushovski híres csoportkonfigurációs tételének viszonylag emberi nyelven elmagyarázható speciális esete. Röviden csak az elsőről ejtenék pár szót. Önmagukat nem metsző síkgörbék egy családjának szabadsági foka d, ha alkalmas c korláttal bármely két görbének legfejebb c közös pontja van, és bármely d ponton a görbék közül legfeljebb c halad át. A Pach–Sharir-tétel egy n-elemű ponthalmaz és egy m-tagú, d szabadsági fokú görberendszer között fellépő illeszkedések számára ad

$$O(n^{d/(2d-1)}m^{(2d-2)/(2d-1)} + n + m)$$

alakú becslést, ahol a multiplikatív konstans csak a c, d paraméterektől függ. Abban a speciális esetben, amikor minden görbe egyenes, a Szemerédi–Trotter tételt kapjuk viszsza. A felülettétel bizonyításához Elekes és Szabó ennek egy megfelelőjét adja komplex projektív térben, görbék helyett olyan algebrai részhalmazokra, amelyek valamely Y algebrai halmaz által paraméterezhető családhoz tartoznak. Az ehhez megtalált kulcsfogalom az illeszkedési gráf egy elég nagy b paraméter mellett rekurzív módon definiált kombinatorikus dimenziója, mely a Pach–Sharir-tételben minden esetben 2-nek választható. Az 1.2.6 Tételben bizonyított incidenciaszám becslésben a kitevők csak a rendszer kombinatorikus dimenziójától és az Y paraméterhalmaz dimenziójától függnek, a lineáris m tag helyett pedig $m \log n$ jelenik meg. Ez egy önmagában is nagyon érdekes eredmény, melynek vélhetően sok alkalmazása lesz még.

Az 1. fejezet végén két gyors alkalmazás kerül bemutatásra. Elsőként tekintsünk egy nem 2 karakterisztikájú test feletti projektív síkon n darab nemelfajuló kúpszeletet, melyek közül semelyik három nem érinti egymást ugyanabban a pontban. Hirzebruch egy sejtését igazolva Megyesi és Szabó korábban $O(n^{2-\varepsilon})$-os korlátot adtak ilyen görberendszerek érintkezési pontjainak számára. A kombinatorikus dimenzió alkalmazásával az exponens 9/5-re, 0 karakterisztikában pedig még tovább is csökkenthető.

Röviden arról van szó, hogy a kúpszeletek egy 5-dimenziós projektív tér pontjaival paraméterezhetők, melyben egy nemelfajuló kúpszeletet érintő kúpszeletek egy-egy hiperfelületet alkotnak. Kiszámolható, hogy az adott kúpszeleteket paraméterező pontok és a hozzájuk tartozó hiperfelületek rendszerének kombinatorikus dimenziója alkalmas b paraméter mellett legfeljebb 5-nek adódik, ami elvezet az elmlített becslésekre.

Másodjára vegyünk a síkon három pontot, majd mindegyik köré rajzoljunk egy-egy n darab koncentrikus körből álló rendszert. Hány olyan pont lehet a síkon, melyen az adott körök közül egyszerre három is áthalad? Elekes egy szép példája szerint, ha a három középpont azonos távolságban követi egymást egy egyenesen, akkor cn^2 hármas pont elérhető. A felülettétel segítségével itt bizonyítást nyer Erdős, Lovász és Vesztergombi azon sejtése, mely szerint nemkollineáris középpontok esetén a hármas pontok száma ennél jóval kevesebb lehet csak. Itt az alapgondolat a következő. Ha a három pont köré rajzolt három körnek van közös pontja, akkor a sugaraik négyzetéből alkotott hármas gyöke egy 3-változós másodfokú polinomnak, ami irreducibilis, ha a középpontok nem esnek egy egyenesre. Ha a sejtés nem lenne igaz, az a polinom gyökeiből álló felület gazdagságát jelentené, azonban a felülettétel alkalmazása után kapott algebrai számolások ellentmondásra vezetnek. A bizonyítás során kiadódik Elekes példájának tetszőleges kollineáris hármasra történő általánosítása is. (Megjegyzem, hogy ez utóbbi pusztán a koszinusz-tételre támaszkodva is könnyen megtalálható.)

A 4. fejezetben Szabó Endre Elekes Györggyel és Simonovits Miklóssal az előző jelenséget terjeszti ki koncentrikus körseregekről nagy általánosságban három folytonosan paraméterezett görbeseregre, amelyek megfelelnek bizonyos algebrai, analitikus és geometriai feltételeknek, melyeket nem részleteznék. Inkább csak a fejezet fő eredményének (4.4.1 Tétel) egy látványos alkalmazását említem meg, mely pozitív választ ad Székely egy kérdésére. A 4.5.1 Tétel szerint, ha adott a síkon három különböző pont, és mindegyikhez n darab, az illető pontra illeszkedő egységkör, akkor az így nyert három körrendszer hármas pontjainak száma $O(n^{2-\varepsilon})$.

Az 5. fejezet egy a gyümölcsöskert-problémához kapcsolódó struktúrális eredményt tárgyal. Ha adott n pont a síkon, akkor egyszerű leszámlálás mutatja, hogy legfeljebb $n^2/6$ olyan egyenes lehet, melyek az adott pontok közül legalább hármat tartalmaznak, ezeket tripla egyeneseknek nevezzük. Green és Tao friss eredményében pontosan meghatározza (elegendően nagy n esetén) a pontosan három ponton áthaladó egyenesek maximális számát. Az elliptikus görbékből, mint Abel-féle varietásokból kapható extremális konfigurációk közismertek. Szabó Endre Elekes Györggyel a következő eredményt bizonyítja (5.2.2 Tétel): ha egy d-ed fokú irreducibilis algebrai görbe $n > n_0(c, d)$ pontja legalább cn^2 tripla egyenest határoz meg, akkor a görbe szükségképpen harmadfokú. A bizonyítás a felülettétel mellett az alábbi fundamentális lemmára (5.3.8 Lemma) épít: ha a 0 közelében értelmezett három, néhány ésszerű feltételnek eleget tevő folytonos függvény grafikonjain választott három pont közötti kollinearitást egy A kommutatív topologikus csoport művelete segítségével lehet jellemezni, akkor a három grafikon egyesítése lefedhető egy harmadfokú görbével. (A jellemzés alatt azt értjük, hogy a függvények alkalmas A-ba történő átparaméterezése mellett három pont pontosan akkor esik egy egyenesre, ha összegük nulla.) Nyilván elég azt belátni, hogy a három függvény közös értelmezési tartományában bármely pontnak van olyan kis környezete, amelyben a grafikonok lefedhetők egy alkalmas harmadfokú görbével. Ehhez a szerző a Cayley–Bacharach tételre támaszkodva bizonyos 10 pontú konfigurációkat konstruál, melyeket aztán végtelen, ún. konzolos tartókká egészít ki. A Bezout-tételből következik, hogy ha egy harmadfokú görbe tartalmazza egy 10 pontú konfiguráció 9 specifikus pontját, akkor lefedi az egész konzolos tartót is. Ezután a lemma már könnyen igazolható egy kis ügyeskedéssel és egy folytonossági meggondolással. Kár, hogy ez a gyönyörű gondolatmenet nem került nyilvánosságra azelőtt, hogy Green és Tao bizonyították a saját eredményeiket, melyeknek egyik alappillére egy alapgondolatában nagy rokonságot mutató érvelés.

Növekedés csoportokban. A disszertáció minden tekintetben legfontosabb és legösszetettebb eredménye az úgynevezett szorzattétel, mely szerint az F véges test feletti 1 determinánsú $n \times n$-es mátrixok csoportjának, $SL(n, F)$-nek tetszőleges generátorrendszere exponenciálisan növekszik. Pontosabb megfogalmazásban a 2.1.4 Tétel a következő erősebb állítást mondja ki. Legyen A az L véges Lie-típusú egyszerű csoport egy generátorrendszere, és jelölje A^3 az A elemeiből képezhető háromtényezős szorzatok halmazát. Ekkor vagy A^3 kiadja az egész L csoportot, vagy elemszámára $|A^3| > c|A|^{1+\varepsilon}$ érvényes, ahol c és ε csak az L csoport rangjától függő pozitív konstansok. A tétel több irányban terjeszti ki Helfgott korábbi eredményeit. Közvetlen következménye Babai egy régi sejtésének igazolása korlátos rangú Lie-típusú véges egyszerű csoportokra: a 2.1.2 Tétel szerint, ha S egy szimmetrikus generátorrendszere az r rangú Lie-típusú L véges egyszerű csoportnak, akkor a $\Gamma(L, S)$ Cayley-gráf átmérője kisebb, mint $(\log |L|)^c$, ahol a c konstans csak r-től függ. A szorzattételt a Pyber–Szabó párossal párhuzamosan Breuillard, Green és Tao is igazolták, a Ree-csoportokat azonban akkor ők még nem tudták kezelni.

A közel 60 oldalas igen összetett bizonyítást, mely Helfgott $SL(3, Z/Z_p)$-re vonatkozó eredményének levezetésével állítható párhuzamba, nagyon nehéz lenne itt röviden összefoglalni, már csak a fogalmi nehézségek miatt is. Egy dolgot azonban mégis érdemes megemlíteni. Helfgott bizonyításának egyik kiindulópontja, hogy ha A^3 mérete az A halmazéhoz képest kicsiny, akkor A-nak egy maximális tórusszal vett metszete nem lehet sokkal nagyobb, mint $|A|$ egy bizonyos hatványa. Az adott véges test algebrai lezártja feletti összefüggő algebrai csoportokra vonatkozó, a szorzattételt magában foglaló 2.1.6 Tétel bizonyításához Pyber és Szabó a maximális tórusz fogalmát az ún. CCC-részcsoport fogalmával váltja fel (2.8.6 Definíció): a G algebrai csoportnak egy, a triviálistól és a csoport egységkomponensétől különböző részcsoportja CCC-részcsoport, ha előáll úgy, mint egy, az egységelemet tartalmazó irreducibilis zárt részhalmaz centralizátorának egységkomponense. Ennek a fogalomnak a megtalálása és használata a problémának olyan szintű megértését jelzi, amely szintén túlmutat a Breuillard–Green–Tao-féle bizonyításon, lehetőséget nyújtva Freiman–Ruzsa típusú struktúratétel igazolására is.

Az additív kombinatorika egyik legismertebb struktúrális eredménye, a Freiman–Ruzsa-tétel szerint, ha az egész számok egy A véges halmazára az $A + A$ összeghalmaz kicsi, akkor A lefedhető egy kis méretű általánosított számtani sorozattal. A tételt Z helyett tetszőleges kommutatív csoportra Green és Ruzsa terjesztették ki, itt az általánosított számtani sorozatok szerepét részcsoportok szerinti mellékosztály sorozatok veszik át. Az első nemkommutatív ilyen irányú eredmény Elekes és Király nevéhez fűződik, akik az $SL(2,R)$ csoportra találtak hasonló eredményt kommutatív részcsoportok szerinti mellékosztályokkal, Hrushovskinak $SL(n,C)$-re vonatkozó tételében pedig az Abel-féle részcsoportok szerepét a feloldható részcsoportok veszik át. Ebbe a sorba illeszkedik bele a 2.13.4 Következmény, mely szerint tetszőleges $SL(n,F)$ csoportra igaz, hogy minden kis növekedésű részhalmaz lefedhető egy virtuálisan feloldható részcsoport kevés mellékosztályával, vagyis egy olyan részcsoportéval, melynek van véges indexű feloldható részcsoportja.

A 3. fejezetben ennél pontosabb struktúratételt mutat be a szerző. A disszertáció 3.1.2 Tétele, mely azon kívül, hogy magában foglalja a szorzattételt és Helfgott korábbi eredményeit, Hrushovskinak modellelméleti bizonyítását is effektivizálja. A bevezetőben adott megfogalmazás szerint, ha A az $SL(n,F)$ csoportnak olyan véges részhalmaza, mely minden egyes elemével együtt annak inverzét is tartalmazza, akkor $|A^3| \leq K|A|$ esetén az A által generált részcsoportnak léteznek olyan $P \leq \Gamma$ normálosztói, melyekre A tartalmazza P egy mellékosztályát, Γ/P feloldható, és A lefedhető Γ-nak legfeljebb K^c darab mellékosztályával, ahol a c konstans csak n-től függ.

A dolgozat utolsó két fejezete további alkalmazásokat tárgyal. A 6.1.2 Tételben Szabó Endre szerzőtársaival Weiss egy permutációcsoportokra vonatkozó régi, sokat vizsgált sejtését igazolja Babai–Cameron–Pálfy-típusú csoportok osztályaira. Ennek részletezésétől eltekintenék; egyrészt elkerülendő a szükséges fogalmak bevezetését, másrészt mivel fontosabbnak is tartom a csoportok szorzatfelbontásaival foglalkozó 7. fejezetben foglaltakat. Liebeck és Shalev egy mély és hasznos tétele szerint, ha A a nemkommutatív G véges egyszerű csoport egy nemtriviális konjugáltosztálya, akkor $G = A^m$, ahol $m < c\log|G|/\log|A|$. Sejtésük szerint hasonló állítás igaz általában is: létezik olyan c univerzális konstans, hogy tetszőleges legalább 2 elemű A részhalmazra G előáll az A halmaz legfeljebb $c\log|G|/\log|A|$ számú konjugáltjának szorzataként. Liebeck, Nikolov és Shalev korábbi eredményeit megjavítva Szabó Endre szerzőtársaival a 7.1.3 Tételben bebizonyítja, hogy a sejtés igaz korlátos rangú Lie-típusú véges egyszerű csoportokra. Abban az esetben, amikor S elemszáma meghaladja G legkisebb nemtriviális konjugáltosztálya méretének negyedik gyökét, a bizonyítás a szorzattételen kívül épít Petridisnek egy új Plünnecke-típusú tételére, Gowers egy eredményére, valamint Landazuri és Seitz véges Chevalley-csoportok projektív reprezentációinak fokára vonatkozó alsó becslésére, a kis S halmazok esetét pedig egy ügyes kombinatorikus érveléssel intézik el. Ugyanebben a fejezetben megfogalmazásra és bizonyításra kerül egy új nemkommutatív Plünnecke-típusú egyenlőtlenség is (7.6.1 Lemma), mely elvezet az említett sejtés egy növekedési változatának megfogalmazásához.

A szorzattételnek a fentieken túl is számos jelentős alkalmazása található már az irodalomban és az interneten, elsősorban az expander-gráfokkal való összefüggésben. Breuillard, Green, Guralnick és Tao eredménye szerint például minden $r \geq 2$ esetén létezik olyan pozitív $\varepsilon(r)$, hogy egy r rangú véges egyszerű csoportban két véletlen elem által generált irányítatlan Cayley-gráf a csoport rendjének növekedésével egyhez tartó valószínűséggel lesz $\varepsilon(r)$-expander. A szorzattétel ugyancsak fontos szerepet játszik a Bourgain–Gamburd–Sarnak-féle ún. affin szita Golsefidy és Sarnak által kidolgozott effektív változatában, mely várhatóan számos mély számelméleti eredménynek lesz még forrása.

Kritikai észrevételek. A szerző nagy igyekezetet fordított arra, hogy a vizsgált problémákat, a bevezetett fogalmakat és az elért eredményeket többféleképpen megvilágítsa, példákkal illusztrálja, a heurisztikákat bemutassa. Mindezen törekvések ellenére a disszertáció igen nehéz olvasmány, és nem csak azért, mert hatalmas ismeretanyagra épít. Bizonyos definíciók, tételek többször is kimondásra kerülnek, de gyakran eltérő formában, melyeket nem mindig könnyű összeegyeztetni. A Pach–Sharir-tétel (1. Tétel) például mind a bevezetőben, mind a magyar nyelvű összefoglalóban hibásan van kimondva. A kombinatorikus dimenzió ezt követő megfogalmazásában (3. Definíció) felcserélődik a pontok és a részhalmazok szerepe, ami miatt aztán a 4. Megjegyzést sem lehet értelmezni, csak ha az ember azt összeveti a később már helyesen megadott 1.2.1 Definícióval.

A bizonyításokat sem mindig egyszerű követni. A Hirzebruch problémájával foglalkozó 1.5.1 Következmény nulla karakterisztikára vonatkozó állításának bizonyításánál például az 1.2.6 Tételre hivatkozik a szerző, de a $D = 4d - 4$ választás jogosságáról csak az említett tétel bizonyításának újraolvasásával győződhet meg az olvasó.

Az angol nyelvet helyesen, gördülékenyen használja a szerző, élvezetes olvasni. Sajtóhibát, kimaradt kötőszót alig találni. Nikolov és Pyber cikke kétszer is szerepel az irodalomjegyzékben, de hasonló hibát a pedáns Drmota és Tichy is elkövettek már "Sequences, Discrepancies and Applications" c. monográfiájukban. Összességében elmondható, hogy az értekezés gondosan megírt munka, a magyar nyelvű összefoglalóban szereplő említett hibákat viszont jó lenne kijavítani.

A társszerzőség kérdése. Napjainkban egyre többször szembesül a bíráló azzal a kérdéssel, hogyan állapítható meg egy jelölt érdemi hozzájárulása társzerzős munkák esetében. A gyakran elhangzó érv, mely szerint "igen neves társszerzőkkel dolgozik együtt", jelen esetben is alkalmazható, önmagában azonban véleményem szerint soha nem elfogadható. Aki az MTA Doktora címre pályázik, attól én személy szerint elvárom, hogy mindenképpen rendelkezzen fontos önálló eredményekkel is. Szabó Endre esetében többek között kiemelhető 1994-es "Divisorial log terminal singularities" című dolgozata, mely egyik legtöbbet idézett és felhasznált munkája.

Még ilyenkor is szemére vethető azonban a jelöltnek, ha benyújtott disszertációja kizárólag társszerzős munkákat mutat be. A jelen esetben ezzel szemben a következő érveket ajánlom a bíráló bizottság figyelmébe. A leggyengébb indok szerint a benyújtott mű könnyen szétszedhető lenne két olyan részre, melyek csupán a bennük foglaltakat tekintve külön-külön is elegendőek lennének egy MTA doktori disszertációnak. Nyomósabb érv, hogy a kidogozott módszerek a matematika oly sok területének (véges csoportok elmélete, reprezentációelmélet, Galois-elmélet, algebrai csoportok, algebrai geometria, kombinatorikus geometria, additív kombinatorika, függvényelmélet, modellelmélet) mélyen értő ismeretét feltételezik, mellyel egy személyben világviszonylatban is csak kevesen rendelkeznek. Ennél is fontosabb megjegyezni, hogy a szorzattétel bizonyításakor a Pyber–Szabó párosnak egy olyan félelmetes ellenféllel kellett úgymond felvennie a versenyt, mint a Breuillard–Green–Tao hármas, és még így is csak hajszál híján lett övék az elsőbbség egy olyan tétel bizonyításában, mely minden kétséget kizáróan a jelen század eddigi egyik legjelentősebb magyar matematikai eredménye.

Végezetül egy tudománypolitikai megjegyzés. Egyre világosabbá válik, hogy a magyar matematika több népszerű irányzatának — mint pl. az additív kombinatorika vagy az Erdős-féle kombinatorikus geometria —, eredményes művelésében komoly szerephez jut az algebrai geometria. Fried Ervin már a 80-as években erősen szorgalmazta egy olyan magyar algebrai geométer állandó jelenlétét, aki ezt a közösséget hathatósan ki tudja szolgálni. A jelen disszertáció ékesen bizonyítja, hogy Szabó Endre megfelel ezeknek az elvárásoknak.

Összegzés. Összefoglalva, az elbírálásra benyújtott értekezésben foglalt eredményeket igen érdekesnek és értékesnek tartom. A kidolgozott módszerek és alkalmazások széles tárgyi tudásról, mély megértésről, innovatív fogalomalkotó készségről és igen komoly bizonyítóerőről tesznek tanúságot. Egyértelműen megállapítható, hogy a korábbi fokozat megszerzése óta Szabó Endre jelentős eredeti tudományos eredményekkel gyarapította a tudományszakot, meghatározó módon járult hozzá annak további fejlődéséhez. A nyilvános vita kitűzését és az akadémiai doktori fokozat odaítélését mindenképpen indokoltnak tartom és messzemenően támogatom.

Kérdések. A pályamunkában a szerző számos kapcsolódó problémát és sejtést is megfogalmaz. A teljesség igénye nélkül kérdezem, hogy hogy sikerült-e a disszertáció benyújtása óta ezek némelyikében lényeges előrelépést tenni?

Budapest, 2015. február 4.

Tisztelettel:

Károlyi Gyula