

## Válasz

### **Kersner Róbert, a matematikai tudomány doktora bírálatára**

Vadászné Bognár Gabriella:

Analysis of tribological phenomena in viscous fluid flows over solid surfaces

című MTA doktori értekezésére vonatkozóan

Köszönöm a Bíráló észrevételeit, javaslatait, valamint értékes megjegyzéseit.

Köszönöm a Bírálónak a téma bemutatását és azt, hogy kiemelte a témához tartozó irodalom rendkívüli terjedelmét és az alkalmazási területek széles körét (pl. orvostudomány, gyártástechnológiák, papírgyártás, kristályosodás elmélet, repüléstechnika stb.).

Prandtl elméletének alkalmazása a határrétegbeli jelenségek vizsgálatára 1904-től nagyon sokaknak jelentett kihívást annak ellenére, hogy a Navier-Stokes-egyenletekből származtatott parciális differenciálegyenletek sok szempontból egyszerűbbnek tűnnek, mint az eredeti probléma. Két nevet mindenképp megemlítenék, Kármán Tódor és Neumann János nevét, akik a határréteg egyenletek vizsgálatával több szempontból foglalkoztak. A Blasius-féle transzformált közönséges differenciálegyenletek megoldásaira vonatkozóan a matematikusok kívánnak tulajdonságokat igazolni. Zárt alakban a megoldásokat előállítani csak nagyon kevés, speciális esetben lehet. A feladat numerikus megoldása is nehéz. Ennek oka, hogy a hasonlósági módszerrel származtatott harmadrendű, nemlineáris közönséges differenciálegyenlethez három peremfeltétel járul, melyekkel a felület felszínén a sebesség komponenseket jellemezzük, két-dimenzióban az  $u$  és  $v$  komponenseket (a feltételekben megjelenhet pl. a csúszás, a felület áteresztő képessége, a felület áramlás irányú sebessége) és a harmadik feltétel a felülettől távol, a határréteg szélén ír elő megkötést a

sebességre. Ezért a peremérték feladatot a  $(0, \infty)$  tartományon kell megoldani. Gyakorlati szempontból a differenciálegyenlet  $f$  megoldására csak akkor van szükségünk, ha a mozgásegyenlethez további egyenlet(ek) járulnak pl. energiaegyenlet, vagy a koncentrációváltozást leíró egyenlet, mert a dimenziómentes hasonlósági függvényekre kapcsolt egyenletrendszert kapunk. A sebességprofilokhoz, valamint az ellenállás tényező kiszámításához az  $f'$  függvény és az  $f''(0)$  értéke az érdekes. A numerikus számításokban nehézséget okoz, hogy a peremérték feladatokat megoldó szoftverek csak véges, csonkolt intervallumon alkalmazhatóak. Nagyon fontos a megoldás „jósága” szempontjából, hogy ezt a véges intervallumot hogyan választjuk meg. Ha túl nagyra választjuk, akkor a numerikus szimulációk nem adnak eredményt. Ha túl kicsire, akkor a kapott eredmény hibás lesz. Erre a kérdésre vonatkozóan is nagy irodalmat találunk. A Töpfer-transzformáció olyan kivételes eszköz, amellyel a peremérték feladatot kezdetiérték feladattá lehet transzformálni és ekkor ez a számítási probléma nem jelentkezik. Ekkor nem kell iterációt alkalmazni a megoldások előállításához. Az egyéb esetekben minden peremfeltétel kombinációhoz egyedileg kidolgozott iteratív transzformációs eljárással lehetséges az  $f$ -t,  $f'$ -t és  $f''(0)$ -t meghatározni (itt megemlíteném pl. R. Fazio és O. Koch műveit) és nagyon körültekintően meg kell vizsgálni a konvergencia kérdését. Ez is sok hiba forrását okozhatja. A numerikus számításokban az  $n$  kitevő értéke is nagyon fontos, mert az iteratív eljárásokban azt tapasztaltam, hogy ezek az eljárások  $n$  értékére nagyon érzékenyek. Newtoni folyadékra általában könnyen eredményt kapunk, de ha az  $n$  értéke a newtoni folyadékra érvényes 1 értéktől jelentősebben eltér (akár kisebb, akár nagyobb értéket vesz fel), a numerikus szimulációk nem adnak eredményt, vagy helytelen eredményre jutunk.

A Bíráló által jelzett első és harmadik tézis első fele a közönséges differenciálegyenletek származtatására vonatkozik. Ezeknek az egyenleteknek a levezetésére az értekezésben jeleztem az első tézisre vonatkozóan Acrivos és társainak [4], Benlahsen és társainak [25] és

Schowalternek [179] a műveit a 23. oldalon, ill. a harmadik tézisre vonatkozóan newtoni folyadéokra ( $n=1$ ) Cossali [70] és Guedda [94], nem-newtoni folyadékra Guedda [95] dolgozatát a 34. oldalon. A tézisek ezen részeinek tézisfüzetbeli megfogalmazása nem megfelelő.

Elfogadom a Bíráló azon megjegyzését, hogy az eredmények bemutatása sikeresebb lett volna, ha a kiszámított értékeket mérési eredményekkel tudtam volna összevetni. Három mérési sorozatra volt lehetőségem az elmúlt időszakban a Borsodchem Zrt laboratóriumában, az MTA Kémiai Kutató Intézetében és a Miskolci Egyetem Műszaki Földtudományi Kar Nyersanyagelőkészítési és Környezeti Eljárástechnikai Intézetében. Mindhárom esetben az anyag (olvadt polimer, ill. zagy) nem-newtoni reológiai jellemzőit a —  $K$  konzisztencia együtthatót és  $n$  hatványkitevőt — sikerült megmérni; szeretném köszönetemet kifejezni azoknak, akik ebben közreműködtek és ezt lehetővé tették: Dr. Marossy Károly, Dr. Kovács János és Dr. Gombkötő Imre. A sebesség és a hőmérséklet eloszlásokhoz szükséges mérési lehetőségekre azonban nem volt módunk. Köszönöm a Bírálónak azt a megjegyzését, mely szerint az értekezés eredményei ipari kutatóintézetek számára is hasznosak lehetnek az experimentális vizsgálatokhoz.

Még egyszer köszönöm a tisztelt Bíráló megjegyzéseit, kritikáit, amelyeket a későbbi munkáimban figyelembe fogok venni.

Miskolc, 2014. április 15.

Vadászné Bognár Gabriella