dc_230_11

TRIBOLÓGIAI JELENSÉGEK VIZSGÁLATA SZILÁRD FELÜLETEN ÁRAMLÓ VISZKÓZUS FOLYADÉKBAN

Vadászné Bognár Gabriella

Miskolci Egyetem
Gépészmérnöki és Informatikai Kar

Tézisek

2013

1 Az értekezés tárgya és előzményei

Számos elméleti és numerikus módszer alkalmazható folyadékok áramlási jellemzőinek vizsgálatára és arra, hogy meghatározzuk, milyen hatást gyakorolnak a gyártási folyamatra és a gépszerkezetek működésére. Komplex, a gyártási folyamatokra érvényes prediktív modellek általában nem ismertek, a gyakorlat nagyobb részt empirikus. A fizikai és matematikai modellek azonban elősegítik, hogy betekintést nyerjünk a gépelemek működésébe és a végtermékre hatással bíró folyadék áramlástani jellemzőibe. Fontos, hogy megismerjük az alapegyenletek és a peremfeltételek által meghatározott folyadékáramlási mechanizmusokat és az egyes paraméterek hatását, hogy befolyásolni tudjuk azok hatását.

Kenés, terjedés, polimer bevonat készítés és a polimer feldolgozás, vékony film előállítás és öntés, valamennyi fontos alkalmazási területe a szilárd felület melletti áramlásnak. Az elmozduló gépelemek határfelületei között a kenőanyagok rugalmas kapcsolatot teremtenek, amelyek a tribológiai rendszer paramétereitől függően fejtik ki hatásukat. A korszerű kenőolajok alapolajból és 0,01-30 % közötti koncentrációban különböző funkciójú adalék anyagokból állnak. A kenési körülmények – a nyomás, a hőmérséklet, a nyírási sebesség – jelentősen befolyásolják a felületen lejátszódó fizikai és kémiai folyamatokat [52]. Az 1960-as évektől kezdve széles körben elterjedt, hogy az alapolajokhoz adalékokat adnak, így javítva a kenőanyagoknak a felhasználás szempontjából fontos tulajdonságait. A kenőolajok egyik legfontosabb tulajdonságát, a megkívánt viszkozitást polimerek hozzáadásával érik el [10], [12], [71]. A polimer és az olaj oldatainak mechanikai tulajdonsága, a polimer viszkozitást növelő hatása a polimer adalék jellemzőitől függ. Ezek az oldatok viszkozitás szempontjából nem-newtoni viselkedést mutatnak az ásványi olajakkal ellentétben, melyeket newtoni folyadéknak lehet tekinteni. A kenőolajok viszkozitásának jellemzésére a modell egyszerűsége miatt a nem-newtoni hatvány törvényt alkalmazzák [54], [62], [63], [64], [65]. Napjainkban a tribológia egyik gyakran vizsgált területe a nem-newtoni hatásnak a kenőanyag áramlási jellemzőkre gyakorolt befolyása kenőfilmek [54], [56], [62], [63], nyomott csapágyak [64], [65], siklócsapágyak [71], [58], [80] és görgőscsapágyak [68], [69] esetén. Az alapegyenletek és a peremfeltételek bonyolultsága miatt analitikus módszerek a feladatok megoldására csak nagyon kevés gyakorlati esetben alkalmazhatók. Ezért numerikus számítások egészítik ki a kísérleti eredményeket. Bár a numerikus eljárások széles körben elterjedtek, az analitikus megoldások rendkívül értékesek, mivel általuk numerikus modellek igazolhatók, az áramlási mechanizmusokra alapvető információkat nyújtanak és mennyiségi eredményeket is adnak az egyes komponensekre. Az elméleti vizsgálatok előnye a kísérleti módszerekkel szemben, hogy a paraméterek és a feltételek egyszerűen és gyorsan kontrollálhatók. Analitikus megoldások azonban csak bizonyos folyamatok egyszerűsített modelljeire nyerhetők.

Az értekezés ilyen modellek kifejlesztésére irányuló kutatásaim eredményeit foglalja össze. Az értekezésben a modell felállítása során azzal a feltevéssel élünk, hogy az áramlás lamináris, a folyadék (pl. kenőolaj) nem összenyomható és viszkozitás tekintetében pedig nem-newtoni, hatványtörvény szerinti viselkedést mutat.

Prandtl elméletének alkalmazásával a Navier-Stokes-egyenletek egyszerűbb alakú differenciálegyenletekre redukálhatók, amelyeket határréteg egyenleteknek nevezünk [57]. Míg a Navier-Stokes-egyenletek elliptikusak, a határréteg egyenletek parabolikusak, amelyekre további egyszerűsítések alkalmazhatók (lásd pl. [4], [5], [34], [35], [60]). A Prandtl-féle határréteg elmélet szerint a szilárd felület és a folyadék viszonylagos mozgásakor az áramlási tér két tartományra osztható. Az egyik a szilárd felület környezetében kialakuló vékony határréteg, amelyben a súrlódás jelentős szerepet játszik. A határrétegen kívül eső tartományban a súrlódás elhanyagolható, a mozgás az ideális folyadékokra érvényes törvények szerint megy végbe. A fal melletti rétegben a newtoni, vagy nem-newtoni viszkózus feszültségek játszanak szerepet, míg a határrétegen kívül ezek a feszültségek elhanyagolhatók a nyírósebesség kis értékei miatt. A határréteg általában igen vékony az "objektum" méretéhez viszonyítva. Prandtl arra a következtetésre jutott, hogy kis viszkozitás esetén a sebesség kis távolságon belül gyorsan változik az áramlásba helyezett felületre merőleges irányban, azaz a határrétegben a sebesség gradiens igen nagy. Prandtl elméletével a Navier-Stokes-egyenletek a határrétegben egyszerűbb alakra hozhatók, ezek az ún. határréteg egyenletek [5].

A kenéselméletben a hidrodinamikai hatást kísérleti úton először Tower mutatta ki 1883-ban [40], [73]. Az ő eredményeire alapozva Reynolds dolgozta ki a hidrodinamikai kenéselméletet, feltételezve, hogy a közeg viszkózus és nem-newtoni. A mozgó felület és a kenőanyag egyes rétegei közötti relatív mozgásra a kenőanyag viszkozitása van hatással. Egy vékony határrétegben megbecsülhető a fal melletti nyírófeszültség és abból a fali csúsztatófeszültség által okozott súrlódási ellenállás. Ez az ellenállás erő függ a folyadék tulajdonságaitól, a folyadékba helyezett objektum alakjától, méretétől és sebességétől. A hidrodinamikus csapágy a kenéselmélet leggyakrabban használt alkalmazása. A csapágyban a súrlódási veszteséget a kenőfilm nyírása idézi elő. A siklócsapágyak működése során lehetőleg a hidrodinamikai kenésállapot biztosítására törekszenek, amikor fémes érintkezés nem jön létre és a súrlódási ellenállás nagyon kicsi.

Az idealizált newtoni viszkózus, állandó sebességgel áramló közegben kialakuló határréteg vizsgálata vízszintes felület felett a folyadékok mechanikája egyik legismertebb problémája, melynek analitikus megoldása a múlt század elejére nyúlik vissza és Heinrich Blasius nevéhez fűződik [15]. A jelenség leírására szolgáló két parciális differenciálegyenletből álló rendszert egy közönséges differenciálegyenletté transzformálta, melyet Blasius-egyenletnek nevezünk [15].

A mozgásegyenlethez egzakt megoldást adni igen nehéz, sőt néha még egyszerű geometria és konstansnak tekintett folyadék jellemzők esetén is lehetetlen. Numerikus megoldások alkalmazhatóak, azonban ha analitikus leírásra van szükség, akkor a közelítő módszerek is gyakran bizonyulnak hasznosnak.

Tapasztalat szerint a folyadékok jelentős része nem-newtoni viselkedést mutat (pl. kenőanyagok, műanyag olvadékok és különböző zagyok). Ilyen anyagoknál a τ nyírófeszültség és a $\partial u/\partial y$ nyírósebesség közötti viszonyt a $\tau = \mu_{app}\partial u/\partial y$ egyenlőséggel jellemzik a μ_{app} látszólagos viszkozitást alkalmazva. Nem-newtoni folyadékok reológiai jellemzésére leggyakrabban használt modell a

$$\mu_{app} = K \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1},$$

ún. Ostwald-de Waele hatványtörvény modell, amelynél a nyírófeszültség és a nyírósebesség kapcsolata a

$$\tau = K \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}$$

összefüggéssel adott, ahol K a konzisztencia állandó és n a folyási kitevő, vagy hatványkitevő [14]. Az $0 < n < 1$ eset a pszeudo-plasztikus folyadéknak (pl. kenőanyagok, polimerek), az $n > 1$ eset a dilatáns folyadéknak (pl. zagyok) felel meg. Ha $n = 1$, akkor a newtoni közegre érvényes összefüggést kapjuk [46].

Az 1960-as években Schowalter [61], ill. Acrivos, Shah és Peterson [1] adták meg a hatványtörvénnyel jellemzett nem-newtoni közegben a határréteg egyenleteket. Összenyomhatatlan, nem-newtoni közegben síklappal párhuzamos, attól távol, a zavartalan áramlásban U_∞ sebességű, lamináris áramlásban a folytonossági és a mozgásegyenlet az alábbi alakkal írták fel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + K\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{1.2}$$

Az egyenletrendszerhez a szilárd felületen, és attól távol a sebesség-komponensekre feltételeket írunk elő:

- a tapadás törvényének érvényesülését feltéve $u(x,0) = 0$ rögzített felületre és $u(x,0) = U_w$ az U_w sebességgel x irányban mozgó felületre, ahol $U_w > 0$, ha a felület a $-x$ irányban mozog;
- $v(x,0) = 0$ át nem eresztő felület és $v(x,0) = v_w(x)$ áteresztő (permeábilis) felület esetén, ahol v_w az a felületen átáramló közeg sebességet jelöli;
- a felülettől távol $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = U_\infty$, ha a közeg x irányú áramlási sebessége U_∞ és $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$ nyugvó közeg esetén.

Newtoni közegre a parciális differenciálegyenlet rendszerrel adott matematikai modellre sok esetben hasznos volt a megoldások vizsgálata során a hasonlósági változók bevezetése (l. Schlichting és Gersten [60]). Az értekezésben nem-newtoni hatványközeg esetén az (1.1), (1.2) egyenletrendszer numerikus és analitikus megoldásainak előállítására és az áramlástani jellemzők változásának vizsgálatára alkalmazunk hasonlósági transzformációt. Az 5. fejezetben a hőmérséklet változásának hatását is figyelembe vesszük, ekkor a folytonossági- és a mozgásegyenletekhez még az energiaegyenlet járul; a termikus és hidrodinamikai határréteg jellemzőit pedig a Marangoni-konvekció és konvektív felületi feltétel mellett elemezzük. Megvizsgáljuk a nem-newtoni hatást kifejező n kitevő hatását a hidrodinamikai határrétegben a sebességeloszlásra, a határréteg vastagságára, valamint az ellenállástényezőre, a felületi nyírófeszültségre, ill. a felületi súrlódási tényező kifejezésében szereplő paraméterekre, valamint a termikus határréteg jellemzőit a fizikai paraméterek függvényében.

2 Az értekezés eredményei

Az értekezésben szereplő eredmények többsége publikációkban már megjelent. A legfontosabb eredményeimet az értekezésben szereplő fejezetek szerinti felosztásban ismertetem az alábbiakban.

Az értekezés 2.2 fejezetében kétdimenziós stacionárius, izotermikus, lamináris határréteg áramlását vizsgáltam állandó U_∞ zavartalan hozzááramlási sebességnél. Át nem eresztő, álló, csúszásmentes felületet feltételezve a felületen, ill. attól távol az (1.1), (1.2) egyenletekhez járuló peremfeltételek:

$$u\,(x,0)=0,\ \ v\,(x,0)=0,\ \ \lim_{y\to\infty} u\,(x,y)=U_\infty. \tag{2.3}$$

Bevezetve a ψ áramfüggvényt az

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

egyenletekkel az (1.1) folytonossági egyenlet automatikusan teljesül és az (1.2) egyenlet az alábbi alakba hozható:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{K}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|^{n-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right].$$

Megmutattam, hogyha a ψ áramfüggvényt, valamint az η és f hasonlósági változókat a

$$\psi(x,y)=(K/\rho)^{\frac{1}{n+1}}U_\infty^{\frac{2n-1}{n+1}}x^{\frac{1}{n+1}}f(\eta),\qquad \eta=(K/\rho)^{-\frac{1}{n+1}}U_\infty^{\frac{2-n}{n+1}}yx^{-\frac{1}{n+1}} \tag{2.4}$$

alakban vesszük fel, akkor az (1.1), (1.2) és (2.3) helyett az

$$\left(|f''|^{n-1}f''\right)'+\frac{1}{n+1}ff''\ =\ 0, \tag{2.5}$$

$$f(0)=0,\ \ f'(0)=0,\ \ \lim_{\eta\to\infty}f'(\eta)\ =\ 1, \tag{2.6}$$

nemlineáris közönséges differenciálegyenlet peremérték feladata adódik, ahol a deriváltak az η változó szerinti deriváltat jelölik. Ha $n=1$, akkor (2.5) a Blasius-egyenlettel egyezik meg, amely az $n=2$ eset kivételével nemlineáris. Ekkor a megoldás explicit alakban előállítható (l. Liao [47]); $n=1$ esetén pedig (2.5) és (2.6) peremérték feladat a jól ismert Blasius-feladattal egyezik meg. Tehát (2.5) és (2.6) a Blasius-feladat egy általánosítása, melyet általánosított Blasius-feladatnak neveznek [13]. Ekkor a sebességkomponensek η és f alkalmazásával kifejezhetők

$$u(x,y)=U_\infty f'(\eta),\quad v(x,y)=v^*(x)\left[\eta f'(\eta)-f(\eta)\right],$$

ahol

$$v^*(x)=\frac{U_\infty}{n+1}\mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}}\quad\text{és}\quad \mathrm{Re}_x=\frac{\rho U_\infty^{2-n}x^n}{K}.$$

Az f függvény ismeretében kapott $f''(0)=\gamma$, a fal melletti sebességgradiens, amelynek meghatározása vizsgálataink egyik fő célja. Az áramlásba helyezett testre ható, a zavartalan hozzááramlás sebességével párhuzamos ellenállás erő része a felületi súrlódásból származó erő, amelynek meghatározásához a $C_{D,\tau}$ dimenziómentes ellenállás tényezőt használjuk, melynek értéke az adott peremfeltételek mellett függ a Reynolds számtól. Az általunk vizsgált γ értékkel tudjuk meghatározni az ellenállás tényező fali csúsztatófeszültségből származó részét:

$$C_{D,\tau} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \operatorname{Re}^{\frac{-n}{n+1}} |\gamma|^{n-1} \gamma,$$

a fal melletti nyírófeszültséget:

$$\tau_w(x) = \left[\rho^n K U_\infty^{3n} x^{-n}\right]^{\frac{1}{n+1}} |\gamma|^{n-1} \gamma \tag{2.7}$$

és a felületi súrlódási tényezőt.

A peremérték feladatok analitikus és numerikus megoldása nehéz, a megoldások sok esetben nem is egyértelműek. A 2.1 fejezetben az $n = 1$ esetre ismertetett Töpfer-módszert [74] általánosítottam tetszőleges n folyási kitevőre. A (2.5), (2.6) peremérték feladatot átalakítottam a

$$\left(|g''|^{n-1} g''\right)' + \frac{1}{n+1} g g'' = 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 1 \tag{2.8}$$

kezdetiérték feladattá, amely egyértelműen megoldható. Innen

$$f(\eta) = \gamma^{(2n-1)/3} g\left(\gamma^{(2-n)/3}\eta\right),$$

amely $n = 1$ esetén megegyezik a Töpfer-féle transzformációval [74]. Az $f''(0) = \gamma$ fal melletti sebességgradiens a g megoldásból számítható:

$$\gamma = \lim_{\eta^* \to \infty} \left[g'(\eta^*)\right]^{-\frac{n+1}{3}}.$$

A (2.8) kezdetiérték feladat megoldásaiból kapjuk meg f-re a megoldásokat.

1. Tézis *Hatványközegben kialakuló határréteg áramlást leíró (1.1) folytonossági- és (1.2) mozgásegyenletet a (2.4) szerinti hasonlósági változók bevezetésével a (2.5) közönséges differenciálegyenletre, az ún. általánosított Blasius-egyenletre transzformáltam. A peremérték feladat megoldásához a Töpfer-féle transzformációt általánosítottam és így a (2.8) kezdetiérték feladat megoldásait kerestem meg különböző n kitevőkre. Az így kapott megoldások ismeretében vizsgáltam az n hatványkitevőnek a sebesség-komponensekre gyakorolt hatását. Az $f'(\eta) = u(x,y)/U_\infty$, $v(x,y)/v^*(x) = \eta f'(\eta) - f(\eta)$ sebesség-profilokból megállapítottam, hogy a határréteg vastagsága csökken, ha n növekszik (2.2-2.3 ábrák). A dimenziómentes $f''(\eta)$ sebességgradiens az $f''(0) = \gamma$ pozitív értéktől monoton csökken 0-ig. Nagyobb n értéknél a csökkenés mértéke nagyobb (2.4. ábra). Megállapítottam, hogy az n folyási kitevő az $f''(0)$ értékre jelentős hatást gyakorol; kb. $n = 0.7$-ig csökken, ezt követően pedig monoton nő (2.5. ábra) [16], [26], [23].*

Newtoni közegben ($n = 1$) Blasius a feladat közelítő megoldását az

$$f(\eta) = \eta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{A_k \gamma^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k}$$

hatványsorral adta meg. Az együtthatók kiszámítására zárt formula nem ismert, azok az

$$A_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} A_r A_{k-r-1}, \quad \text{ha} \quad k \geq 2,$$

rekurzív összefüggésekből számíthatók, ahol $A_0 = A_1 = 1$.

2. Tézis *Megmutattam, hogy az (2.5), (2.6) általánosított Blasius-feladatra is létezik $f(\eta) = \eta^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \eta^{3k}$, sor alakú megoldás, ahol az első három együttható:*

$$a_0 = \frac{\gamma}{2}, \qquad a_1 = -\frac{\gamma^{3-n}}{5!n(n+1)}, \qquad a_2 = \frac{\gamma^{5-2n}(21-10n)}{8!n^2(n+1)^2},$$

a további együtthatók meghatározására rekurzív formulát adtam. Kiszámítottam a hatványsor konvergencia sugarát:

$$\eta_c = 3\gamma^{\frac{n-2}{3}} [n(n+1)]^{\frac{1}{3}} \lim_{k\to\infty} k \left| \frac{b_k(n)}{b_{k+1}(n)} \right|^{\frac{1}{3}}, \quad \textit{amikor} \;\; a_k = \frac{b_k(n)\gamma^{1-k(n-2)}}{(3k+2)!n^k(n+1)^k}.$$

A numerikus eredmények azt mutatják, hogy a konvergencia sugár jelentősen nő az n folyási kitevő növelésével (2.3. táblázat) [16].

Áramló newtoni folyadékban a lamináris határréteget Weidman, Kubitschek és Brown [76] vizsgálták abban az esetben, ha a külső sebességprofil az $U_\infty = \tilde{B} y^\sigma$ hatványfüggvénnyel adott, amely profilt teljesen kifejlődött áramlás átlagsebességére Barenblatt [8] javasolt. Barenblatt és Protokishin igazolták, hogy $\sigma = 3/(2\ ln\mathrm{Re})$ [9]. A mozgásegyenlet analitikus megoldása Airy függvénnyel előállítható, ha $\sigma = -1/2$. Newtoni folyadékra Magyari, Keller és Pop $\sigma = -2/3$ kitevő esetén megmutatták, hogy míg át nem eresztő síklap esetén nem létezik hasonlósági megoldás, elszívás jelenlétében van hasonlósági megoldás [51]. Ha $\sigma = -1/2$, akkor mind elszívás és betáplálás esetén előállítható a hasonlósági megoldás. Ha $\sigma = 0$ és $n = 1$, akkor a lamináris határrétegáramlást leíró egyenlet a Blasius-egyenlettel egyezik meg.

3. Tézis *Előállítottam az $U_\infty = \tilde{B} y^\sigma$ sebességprofil esetén nem-newtoni hatványközegre a hasonlósági megoldásra érvényes peremérték feladatot. Az (1.1) folytonossági- és (1.2) mozgásegyenlethez ebben az esetben az*

$$u(x,0) = 0, \;\; v(x,0) = 0 \;\; \textit{és} \;\; \lim_{y\to\infty} u(x,y) = \tilde{B} y^\sigma \tag{2.9}$$

peremfeltételek járulnak, ahonnan a hasonlósági változók bevezetésével

$$\left(|f''|^{n-1} f''\right)' - \alpha f f'' + M f'^2 = 0, \;\; M = -\frac{\sigma}{(2-n)\sigma + (n+1)}, \tag{2.10}$$

$$f(0) = 0, \;\; f'(0) = 0, \;\; \lim_{\eta\to\infty} f'(\eta) = \tilde{A}\eta^\sigma. \tag{2.11}$$

A sebességkomponensek, ha $n \neq 2$:

$$u(x,y) = (K/\rho)^{1/(2-n)} x^{-M} f'(\eta), \quad v(x,y) = x^{-(\alpha+1)} \left[\alpha f(\eta) + \beta\eta f'(\eta)\right].$$

Az analitikus megoldást az $f(\eta) = \eta^2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \eta^{3k}$*, hatványsor alakban adtam meg, ahol a sor együtthatóira vonatkozóan*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\gamma}{2}, \\ a_1 &= \frac{1}{5!}\left(\frac{\alpha}{n}\gamma^{3-n} - 2M\gamma^2\right), \\ a_2 &= \frac{1}{8!}\left(\frac{\alpha(21-10n)}{n}\gamma^{2-n} - 10M\gamma\right)\left(\frac{\alpha}{n}\gamma^{3-n} - 2M\gamma^2\right), \end{aligned}$$

az a_k, $k > 2$ *együtthatókra pedig rekurzív képletet állítottam elő. Numerikus számításokat végeztem különböző* n *(*0.5*;* 1*;* 1.5*) és különböző* σ *(*$-1/2$*;* $-1/3$*;* 0*) értékekre (2.7-2.12 ábrák). A számítások alapján megállapítottam, hogy a fal melletti nyírófeszültségben szereplő* $[f''(0)]^n$ *és a határréteg vastagsága mind* $\sigma = 0$*, mind* $\sigma = -1/2$ *esetén csökken, ha az* n *paraméter értéke nő. Eredményeim a Cossali [32] által newtoni esetre megadott eredményeknek az általánosítása nem-newtoni hatványközegre, ha* $n \neq 2$ *[18], [22].*

Elméletileg hasonló módon kezelhető az a technológiailag fontos áramlástani probléma, amikor nyugvó folyadékban mozgó síklap felszínén kialakuló határréteget vizsgálunk. Ilyen eljárások például a meleg hengerlés, a fémmegmunkálás és a folytonos öntés (l. Altan, Oh és Gegel [3], Fisher [37], Tadmor és Kline [72]), ill. a polimerlemez folyamatos extrudálása [59]. A lemez folyamatos mozgása által létrehozott határréteg áramlást nyugvó newtoni közegben Sakiadis [59] vizsgálta, számításait Tsou, Sparrrow és Goldstein [75] kísérletileg igazolta. A mérési eredmények igazolják a folytonos, mozgó felületen a határrétegáramlás matematikai modelljét. Az értekezésben egy hosszú, folyamatosan mozgó sík felület modelljét vizsgáltam, amelyben a sík felület egy ponttól jobbra vízszintes irányban mozog valamely nyugvó közegen keresztül.

Nyúló felület feletti áramlás jelensége polimerlapok extrúziójánál és műanyag film húzásánál jelenik meg. A lap gyártása során a nyílásból kiömlő olvadékot nyújtják kívánt vastagságúra. A végtermék minősége jelentősen függ a nyújtási aránytól. Crane [33] a határréteg áramlást newtoni közegben lineárisan nyújtott felületre vizsgálta. Ez a probléma azon kevés esetek közé tartozik, amelyre a megoldás zárt alakban megadható. Weidman és Magyari [77] különböző típusú nyújtási sebességre vizsgálták newtoni közegben a határréteg áramlást. A fizikai jelenségeket számos dolgozatban elemezték: pl. Kumaran és Ramanaiah [45], Banks [7], Magyari és Keller [49]. Crane a zárt alakú megoldást át nem eresztő síklapra határozta meg. A gyakorlatban hűtésnél, vagy párologtatásos hűtésnél a felületen elszívás, vagy közeg kiáramlás van. A párolgás hatását állandó sebességgel mozgó áteresztő felületen Erickson és társai [36], ill. lineárisan növekvő sebességű felületen Gupta és Gupta [38] vizsgálták. További eredményeket Magyari és Keller [50] áteresztő nyújtott lapra közölte. A szerzők általában a fizikai jelenség matematikai modelljének analitikus megoldást keresik, ha ez nem létezik, akkor megfelelő, a szakemberek számára a gyakorlatban elégséges közelítő megoldásokat javasolnak.

A 3.1 fejezetben a Crane által a newtoni közegben lineárisan növekvő sebességű nyújtott felületre megadott megoldást általánosítottam arra az esetre, ha a sebesség a hely koordinátának hatványfüggvényével adott. A határrétegáramlás hasonlósági megoldását exponenciális sor alakjában állítottam elő.

Összenyomhatatlan, nyugvó newtoni közeg $U_w(x)$ sebességgel $-x$ irányban mozgó síklap körüli stacionárius, lamináris áramlásának leírásához az (1.1) folytonossági- és a

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.12}$$

mozgásegyenletet a

$$u\,(x,0)=U_w(x),\quad v\,(x,0)=v_w(x),\quad \lim_{y\to\infty}u\,(x,y)=0$$

peremfeltételekkel vizsgáltam áteresztő lap esetén, ahol $v_w(x)$ a felületre merőleges elszívás, vagy betáplálás sebességét jelöli. A peremfeltételben a sebesség a nyílástól mért távolság hatványának függvényeként változik:

$$U_w(x)=Ax^{\kappa},\quad v_w(x)=Bx^{(\kappa-1)/2},$$

ahol A, B és κ konstantsok, $A>0$. Ha $B<0$, az a lapra merőleges elszívásnak, a $B>0$ eset pedig betáplálásnak felel meg. Át nem eresztő lap esetén $B=0$. A hasonlósági transzformációval kapott peremértékfeladat:

$$\begin{aligned} f'''+ff''-\frac{2\kappa}{\kappa+1}f'^2 &= 0,\\ f(0)=f_w,\quad f'(0)=1,\quad \lim_{\eta\to\infty}f'(\eta) &= 0,\end{aligned}$$

ahol

$$f_w=-B\left[A\mu\frac{\kappa+1}{2\rho}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

A sebességkomponensekre érvényes összefüggések:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= Ax^{\kappa}f'(\eta),\\ v(x,y) &= -\left(\frac{2\mu A}{\rho(\kappa+1)}\right)^{1/2}x^{(\kappa-1)/2}\left[\frac{\kappa+1}{2}f(\eta)+\frac{\kappa-1}{2}\eta f'(\eta)\right].\end{aligned}$$

Banks [7] megmutatta, hogy határréteg problémának fizikai jelentősége csak abban az esetben van, ha $-\infty<\kappa<-1$, és $-1/2<\kappa<+\infty$. Néhány speciális κ értékre egzakt megoldást lehet adni. A $\kappa=1$ esetben át nem eresztő felületre Crane adott megoldást [33]:

$$f(\eta)=1-e^{-\eta},$$

áteresztő felületre pedig Gupta és Gupta [38]. A $\kappa=-1/3$ esetben át nem eresztő felületre Banks [7], áteresztő felületre pedig Magyari és Keller [50] egzakt megoldást adott.

4. Tézis *Az $U_w(x)=Ax^{\kappa}$ esetre át nem eresztő és áteresztő lapra általánosítottam Crane, ill. Gupta és Gupta megoldását $f(\eta)=\alpha\left(A_0+\sum_{i=1}^{\infty}A_i\,a^i\,e^{-\alpha i\eta}\right)$, sor alakban, ahol $\alpha>0$, $A_0=1$, és A_i $(i=1,2,...)$ az együtthatókat jelöli, amelyek meghatározására módszert adtam. A sor együtthatóit kiszámítottam az $f_w=0$ át nem eresztő és $f_w=1$ áteresztő esetekre és meghatároztam a*

$$\tau_w=\left[\rho\mu A^3\frac{\kappa+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3\kappa-1}{2}}f''(0),$$

fal melletti nyírófeszültségben szereplő $f''(0)$ értékeket (3.1-2 táblázatok) [19].

5. Tézis *Nyugvó hatványközegben U_w sebességgel mozgó, át nem eresztő lap mellett kialakuló stacionárius, lamináris áramlás leírásakor az (1.1) folytonossági- és az (1.2) mozgásegyenlethez járuló peremfeltételek:*

$$u\,(x,0) = U_w(x), \quad v\,(x,0) = 0, \quad \lim_{y\to\infty} u\,(x,y) = 0.$$

A hasonlósági megoldások a (2.5) egyenletet elégítik ki az

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad \lim_{\eta\to\infty} f'(\eta) = 0$$

feltételekkel. Pszeudo-plasztikus közegre végzett számítások alapján megállapítottam, hogy n növelésével az ellenállás-tényezőben szereplő $[-f''(0)]^n$ tényező és a határréteg vastagsága is csökken [17].

Áramló közegben mozgó felületen kialakuló határréteg jelensége több gyártási folyamatnál előfordul, pl. kenéselméletben, polimer filmek, vagy lemezek hűtése esetén. 1968-ban Steinheuer [70] vizsgálta mozgó síkfelületen newtoni közegben kialakuló határrétegáramlás hasonlósági modelljét, ha a lap mozgásának iránya és az áramlás iránya megegyező, vagy ellentétes; bár az irodalomban többnyire Klemp és Acrivos [44] 1972-ben megjelent cikkét említik. A numerikus eredmények alapján mindkét cikkben megállapították, hogy newtoni közegben ellentétes irányú mozgáskor hasonlósági megoldás csak a két sebesség hányadosának egy bizonyos értékéig létezik. Blasius-féle problémához a megoldások nem egyértelműek, ha a felület állandó U_w sebességgel a síklemezzel párhuzamos U_∞ sebességű áramlással ellentétes irányban mozog. Pozitív $\lambda = U_w/U_\infty$ hányados esetén két megoldás létezik mindaddig amíg λ kisebb, mint egy kritikus érték ($\lambda_c = 0.3541\ldots$), ettől nagyobb értékre hasonlósági megoldás nincs. Hussaini és Lakin [41] ezt a tényt bizonyította, ill. Hussaini, Lakin és Nachman [42] pedig a megoldások analitikusságát elemezte. Callegari és Nachman [29] egyértelmű megoldásokat igazolt arra az esetre, ha $\lambda < 0$.

A 4.2 fejezetben nem-newtoni hatványközegre vizsgáltam ezt a jelenséget. A numerikus számítások nem-newtoni esetre is azt mutatják, hogy minden n hatványkitevőhöz megadható egy λ_c kritikus érték, továbbá hasonlósági megoldás csak akkor van, ha $\lambda < \lambda_c$. Ha $\lambda > \lambda_c$ az áramlás leválik, a határrétegbeli közelítések tovább már nem alkalmazhatóak.

Nem-newtoni hatványközegben áramlással ellentétes irányú lapmozgás esetén az (1.2) mozgásegyenlethez járuló peremfeltételek:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,0) = -U_w, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,0) = 0, \quad \lim_{y\to\infty}\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,0) = U_\infty. \tag{2.13}$$

A (2.4) hasonlósági transzformációt alkalmazva η-ra és f-re az (1.1) és (1.2) parciális differenciálegyenletek a (2.5) közönséges differenciálegyenletre vezetnek, a (2.13) feltételek pedig

$$f(0) = 0, \; f'(0) = -\lambda, \; \lim_{\eta\to\infty} f'(\eta) = 1 \tag{2.14}$$

feltételekre transzformálhatók, ahol $\lambda = U_w/U_\infty$ a sebességhányadost jelöli.

6. Tézis *Áramló nem-newtoni közegben mozgó síklap esetén hasonlósági megoldás akkor létezik, ha $\lambda < \lambda_c$. A (2.5), (2.14) peremértékfeladat megoldására iteratív eljárást dolgoztam ki, mellyel meghatároztam az $f''(0)$ értékeket n és λ paraméterekhez. Megmutattam, hogy λ_c értéke nő, ha n növekszik (4.3. ábra). Numerikus számítások alapján bemutattam, hogy $[f''(0)]^n$ hogyan változik λ-tól különböző n-ekre (4.2. ábra) [27]. A nyírófeszültségben szereplő $f''(\eta)$ grafikonjainak változását különböző λ értékekre ábrázolva megállapítottam, hogy f'' negatív λ esetén szigorúan monoton csökken, míg pozitív λ esetén maximumát a határrétegben veszi fel. A λ_c értékekre felső becslést adtam általánosítva Hussaini, Lakin és Nachman [42] eredményét [20].*

Áramlásba helyezett mozgó sík felületen vizsgált hasonlósági megoldásokat – melyek a (2.5), (2.6) általánosított Blasius-feladat megoldásai – összehasonlítottam a véges térfogatok módszerére épülő ANSYS FLUENT kereskedelmi programmal kapott numerikus eredményekkel. Az áramlás számításához a mozgásegyenletet és az (1.1) folytonossági egyenletet alkalmazzuk. A mozgásegyenlet dimenzió mentes alakja összenyomhatatlan közeg esetén [14]:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu\frac{\partial u}{\partial x})\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})\right], \tag{2.15}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})\right]+2\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu\frac{\partial v}{\partial y})\right], \tag{2.16}$$

ahol μ a dinamikus viszkozitást jelöli és

$$\mu = K\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}^{(n-1)/2}. \tag{2.17}$$

Az ANSYS FLUENT programrendszernél a numerikus számításokhoz a 2D lamináris, időben állandó lamináris megoldót alkalmaztuk összenyomhatatlan áramlásra.

Összehasonlítva az elméleti (a hasonlósági) és az ANSYS FLUENT-tel kapott megoldásokat megállapítható, hogy a belépőéltől távolodva a numerikus szimulációval nyert $u(x,y)/U_\infty$ dimenziómentes sebesség profilok mindig az iterációs transzformációval számított $f'(\eta)$ hasonlósági megoldáshoz tartanak (l. 4.11 ábra). A kiáramlási sebességre a numerikus és a hasonlósági megoldásokat a 4.12-4.14 ábrák mutatják. Az (1.1), (2.15), (2.16) és (2.17) egyenletrendszer $u(x,y)/U_\infty$ megoldásai és a (2.5), (2.6) feladat hasonlósági megoldásai különböző n és λ paraméter értékekre nagyon közeliek (l. 4.15-4.19 ábrák). A felület melletti nyírófeszültségre az ANSYS-szal végzett numerikus szimulációkkal kapott adatok jó egyezést mutatnak a hasonlósági megoldásokkal nyert értékekre a belépőél egy kis környezetét kivéve.

7. Tézis *A hasonlósági megoldásokat összehasonlítottam az ANSYS FLUENT kereskedelmi szoftverrel kapott numerikus megoldásokkal mozgó felülettel párhuzamosan zavartalan áramlásban hatványtörvény szerinti nem-newtoni közegben. Az (1.1) és (1.2) határréteg egyenletek helyett a numerikus szimulációk során a teljes (1.1), (2.15), (2.16) és (2.17) egyenletrendszert vettem figyelembe. A számításokban a nem-newtoni* *hatványközegben a nyomásra és a sebesség komponensekre kapcsolt egyenletrendszert oldottam meg. A hasonlósági és a numerikus megoldások összehasonlításakor kielégítő megegyezést találtam. Így a hasonlósági megoldások verifikálják az ANSYS FlUENT-tel előállított megoldásokat. Továbbá a nyomás és a sebesség eloszlásokra kapott numerikus eredmények a Prandtl-féle határréteg elméletben tett feltételezéseket igazolják.*

Azt a jelenséget, amikor egy melegített felületen a hőmérséklet gradiens változásából származó felületi feszültség változás a folyadékban mozgást hoz létre, Marangoni-hatásnak nevezik. Ez számos mérnöki probléma esetén előfordul, pl. gőz buborékok növekedése során [30], nanofolyadékokban [81]), mikrogravitációban [31], vékony folyadék film kúszásánál [48], de jelentős az olajfilm kenésben is [28], [39], [53]. Keneselméleti jelentőségére Singleterry hívta fel a figyelmet [66]. Annak a kérdése, hogy a súrlódási hő miatt a felületek érintkezése közelében a hőmérséklet gradiens hatása milyen a nem érintkező gépalkatrészek szabad felületén az olaj film terjedési tulajdonságaira vonatkozóan a tribológia egyik aktuális kérdése napjainkban. Ilyen körülmények gyakran előfordulnak hajtóművekben, gördülőcsapágyakban, motor hengerekben, stb.

Az 5.1 fejezetben bemutattam a hasonlósági analízist egy, a Marangoni-hatás által indukált newtoni folyadékáramlásra sík felületen. Az áramlást az (1.1) folytonossági- és a (2.12) mozgásegyenlettel, valamint az

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_t \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

energiaegyenlettel írjuk le. Az egyenletben α_t a hőmérséklet-vezetési tényezőt jelöli, azaz $\alpha_t = k/(\rho c_p)$, ahol k a hővezetési tényező, ρ a sűrűség és c_p az állandó nyomáson vett fajlagos hőkapacitás. A Marangoni-hatás a hőmérsékletmező és a sebességmező közti összefüggéssel jellemezhető [7], [11]. A peremfeltételeket a felületen az alábbiak szerint vesszük figyelembe:

$$\begin{aligned}
\mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} &= -\sigma_T \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{y=0}, \\
v(x,0) &= 0, \\
T(x,0) &= T(0,0) + \bar{A}x^{m+1}
\end{aligned}$$

és a felülettől távol ($y \to \infty$):

$$\begin{aligned}
u(x,\infty) &= 0, \\
\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=\infty} &= 0,
\end{aligned}$$

ahol $\sigma_T = d\overline{\sigma}/dT$, $\bar{A}$ a hőmérséklet-gradiens együttható, m a kitevő. Napolitano és Golia [55] megmutatták, hogy a Marangoni-határréteghez hasonlósági megoldás csak akkor adható meg, ha a felületen a hőmérséklet-gradiens x hatványaként van megadva. A hasonlósági módszerrel a dimenzió mentes $f(\eta)$ áramfüggvényre a differenciálegyenlet

$$f''' - \frac{2m+1}{3}f'^2 + \frac{m+2}{3}ff'' = 0$$

alakú és a peremfeltételek az

$$f\,(0) = 0, \quad f''\,(0) = -1, \quad f'\,(\infty) = 0$$

alakba írhatók. A Θ hasonlósági hőmérsékletre felírt egyenlet a peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned}(m+1)f'\Theta - \frac{m+2}{3}f\ \Theta' &= \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Theta'',\\ \Theta(0)=1, \quad \Theta'(\infty) &= 0,\end{aligned}$$

ahol $\mathrm{Pr} = \mu/(\rho\alpha_t)$ a Prandtl-számot jelöli.

8. Tézis *A Marangoni-hatás vizsgálatakor feltételezve, hogy a hőmérséklet változása a hely-koordinátának hatványfüggvénye és a felületi feszültség a hőmérséklettel lineárisan változik, az analitikus közelítő megoldást exponenciális sorral adtam meg. Ez $m = 1$ kitevő esetén a Crane-féle megoldással egyezik meg [33]. Az f-re kapott megoldás ismeretében előállítottam a hőmérséklet eloszlást sor alakjában és megvizsgáltam az m kitevő és a Prandtl-szám változásának hatását. Megállapítottam, hogy f' csökken, ha m nő. A termikus határréteg vastagsága mind m, mind Pr növekedésével nő. Kis Prandtl-számok esetén a Θ hőmérséklet csökken Pr növelésével, míg nagy Pr-számok esetén Pr hatása ellentétes [24].*

Az 5.2. fejezetben azt a jelenséget vizsgáltam, amikor hatványközegben mozgó síkfelületet valamely T_f hőmérsékletű folyadék alulról melegít. A felület felett a közeg hőmérséklete távol a felülettől T_∞. Az (1.1) folytonossági-, (1.2) mozgásegyenlethez és a

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_t\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

energiaegyenlethez csúszásmentes, áteresztő és konvektív peremfeltételt alkalmazva:

$$u\,(x,0) = -U_w, \quad v\,(x,0) = v_w\,(x)\,, \quad -k\frac{\partial T}{\partial y} = h_f(T_f - T_w), \tag{2.18}$$

ahol h_f a hőátadási tényező, k a hővezetési tényező és $v_w\,(x)$ az anyagátadási sebességet jelöli a felületen. A feltételek a felülettől távol ($y \to \infty$):

$$u\,(x,\infty) = U_\infty, \quad T\,(x,\infty) = T_\infty. \tag{2.19}$$

Ekkor az f hasonlósági függvény a (2.5) differenciálegyenletet elégíti ki a

$$f\,(0) = f_w, \quad f'\,(0) = -\lambda, \quad f'\,(\infty) = \lim_{\eta\to\infty} f'\,(\eta) = 1,$$

ahol $f_w = -\,(n+1)\,v_w\,(x)\left(\frac{x^n}{\mu_{cn}U_\infty^{2n-1}}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ a felszín párologtatási mértékét jelöli. Ha a termikus diffúziót Zheng és szerzőtársai [82] által javasolt $\alpha_t = \omega\,|\partial u/\partial y|^{n-1}$, ha $u \neq 0$ (ω pozitív állandó) és $\alpha_t = 0$, ha $u = 0$ alakban vesszük fel, akkor a hasonlósági Θ hőmérsékletre kapott egyenlet az

$$\left(|f''(\eta)|^{n-1}\,\Theta'(\eta)\right)' + \frac{\mathrm{Pr}}{n+1}f(\eta)\Theta'(\eta) = 0,$$

ahol Pr $= K/\rho\omega$ a Prandtl-szám. A feltételeknek eleget tevő hasonlósági megoldás csak akkor van, ha a hőátadási tényező $h_f = cx^{-1/(n+1)}$. Newtoni közegre hasonló jelenségre mutatott rá Aziz [6], Bataller [11], Ishak [43] és White [79], azaz hasonlósági megoldás csak akkor állítható elő, ha h_f az $x^{-1/2}$-nel arányos.

A hasonlósági Θ hőmérsékletre (2.18), (2.19) feltételekből:

$$\Theta'(0) = -\bar{a}(1-\Theta(0)), \quad \bar{a} = \frac{c}{k}\left(\frac{K}{\rho U_\infty^{2-n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad \lim_{\eta\to\infty}\Theta(\eta) = 0.$$

A hidrodinamikai és a termikus határrétegbeli áramlási jellemzőket MAPLE 12-vel numerikusan vizsgáltam, a sebesség- és hőmérséklet eloszlásokat különbözö paraméterekre meghatároztam. Az x irányú sebességkomponenssel arányos $f'(\eta)$ alakjára vonatkozóan n és λ hatását az 1. és 6. tézisek tartalmazzák.

9. Tézis *Mind a hidrodinamikai, mind a termikus határréteg vastagsága nő, ha λ nő, vagy Pr csökken, vagy n csökken. Számításaink azt mutatják, hogy a fal melletti nyírófeszültségben és az ellenállástényezőben szereplő felületi sebesség gradiens növekszik, ha az n hatványkitevő, vagy a felületen a párologtatás sebességét jellemző f_w nő. A felületen a hőmérséklet nő, ha $\bar{a}$ nő, illetve ha λ vagy Pr csökken. A felületen a hőmérséklet gradiens nagyobb, ha a Prandtl-szám nagyobb, nagyobb dilatáns folyadékra, mint pszeudo-plasztikusra, illetve nagyobb elszívás és kisebb betáplálás esetén. Az elszívás vékonyítja a termikus határréteget és növeli a fal melletti hőmérséklet meredekségét. A betáplálás vastagítja a határréteget és a profilt S-alakúra módosítja. A hőátadás sebessége a felületen nagyobb elszívásnál és kisebb betáplálásnál. Továbbá a hőátadás sebessége a felületen nagyobb dilatáló közegre, mint pszeudo-plasztikusra. Newtoni közegben ($n = 1$) a numerikus eredmények jó egyezést mutattak az Aziz [6] és Ishak [43] által megadottakkal ([21], [25]).*

Hivatkozások

[1] Acrivos A., Shah M.J., Peterson E.E.: Momentum and heat transfer in laminar boundary flow of non-Newtonian fluids past external surfaces, *AIChE J.*, **6** (1960), 312–317.

[2] Allan F.M.: Similarity solutions of a boundary layer problem over moving surfaces, *Appl. Math. Lett.*, **10** (1997), 81-85.

[3] Altan, T., Oh S., Gegel H.: *Metal Forming Fundamentals and Applications*, American Society of Metals, Metals Park 1979.

[4] Ames W.F.: *Nonlinear Ordinary Differential Equations in Transport Processes*, Academic Press 1968.

[5] Andersson H.I., Irgens F.: *Film flow of power law fluid*, In: N.P. Cheremisinoff (ed.) Encyclopedia of Fluid Mechanics, Polymer Flow Engineering, Vol.9 pp. 617-648, Texas Gulf Publishing, 1990.

[6] Aziz A.: A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulation*, **14** (2009), 1064-1068.

[7] Banks W.H.H.: Similarity solutions of the boundary-layer equations for a stretching wall, *J. Mec. Theor. Appl.,* **2** (1983), 375-392.

[8] Barenblatt G.I.: Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 1. Basic hypotheses and analysis, *J. Fluid Mech.*, **248** (1993), 513-520.

[9] Barenblatt G.I., Protokishin V.M.: Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 2. Processingof experimental data, *J. Fluid Mech.* **248** (1993), 521-529.

[10] Bartha L.: *Adalékok.* Tribológiai Szakmérnöki Tanfolyam jegyzet, Veszprém, 2006.

[11] Bataller R.C.: Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition, *Appl. Math. Comput.*, **206** (2008), 832-840.

[12] Bates T.W., Williamson B., Spearot J.A., Murphy C.K.: A correlation between engine oil rheology and oil film thickness in engine journal bearings, Technical Report 860376 Society of Automotive Engineers 1986.

[13] Benlahsen M., Guedda M., Kersner R.: The generalized Blasius equation revisited, *Mathematical and Computer Modelling*, **47** (2008), 1063-1076.

[14] Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N.: *Transport Phenomena*, John Wiley, 1960.

[15] Blasius H.: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.*, **56** (1908), 1-37.

[16] Bognár G.: Similarity solutions of boundary layer flow for non-Newtonian fluids, *Int. J. Nonlinear Scie. Numerical Simulations*, **10** (2009), 1555-1566.

[17] Bognár G.: Boundary layer problem on conveyor belt, VI Conferencia Científica International de Ingeniería Mecánica, COMEC 2010 Cuba, 1-5. ISBN:978-959-250-602-2

[18] Bognár G.: Power series solutions of boundary layer problem for non-Newtonian fluid flow driven by power law shear, In: S. Lagakos et al. Recent Advances in Applied Mathematics, Harvard Univ. Cambridge, USA, Jan. 27-29, 2010. American Conference on Applied Mathematics, Mathematics and Computers in Science and Engineering A Series of Ref Books and Textbooks, WSEAS Press ISBN: 978-969-474-150-2, 244-250.

[19] Bognár G.: Analytic solutions to the boundary layer problem over a stretching wall, *Computers and Mathematics with Applications*, **61** (2011), 2256-2261.

[20] Bognár G.: On similarity solutions to boundary layer problems with upstream moving wall in non-Newtonian power-law fluids, *IMA J. Applied Mathematics*, (2011) 1-17. doi: 10.1093/imamat/hxr033

[21] Bognár G., Hriczó K.: Similarity Solution to a thermal boundary layer model of a non-Newtonian fluid with a convective surface boundary condition, *Acta Polytechnica Hungarica*, **8** (2011), 131-140.

[22] Bognár G.: Analytic solutions to a boundary layer problem for non-Newtonian fluid flow driven by power law velocity profile, *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, **6** (2011), 22-31.

[23] Bognár G.: On similarity solutions for non-Newtonian boundary layer flows, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,* **2012** (2) (2012), 1-8.

[24] Bognár G., Hriczó K.: Series solutions for Marangoni convection on a vertical surface, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2012, Article ID 314989, 18 pages, doi:10.1155/2012/3149899

[25] Bognár G., K. Hriczó: Laminar thermal boundary layer model for power-law fluids over a permeable surface with convective boundary condition, In: Recent Advances in Fluid Mechanics, Heat & Mass Transfer, 198-203. ISBN: 978-1-61804-065-7

[26] Bognár G.: The boundary layer problems of power-law fluids, *Math. Bohemica*, **137** (2012), 139-148.

[27] Bognár G., Csáti Z.: Iterative transformation method for the generalized Blasius equation, XXVI microCAD International Scientific Conference, Miskolc, 29-30 March 2012, E10 ISBN: 978-963-661-773-8

[28] O'Brien S.B.G., Schwartz L.W.: Theory and modeling of thin film flows, In.: A.T. Hubbard: Encyclopedia of Surface and Colloid Science, Marcel Dekker, New York, 2002, 5283-5297.

[29] Callegari A.J., Nachman A.: Some singular nonlinear differential equations arising in boundary layer theory, *J. Math. Anal. Appl.*, **64** (1978), 96-105.

[30] Christopher D.M., Wang B-X.: Similarity simulation for Marangoni convection around a vapor bubble during nucleation and growth, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* **44** (2001), 799-810.

[31] Congedo P. M., Collura S.: Modeling and analysis of natural convection heat transfer in nanofluids, In: Proc. ASME Summer Heat Transfer Conf. 2009, **3** (2009), 569-579.

[32] Cossali G.E.: Power series solutions of momentum and energy boundary layer equations for a power law shear driven flow over a semi-infinite flat plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* **49** (2006), 3977-3983.

[33] Crane L.J., Flow past a stretching sheet, *ZAMP*, **21** (1970), 645-647.

[34] Darby R.: *Chemical Engineering Fluid Mechanics*, Marcel Dekker Inc., New York 2001.

[35] Deen W M.: *Analysis of Transport Phenomena*, Oxford University Press, New York 1998.

[36] Erickson, L.E., Fan, L.T., Fox, V.G.: Heat and mass transfer on a moving continuous flat plate with suction or injection. *Ind. Eng. Chem.*, **5** (1966), 19-25.

[37] Fisher, E.G.: *Extrusion of Plastics,* John Wiley, New York 1976.

[38] Gupta P.S., Gupta A.S.: Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing, *Can. J. Chem. Eng.,* **55** (1977) 744-746.

[39] Hirano F., Sakai T.: Effect of temperature gradient on spreading behavior of mineral oils and related tribological phenomena, In: T. Sakurai: Proceedings of the JSLE-ASLE International Lubrication Conference, Tokyo Japan, June 9-11, 1975. Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York, 631-638.

[40] Hori Y.: *Hydrodynamic Lubrication*, Springer-Verlag, Tokyo, 2006.

[41] Hussaini M.Y., Lakin W.D.: Existence and nonuniqueness of similarity solutions of a boundary-layer problem, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **39** (1986), 177-191.

[42] Hussaini M.Y., Lakin W.D., Nachman, A.: On similarity solutions of a boundary layer problem with an upstream moving wall, *SIAM J. Appl. Math.*, **47** (1987), 699-709.

[43] Ishak A.: Similarity solution for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition, *Appl. Math. Comput.*, **217** (2010), 837-842.

[44] Klemp, J.B., Acrivos, A.A.: A method for integrating the boundary-layer equations through a region of reverse flow, *J. Fluid Mech.*, **53** (1972), 177-199.

[45] Kumaran V., Ramanaiah G.: A note on the flow over a stretching sheet, *Acta Mech.,* **116** (1996), 229-233.

[46] Lajos T.: *Az áramlástan alapjai*, Egyetemi tankönyv, Budapest 2008.

[47] Liao S.J.: A challenging nonlinear problem for numerical techniques, *J. Comput. Appl. Math.*, **181** (2005), 467-472.

[48] Ludviksson Y., Lightfoot E.N.: The dynamics of thin films in the presence of surface tension gradients, *AIChE J.*, **17** (1966), 1166-1173.

[49] Magyari, E., Keller, B.: Heat and mass transfer in the boundary layers on an exponentially stretching continuous surface, *J. Phys. D; Appl. Phys.*, **32** (1999), 577-585.

[50] Magyari E., Keller B.: Exact solutions for self-similar boundary layer flows induced by permeable stretching walls, *Eur. J. Mech. B Fluids*, **19** (2000), 109-122.

[51] Magyari E., Keller B., Pop I.: Boundary-layer similarity flows driven by a power-law shear over a permeable plane surface, *Acta Mechanica*, **163** (2003), DOI 10.1007/s00707-003-0001-1

[52] Mang T., Dresel W.: *Lubricants and Lubrications*, Wiley-VCH, Weinheim, 2001.

[53] Matar O.K., Troian S.M.: Dynamics and stability of surfactant coated thin spreading films, In.: J.M. Drake, J. Klafter, R. Kopelman: Mat. Res. Soc. Symp. Proc. Vol. 464, 1997, 237-242. DOI: http://dx.doi.org/10.1557/PROC-464-237

[54] Na T. Y.: The non-newtonian squeeze film, *ASME J. Basic Eng.*, **88** (1966), 687-688.

[55] Napolitano L.G., Golia C.: Coupled Marangoni boundary layers, *Acta Astronautica*, **8** (1981), 417-434.

[56] Nessil A., Larbi S., Belhaneche H., Malki M.: Journal bearings lubrication aspect analysis using non-Newtonian fluids, *Advances in Tribology*, **2013** (2013), Article ID 212568, 9 pages http://dx.doi.org/10.1155/2013/212568

[57] Prandtl L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. III. Intern. Math. Kongr., Heidelberg, 1904, S. 484-491, Teubner, Leipzig, 1905.

[58] Safar Z. S.: Journal bearing operating with non-newtonian lubricant films, *Wear*, **53** (1979), 95-100.

[59] Sakiadis B.C.: Boundary layer behavior on continuous solid surfaces. II: The boundary layer on a continuous flat surface, *AIChE J.*, **7** (1961), 221-225.

[60] Schlichting H., Gersten K.: *Boundary Layer Theory,* 8th revised and enlarged ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2000.

[61] Schowalter W.R.: *Mechanics of Non-Newtonian fluids*, Pergamon Press, Oxford 1978.

[62] Shukla J. B.: Theory for the squeeze film for power law lubricants, *ASME Paper* 64-Lub-4, 1964.

[63] Shukla J. B.: Load capacity and time relation for squeeze films in conical bearings, *Wear*, **7** (1964), 368-371.

[64] Shukla J. B., Prakash J.: The rheostatic thrust bearing using power law fluids as lubricants, *Jpn. J. Appl. Phys.*, **8** (1969), 1557-1562.

[65] Shukla J. B., Isa M.: Characteristics of non-newtonian power law lubricants in step bearings and hydrostatic step seals, *Wear*, **30** (1) (1974), 51-71.

[66] Singleterry C.R.: Some factors affecting the movement of oil in miniature ball bearings, NRL report 6555, 1967.

[67] Sinha P., Singh C.: Lubrication of a cylinder on a plane with non-newtonian fluid considering cavitation, *J. Lubr. Technol.*, **104** (1982), 168-172.

[68] Sinha P., Singh C., Prasad K. R.: Effects of viscosity variation due to lubricant additives in journal bearings, *Wear*, **66** (1981), 175-188.

[69] Sinha P., Shukla J. B., Prasad K. R., Singh C.: Nonnewtonian power law fluid lubrication of lightly loaded cylinders with normal and rolling motion, *Wear*, **89** (1983), 313-322.

[70] Steinheuer J.: Die Lösungen der Blasiusschen Grenzschichtdifferentialgleichung, *Abhandlg. der Braunschweigischen Wiss. Ges.*, **20** (1968), 96-125.

[71] Tanner R. I.,: Non-newtonian lubrication theory and its application to the short journal bearing, *Aust. J. Appl. Sci.*, **14** (1963), 29-36.

[72] Tadmor Z., Klein I.: *Engineering Principles of Plasticating Extrusion*, Polymer Science and Engineering Series. Van Norstrand Reinhold, New York 1970.

[73] Tower B.: First report on friction-experiments (friction of lubricated bearings), *Proc. Institution of Mechanical Engineers*, November (1883), 632-659.

[74] Töpfer K.: Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Z. Math. Phys.*, **60** (1912), 397-398.

[75] Tsou F., Sparrow E.M., Goldstein R.: Flow and heat transfer in the boundary layer on a continuous moving surface, *Int. J. Heat Mass Transfer* **10** (1967), 219-235.

[76] Weidman P.D., Kubitschek D.G., Brown S.N.: Boundary layer similarity flow driven by power law shear, *Acta Mechanica* **120** (1997), 199-215.

[77] Weidman P.D., Magyari E.: Generalized Crane flow induced by continuous surfaces stretching with arbitrary velocities, *Acta Mechanica* **209** (2010), 353-362. DOI: 10.1007/s00707-009-0186-z

[78] Weinstein S.J., Ruschak K.J.: Coating flows, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, **36** (2004), 29-53. doi: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122049

[79] White F.M.: *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York 1974.

[80] Williams P. D., Symmons G. R.: Analysis of hydrodynamic journal bearings lubricated with non-Newtonian fluids, *Tribology International*, **20** (1987), 119-124.

[81] Zheng L.C., Chen X.H., Zhang X.X., He J.C.: An approximately analytical solution for the Marangoni convection in an In-Ga-Sb system, *Chin. Phys. Lett.*, **21** (2004), 1983-1985.

[82] Zheng L., Zhang X., He J.: Suitable heat transfer model for self-similar laminar boundary layer in power law fluids, *J. Thermal Science*, **13** (2004), 150-154.