

Bírálóí vélemény
Ferenczi Miklós
“Representation theory based on
relativized set algebras
originating from logic”
D.Sc. disszertációjáról

Ferenczi Miklós MTA doktori disszertációjának témája a *Tarski-féle algebrái logika* (mostantól AL) reprezentáció elméletének egyik legmodernebb fejezetéhez tartozik: **reprezentáció un. relativizált halmaz algebrák segítségével.**

Az AL bizonyos logikai gondolatok absztrakciójával indul, majd ezeket az absztrakciókat precíz algebrai környezetbe helyezi. Ezáltal alapvető kapcsolatokat épít ki a logika és az univerzális algebra között, de kapcsolódik a matematika más ágaihoz is, például geometriához, kombinatorikához, halmazelmélethez, topológiához. Azt lehet mondani, hogy az AL ma már egy karakteres külön ága a matematikának. A téma úttörői a 19. században Boole, DeMorgan, Peirce, Schröder, bár már előttük Leibniz és Pascal is fölvetették azt az alapvető gondolatot, hogy logikai problémákat időnként érdemes úgy megoldani, hogy először lefordítjuk őket az algebra nyelvére, az így kapott algebrai problémát megoldjuk az algebra hatékony eszközeivel, majd a kapott megoldást visszafordítjuk logikára.

Az AL Alfred Tarski és iskolájának kb. 1948-ban kezdődő munkája nyomán vált külön matematikai diszciplínává. E munka kiinduló pontja az volt, hogy a Boole algebrák elmélete hihetetlenül sikeresnek bizonyult a klasszikus ítélet kalkulus megismerésében. Ezt a diadal menetét szerették volna kiterjeszteni a predikátum kalkulusra.

Az ítélet kalkulusnak a Boole halmaz algebrák osztálya felel meg természetes módon. Stone ünnepezt tétele azt mondja ki, hogy:

(A) *A Boole halmaz algebrák véges sok azonossággal axiomatizálhatók, azaz végesen axiomatizálható varietást alkotnak.*

Ugyanennek a tételnek egy másik olvasata így szól:

(B) *Minden absztrakt Boole algebra reprezentálható egy Boole halmaz algebrával.*

Az (A) megfogalmazás egy ún. *axiomatizálhatósági tétel*, míg a (B) megfogalmazás egy *reprezentálhatósági tétel*. Látható, hogy axiomatizálhatóság és reprezentálhatóság kéz a kézben járnak, ugyanannak a dolognak két oldala.

Tarskinak és iskolájának az volt a célja, hogy a Boole halmaz algebráknak olyan általánosítását találják meg, amely a predikátum kalkulus algebrai megfelelője lehet. Továbbá természetesen azt szerették volna, ha az új algebra osztály hasonlóan szép lenne, mint a Boole algebrák: ha végesen axiomatizálható varietás lenne. Vagy legalábbis véges sok sémával axiomatizálható varietás vagy esetleg kvázi-varietás.

Mivel ítéletekről predikátumokra akarunk áttérni, természetesen adódik, hogy a Boole halmaz algebrák elemeit unér relációknak tekintsük, az általánosításuk pedig több argumentumú relációk legyenek. A legközvetlenebb ilyen általánosítás vezetett el a *cilindrikus halmaz algebrák* fogalmához, az egyenlőség mentes predikátum kalkulus esetében pedig a *poliadikus algebrák*hoz. Ezek tehát olyan Boole algebrák, melyeknek elemei relációk, vagyis sorozatok halmazai. Egy ilyen relációkból álló Boole algebra úgy néz ki, hogy adva van egy U halmaz és egy α rendszám, az algebra elemei pedig valamennyien az U elemeiből felépülő α argumentumú relációk. A Boole algebra legnagyobb eleme ${}^\alpha U$, a többi reláció pedig ennek részhalmaza. U -t az algebra *bázisának*, α -t pedig az algebra *dimenziójának* nevezzük. Ilyen módon, ha a dimenzió 3, akkor a legnagyobb elem egy *kocka*. Ezért ezeket az algebrákat *kockás algebráknak* is titulálják. A Boole műveletek mellett pedig az α argumentumú relációkhoz passzoló újabb műveleteket is felveszünk (*cilindrifikációk, diagonálisok, helyettesítések*). Ezekkel többek között azt is ki lehet fejezni, ha egy bizonyos elemét az algebrának inherensen kevesebb mint α argumentumúnak szeretnénk tekinteni (pl. véges dimenziós elemek).

Hamar kiderült, hogy relációk ilyen kockás algebráinak axiomatizálása sokkal összetettebb feladat, mint a Boole halmaz algebráké. Tarski heroikus erőfeszítést tett arra, hogy összegyűjtse a fenti módon definiált kockás cilindrikus halmaz algebrák leírásához szükséges összes azonosságot. Az első kísérlet után munkatársai találtak olyan, Tarski azonosság halmazát teljesítő algebrákat, melyek nem izomorfak egyetlen kockás cilindrikus halmaz algebrával sem. Az ilyen algebrákat *nem-reprezentálható* vagy *reprezentálhatatlan* algebráknak nevezzük.

Erre Tarski újabb azonosságokkal bővítette axiómarendszerét, hogy kizárja a talált nem-kívánatosakat. A munkatársak pedig, élen Leon Henkinnel, megint találtak a bővebb rendszert kielégítő nem-reprezentálható algebrát. Ez a játék még több lépésben folytatódott, és úgy tűnt, hogy sohasem lesz vége. Ezért egyszer csak leálltak vele. Az utolsó fázis az volt, amikor Tarski a [3] monográfiában megadott (C_0) – (C_7) axióma rendszert rögrítette. *(Absztrakt) cilindrikus algebrának* nevezett minden olyan algebrát, mely ezeket kielégítette. Henkin pedig talált egy végtelen nagy azonosság halmazt, melyeket *körhinta (merry-go-round)* azonosságoknak nevezett el. A körhinta azonosságoknak minden cilindrikus halmaz algebrában nyilvánvalóan teljesülniük kellett, és Henkin bebizonyította, hogy ezek nem következnek a (C_0) – (C_7) axióma rendszerből.

Bár csöppet sem érdektelen, mégsem szeretném most felidézni azokat a nagyon érdekes és nem-triviális eredményeket, melyek arról szólnak, hogy az absztrakt cilindrikus algebrák általában nem reprezentálhatók kockás cilindrikus halmaz algebrákkal, sőt, a megfelelő halmaz algebra jelöltek axiomatizálása csak mélyenszántóan végtelen, és sokrétűen komplikált lehet. Ezeket az eredményeket sok publikáció részletesen áttekinti, ld. pl. [1], [4], [5], [6]. Noha pozitív részeredmények is keletkeztek a cilindrikus algebrák reprezentáció elméletében, az első átütő eredmény Diane Resek (Henkin tanítványa) disszertációjában található. Resek a Tarski által bevezetett (C_0) – (C_7) azonosságok és a Henkin által bevezetett körhinta azonosságok összessége által meghatározott absztrakt osztályt reprezentálja olyan halmaz algebrákkal, melyek az eddigiektől abban térnek el, hogy legnagyobb elemük nem kocka-szerű, hanem a kockának csak egy részhalmaza. Ezeket az új fajta halmaz algebrákat *relativizált halmaz algebráknak* nevezzük.

Pontosabban, Resek a következőt bizonyította. Jelölje $\mathbf{Crs}_\alpha$ az α dimenziós cilindrikus relativizált halmaz algebrák osztályát (ld. pl. Def.1.1), $\mathbf{CA}_\alpha$ az α dimenziós cilindrikus algebrák osztályát (ld. pl. Def.1.5). Resek azt bizonyította, hogy

a $\mathbf{Crs}_\alpha \cap \mathbf{CA}_\alpha$ osztály olyan varietás, melyet axiomatizál a
 $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} “(C_0)$ – (C_7) +körhinta azonosságok” azonosság halmaz.

Ezt az eredményt Richard Thompson javította két módon is:

- Egyrészt, a Γ azonosság halmazt úgy módosította, hogy a végtelen sok körhinta azonosságból csak kettőt tartott meg, mostantól ezeket MGR-rel jelöljük; a (C_4) axiómát pedig gyengítette. Ezt az új, kisebb halmazt jelöljük Σ -val. Tehát Σ a véges dimenziós esetekben egy *véges* azonosság halmaz, egyébként véges sok sémával megadható azonosság halmaz.

- Másrészt, Thompsonnál a Σ -nak megfelelő D_α halmaz algebra osztály a Crs_α következő egyszerűen módosított változata:

$$D_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{A} \in \text{Crs} : (\forall i, j \in \alpha)(\forall f \in 1^\mathfrak{A})f(i/f_j) \in 1^\mathfrak{A}\}.$$

(Ld. Def.1.2.)

Resek tételének rettentő hosszú a bizonyítása, ezért sohasem publikálta a disszertációján kívül; Thompson bizonyítás elméleti jellegű bizonyítása pedig sohasem lett rendesen leírva; viszont Thompson tételére Andréka Hajnal készített egy aránylag rövid áttekinthető, Thompsonétól lényegesen különböző szemantikai jellegű bizonyítást, ld. [2]. Ez a tétel, melyet mostantól RTA tételnek nevezünk Jelölt nyomán, a következőt állítja. **I** jelöli az izomfia operátort, $\text{Mod}(\Delta)$ pedig a Δ formula halmaz modelljeit tetszőleges Δ esetén.

$$\text{ID}_\alpha = \text{Mod}(\Sigma) \text{ minden } \alpha \geq 2 \text{ dimenzió esetén.}$$

Jelölt az RTA tételből indul ki, a disszertáció első részének első fejezetében (Part I, Chapter 1) ezt fejleszti és elemzi. Például a (C_4) axióma Thompson féle $(C_4)^*$ gyengítésének megadja három ekvivalens új formáját (Lemma 1.4), melyek szintén érdekesek. Ily módon az ID_α osztály újabb axiomatizálásaihoz jut el. Pl. a Thm.1.15 tételbeli axiomatizálás azért elegáns, mert benne a cilindrifikációk kommutativitását kimondó (C_4) axiómát egy másik kommutativitást: helyettesítések kommutativitását kimondó axiómára cseréli.

Az első fejezetből a második fejezetbe a gondolati átmenetet a következő észrevétel nyújtja. Az RTA tétel Andréka-féle bizonyításából kiderült az, hogy az MGR axióma séma az ${}_k s(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} s_i^k s_j^i s_k^j$ transzpozíció operátornak egy fontos tulajdonságát fejezi ki. Az RTA reprezentáció azon múlt, hogy ezt a tulajdonságot bevették az elméletbe. Jelölt felteszi a kérdést, hogy az ennél egyszerűbb de sokban hasonló p_{ij} operátor tulajdonságai milyen szerepet játszhatnak a reprezentáció elméletben. Erről szól Part I Chapter 2. Itt olyan algebra osztályokról van szó, melyek a cilindrikus algebrák bővítései a p_{ij} operátorral és esetenként még más poliadikus helyettesítésekkel mint műveletekkel.

Egy **Trs** (*relativizált transzpozíció halmaz algebra*) egy olyan **Crs**, melyet a p_{ij} absztrakt operátornak megfelelő P_{ij} reprezentált operátorral bővítünk ki, ez a p_{ij} szándékolt jelentése. Ha egy **Crs** legnagyobb eleme V , akkor

$$P_{ij}^V X = S_{[i,j]}^V \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in V : y \circ [i, j] \in X\}$$

minden $i, j \in \alpha$ -ra és $X \in A$ -ra ($[i, j]$ az y elemeiben az i -edik és j -edik elemet cseréli föl). Jelölt ezt az operációt $[i, j]^V$ -vel jelöli – ami szerintem nem szerencsés. Vö. Def.2.1.

Egy **Gwt** (*általánosított gyenge relativizált halmaz algebra*) hasonló változata **Trs**-nek, mint amilyen **Gws** a **Crs**-nek cilindrikus algebráknál, mégpedig egy **Trs** akkor **Gwt**, ha legnagyobb eleme gyenge terek uniója (Def.2.2).

Egy **TA** (*transzpozíció algebra*) pedig egy olyan absztrakt osztály, melyben a cilindrikus műveleteken kívül még p_{ij} és s_j^i absztrakt poliadikus helyettesítések is vannak (minden lehetséges i, j -re). **TA**-t 11 azonosság séma definiálja, ld. Def.2.3. Ez az osztály a [7]-beli véges egyenlőséges poliadikus algebrák olyan gyengítése, melyben a cilindrikációk kommutativitását kimondó (F5) axiómát az előző fejezet-beli egyik gyengítése (ott $\neg(C4)$, itt $(F5)^*$, ld. Def.2.3) helyettesíti. A véges egyenlőséges poliadikus algebrákat jelen dolgozat *erős transzformáció algebrák*-nak nevezi, és **TAS**-sal jelöli.

Jelölt egy **TA** típusú algebrát *r-reprezentálhatónak* nevez, ha izomorf egy **Trs**-sel. A fejezet fő tétele a Thm.2.8, mely ezt mondja: minden $\alpha \geq 3$ -ra

$$\mathfrak{A} \in \mathbf{TA}_\alpha \iff \mathfrak{A} \in \mathbf{IGwt}_\alpha.$$

E tétel következménye Coroll.2.9: $\alpha \geq 3$ -ra

$$\mathfrak{A} \in \mathbf{TAS}_\alpha \iff \mathfrak{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{Gwt}_\alpha \cap \mathbf{Mod}(F5)).$$

Ez a két tétel párhuzamba hozható a cilindrikus esettel, amikoris

$$\mathfrak{A} \in \mathbf{CA}_\alpha^- + \mathbf{MGR} \iff \mathfrak{A} \in \mathbf{ID}_\alpha,$$

és

$$\mathfrak{A} \in \mathbf{CA}_\alpha + \mathbf{MGR} \iff \mathfrak{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{Crs}_\alpha \cap \mathbf{CA}_\alpha).$$

Fent $\mathbf{CA}^-$ a **CA** azon gyengítése, amikor (C_4) -et $\neg(C_4)$ -ra cseréljük. Mindkét esetben a második ekvivalencia “hibrid” osztályt tartalmaz ($\mathbf{Gwt}_\alpha \cap \mathbf{Mod}(F5)$ ill. $\mathbf{Crs}_\alpha \cap \mathbf{CA}_\alpha$) míg párjuk elegánsabb.

Az első rész utolsó fejezete (Part I, Chapter 3) egyenlőséges poliadikus- és un. m -kvázipoliadikus algebrákkal foglalkozik. Az általános poliadikus algebráktól eltérően, itt többnyire csak olyan cilindrikációkat használ Jelölt, melyek indexe az α dimenzió halmaznak egyetlen eleme, nem pedig esetleg nagyobb részhalmaza.

A poliadikus- és a kvázi-poliadikus eseteket hagyományosan úgy különböztetjük meg, hogy ami korlátlanul végtelen is lehet az általános

esetben (S_τ -ban $\tau \in {}^\alpha\alpha$ tetszőleges), az végesre van lekorlátozva a kvázi-poliadikus esetben (τ véges transzformáció kell hogy legyen). Egy közbülső lehetőséget is bevezet Jelölt: τ -tól ekkor azt követeljük meg, hogy egy rögzített végtelen $m < \alpha$ halmaznál több értéket ne mozgasson meg. Hasonlóan, a gyenge terek általánosításaként m -gyenge terekről is beszél, ahol a definícióban az eredeti végeességet megint a végtelen, de m -nél nem nagyobb feltétel helyettesíti.

Míg az előző fejezetek reprezentáció tételeinek bizonyításainál megéltünk a “step-by-step” módszer alkalmazásával, ebben a fejezetben már az un. neat beágyazásos technikára is szükség van a végtelen τ transzformációk jelenléte miatt.

A fő tételek

Thm.3.25: *egyenlőséges cilindrikus poliadikus algebrák* reprezentációja;

Thm.3.24: *lokálisan m dimenziós egyenlőséges cilindrikus m -kvázi poliadikus algebrák* reprezentálása.

Nem írok le itt erről többet, de a tézisek 11.-15. oldalain megtalálhatók a pontos részletek. Amit viszont kiemelnék, az az, hogy Jelölt minden lépésénél konkrét kapcsolatokat teremt a cilindrikus- és poliadikus algebrák hagyományos elméletének analóg építkezésével, ami még sokat emel a tárgyalás értékén.

A második rész (Part II) *neat beágyazásokra* koncentrál. Egy $\mathfrak{A} \in \mathbf{CA}_\alpha$ neat beágyazható egy $\mathfrak{B} \in \mathbf{CA}_{\alpha+\varepsilon}$ algebrába, ha a $\mathfrak{B}$ -beli új cilindrifikációk mind identitások az $\mathfrak{A}$ részalgebrán. A cilindrikus algebrák nevezetes neat beágyazási tétele szerint

egy $\mathfrak{A} \in \mathbf{CA}_\alpha$ cilindrikus algebra akkor és csak akkor reprezentálható (kockás halmaz algebrával), ha $\mathfrak{A}$ neat beágyazható egy $\alpha + \varepsilon$ dimenziós cilindrikus algebrába valamely $\varepsilon \geq \omega, \alpha \geq 2$ -re.

Jelölt azt vizsgálja, hogy ez a tétel általánosítható-e r -reprezentálhatóságra.

Jelölt bebizonyítja, hogy igen, a szokásos $\mathbf{CA}$ axiómáknál kevesebb is elég a neat beágyazási tétel teljesüléséhez, pl. a cilindrifikációk kommutatívitása nem szükséges. Ezáltal a RTA tétel is egy új bizonyítást nyer.

Továbbá Jelölt az első, akinek sikerült neat beágyazási tételt bizonyítania poliadikus algebrákra (Thm.6.2).

A dolgozat kitér még a neat beágyazási tételek logikai alkalmazásaira is.

A dolgozat egy gondosan megírt munka, csak a szörszálhasogatás szintjén tudnám bírálni aprócska hibáit. Helyenként hálás lettem volna egyes lépések részletesebb kiszámolásáért, azon fölül, hogy Jelölt megmondta, hogy mikből következik egy állítás. Ezzel időt spórolt volna az olvasónak.

Jelölt úttörő jellegű eredményeket ért el az AL reprezentáció elméletében. Mindezt úgy, hogy a klasszikus eredményeket nagy tisztán látással analizálta és megkereste bennük a lényegét. A bizonyítási technikáinak (step-by-step módszer, neat beágyazási módszer, ultraszorzat módszer) van ugyan előzménye, de az új helyzetekben ezeket kreatívan tovább kellett fejlesztenie.

Mindezek alapján meg vagyok győződve arról, hogy Ferenczi Miklós disszertációja megfelel az MTA doktori disszertációkkal szemben támasztott követelményeknek. **Melegen javaslom a disszertáció nyilvános vitára bocsátását és az MTA doktori cím odaítélését.**

Budapest, 2014 július 4

Sain Ildikó

References

- [1] H. Andréka. Complexity of the Equations Valid in Algebras of Relations. Part I: Strong non-finitizability; Part II: Finite axiomatizations. *Annals of Pure and Applied Logic*, 89:149–209 and 211–229, 1997. Preprint form available electronically as <http://circle.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/complex.dvi>.
- [2] H. Andréka and R. Thompson. A stone type representation theorem for algebras of relations of higher rank. *Transaction of Amer. Math. Soc.*, 309(2):671–682, 1988.
- [3] L. Henkin, J. D. Monk, and A. Tarski. *Cylindric Algebras Part I*. North-Holland, Amsterdam, 1971 and 1985.
- [4] J. D. Monk. An Introduction to Cylindric Set Algebras. *Logic Journal of the IGPL*, 8(4):449–494, July 2000. Electronically available as: <http://www.jigpal.oupjournals.org>.
- [5] I. Németi. Algebraization of Quantifier Logics, an Introductory Overview. *Studia Logica*, 50, No 3/4 (a special issue devoted to Algebraic Logic, eds.: W. J. Blok and D. L. Pigozzi):485–570, 1991. Strongly updated and expanded [e.g. with proofs] version is electronically available as: <http://circle.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/survey.dvi>, [survey.ps](#).

- [6] I. Németi. Algebraization of Quantifier Logics, an Introductory Overview. Technical Report 13/1996, Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., 1996. A shorter and older version appeared in *Studia Logica*, vol.50, pp.485–570, 1991. Electronically available as: <http://circle.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/survey.dvi>, [survey.ps](#).
- [7] I. Sain and R. J. Thompson. Strictly Finite Schema Axiomatization of Quasi-polyadic Algebras. In J. D. Monk H. Andréka and I. Németi, editors, *Algebraic Logic* (Proc. Conf. Budapest 1988), volume 54 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 539–571. North-Holland, Amsterdam, 1991.