

Válasz opponensi bírálatra

Opponens: Patkó Gyula, a műszaki tudományok kandidátusa

Szeretném megköszönni Patkó Gyula Professzor Úr igen alapos és számos részletre kiterjedő bírálatát, valamint értékes észrevételeit, ellenőrzéseit és az elfogadásra vonatkozó véleményét. Külön megköszönöm a téziszűzetre vonatkozó észrevételét. A téziszűzetben a helyesírási és szóhasználati hibák ki lettek javítva. Bíró István Docens Úr segített a fűzet átdolgozásában, amit külön megköszönök.

1. megjegyzés: *Patkó Gyula és Béda Péter Professzor Urak rámutatattak arra, hogy az értekezésből hiányzik egy következetesen alkalmazott jelölésjegyzék.*

Elkészítettem a jelölésjegyzéket, amely az alábbiakban látható.

NOMENCLATURE

A, A_S amplitude and steady-state amplitude of vibration, respectively

α order of nonlinearity

δA virtual work of active forces and torques, and nonholonomic reactions and torques

δA^I virtual work of inertial forces and torques

$\delta A^{M\phi}$ virtual work of moment of reactive force relating to S

$\delta A^{\phi a}, \delta A^{Ra}$ virtual work of reactive force and reactive torque, respectively

B beta function

b coefficient of linear damping

c coefficient of nonlinear damping

cc complex conjugate function

$E(k^2)$ complete elliptic integral of the second kind

ε small parameter

${}_2F_1$ Gaussian hypergeometric function

$\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_r(F_x, F_y, F_z)$ external and resultant force with projections, respectively

Φ reactive force

Φ_a part of reactive force

$\delta\phi, \delta\phi_1, \delta\phi_2$ virtual angle of rotation of initial, final and separated or added body

Γ gamma special function

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ unit vectors

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} axial moments of inertia for fixed axes

I_{xy}, I_{xz}, I_{zy} centrifugal moments of inertia for fixed axes

$I_{\xi\xi}, I_{\eta\eta}, I_{\zeta\zeta}$ axial moments of inertia for movable axes

$I_{\xi\eta}, I_{\xi\zeta}, I_{\eta\zeta}$ centrifugal moments of inertia for movable axes

$\mathbf{I} = \mathbf{I}_S$ tensor of moment of inertia for initial body relating to S

I_S, I_{S1}, I_{S2} moment of inertia for S, S_1 and S_2 , respectively

$\mathbf{I}_{S1}$ tensor of moment of inertia for final body relating to S_1

$\mathbf{I}_{S2}$ tensor of moment of inertia for separated or added body relating to S

$i = \sqrt{-1}$ imaginary unit

$\mathbf{J}^{Fr}, \mathbf{J}^M$ impuls of resultant force and torque, respectively

k_α coefficient of nonlinear elasticity

k_1 coefficient of linear elasticity

k^2 modulus of Jacobi elliptic function

$K(k^2)$ complete elliptic integral of the first kind

$\mathbf{K}, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ linear momentum of initial, final and separated or added body, respectively

$\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_b$ linear momentum after and before body separation
 $\Delta \mathbf{K}$ difference between linear momentums before and after mass variation
 L length of pendulum
 l length of separated part of pendulum
 $\mathbf{L}_{Oa}, \mathbf{L}_{Ob}$ angular momentum after and before body separation
 $\Delta \mathbf{L}_O$ difference between angular momentums before and after mass variation
 $\mathbf{L}_O, \mathbf{L}_{O1}, \mathbf{L}_{O2}$ angular momentum of initial, final and separated or added body relating to O
 $\mathbf{L}_S$ angular momentum of initial body relating to mass center S
 $\mathbf{L}_{S1}$ angular momentum of final body relating to mass center S_1
 $\mathbf{L}_{S2}$ angular momentum of separated or added body relating to mass center S_2
 $\mathbf{M}_S^{Fr}$ moment of resultant force relating to S
 M_ξ, M_η, M_ζ projections of $\mathbf{M}_S^{Fr}$
 $\mathbf{M}_S^\Phi(M_\xi^\Phi, M_\eta^\Phi, M_\zeta^\Phi)$ moment of reactive force relating to S and projections
 M mass of initial body
 m added or separated mass
 $m(\tau)$ time variable mass
 m_0 initial mass
 $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_\xi, \mathfrak{M}_\eta, \mathfrak{M}_\zeta)$ torque vector and projections
 $\mathcal{M}$ moment of torque
 n natural number
 ω frequency of vibration
 ω_0 frequency of linear oscillator
 ω_1 frequency of Jacobi elliptic function
 $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ absolute angular velocity of initial, final and separated or added body
 $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ intensity of angular velocity of initial, final and separated or added body
 $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ projections of the angular velocity Ω on fixed axes
 $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ projections of the angular velocity Ω on movable axes
 Ω_{x1}, Ω_{y1} and Ω_{z1} projections of the angular velocity Ω_1
 Ω_{x2}, Ω_{y2} and Ω_{z2} projections of angular velocity Ω_2 on fixed axes
 $\Omega_{2\xi}, \Omega_{2\eta}, \Omega_{2\zeta}$ projections of angular velocity Ω_2 on movable axes
 Ω_x^*, Ω_y^* and Ω_z^* projections of the angular velocity Ω^*
 Ω_1^*, Ω^* relative angular velocity of final and separated or added body
 Ω_1^*, Ω^* intensity of angular velocity of final and separated or added body
 $\Omega(\tau)$ time-variable frequency of vibration
 $q_i, \dot{q}_i$ generalized coordinate and velocity
 Q_i generalized force of active forces and torques and reactions of non-ideal constraints
 Q_i^J generalized impulse
 $Q_i^{M\phi}$ generalized moment of reactive force
 $Q_i^{\phi a}, Q_i^{Ra}$ generalized reactive force and reactive torque, respectively
 θ phase angle
 R radius of rotor
 $\mathbb{R}(\mathfrak{R}_\xi, \mathfrak{R}_\eta, \mathfrak{R}_\zeta)$ reactive torque and projections
 $\mathbb{R}_a$ part of reactive torque
 $\mathbf{r}$ position vector
 $\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_{S1}, \mathbf{r}_{S2}$ position vector of mass center of initial, final and separated or added body according to the fixed point O
 $\delta \mathbf{r}_S$ virtual displacement of position of mass center S

$\delta \mathbf{r}_{S1}$ virtual displacement of position of mass center S_1
 $\delta \mathbf{r}_{S2}$ virtual displacement of position of mass center S_2
 ρ_{S1} position vector of center S_1 relating to S
 $\rho_{S1} = SS_1$ intensity of vector ρ_{S1}
 $\rho_{S2}(\rho_{S2x}, \rho_{S2y})$ position vector of center S_2 relating to S and projections
 $\rho_{S2} = SS_2$ intensity of vector ρ_{S2}
 $\rho'_{S2}(\rho'_{S2x}, \rho'_{S2y})$ position vector of S_2 relating to S_1 and projections
 ρ, φ position of rotor center in polar coordinates
 t time
 Δt time interval
 T period of vibration
 T_{ex} exact period of vibration
 $\dot{T}$ kinetic energy
 T_1, T_2 kinetic energy before and after mass variation, respectively
 τ 'slow time'
 $\mathbf{u}(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ relative velocity of mass center S_2 of separated or added body and projections
 $\mathbf{v}^*$ relative velocity of mass center S_1 of final body
 $\mathbf{v}_S(v_{Sx}, v_{Sy})$ absolute velocity of mass center S of initial body and projections
 v_S intensity of $\mathbf{v}_S$
 v_{Sx0}, v_{Sy0} projections of initial velocity of rotor center
 $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z) = \mathbf{v}_{S1}(v_{S1x}, v_{S1y}, v_{S1z})$ absolute velocity of mass center S_1 of final body and projections
 $\mathbf{v}_{S2}(v_{S2x}, v_{S2y})$ absolute velocity of mass center S_2 of separated or added body and projections
 $\mathbf{v}_{S2d}, v_{S2d}$ dragging velocity and intensity
 $\mathbf{v}_{S2dT}, \mathbf{v}_{S2dN}$ tangential and normal components of dragging velocity
 v_{S2dT}, v_{S2dN} intensity of tangential and normal components dragging velocity
 x, y position coordinates
 x_0, y_0 initial coordinates of deflection
 x_A, y_A, x_N, y_N analytically and numerically obtained position coordinates
 X, Y projections of elastic force
 x_{S0}, y_{S0} initial coordinates of rotor center
 Ψ angle position vector
 $\delta \Psi$ virtual angle
 ψ angle position of rotor
 $z, \bar{z}$ complex and complex conjugate deflection function
 Z_i generalized inertial force

2. megjegyzés: Az értekezésben a szétválást és az ütközést együtt tárgyalta, ami meglehetősen tömör leírást tett lehetővé. Ennek következtében sajnos látható módon a képletek nehezen követhetők és megnehezítik a bírálók dolgát.

Az egyenletekben a kettős előjelű tagoknál a felső előjel a tömeg szeparációjára, míg az alsó a tömegek addíciójára vonatkozik.

1. kérdés: A 69. oldalon a 7.4.2 pont utolsó bekezdésében az szerepel, hogy a tömeg növekedésével az amplitúdó növekszik. Milyen fizikai magyarázat fűzhető ehhez a megállapításhoz?

Miközben a folyamatos tömegváltozás az idő függvénye, egy ellenerő keletkezik. Az ellenerő az infinitezimális tömegváltozás és a sebesség szorzata (I.V. Meshcherski, Raboti po mehanike tel peremennoj massji, Gos.Izd.Teh.-Teo.Lit. Moskva, 1952), vagyis

$$\Phi = \frac{dm}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}),$$

ahol $\mathbf{u}$ a leválasztott tömeg sebessége és $\mathbf{v}$ az alaptest sebessége. A 68. és 69. oldalon az ellenerő hatását egy lengő rendszer példáján keresztül tanulmányoztam. Arra a következtetésre jutottam, hogy amennyiben a levált test sebessége nulla, vagyis $\Phi = -\frac{dm}{dt}\mathbf{v}$, a rezgés amplitúdója csökken. Ha $\mathbf{u}=\mathbf{v}$, vagyis a leválasztott tömeg és a test sebessége egyenlő, az ellenerő nulla, a rezgés amplitúdója növekszik. Valós viszonyok között az ellenerő nagysága zérótól eltérő, a rezgés amplitúdójának értéke az ellenerő és a tömegváltozás függvénye.

2. kérdés: 4. és 6. fejezetben levezetett Lagrange féle másodfajú mozgásegyenletek csak speciális esetekre érvényesek mivel a $\frac{d\psi}{dt} = \Omega$ összefüggés nem mindig áll fenn. Az Ω szögsebesség vektor a merev test általános térbeli mozgása esetén nem állítható elő egy ψ szögelfordulás vektor idő szerinti deriváljaként.

A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek levezetése pontrendszerekre történt, amelyben ezért csak helyzet-, sebesség- és gyorsulás-vektorok jelennek meg. Levezetés vagy bizonyítás nélkül az egyenleteket merev testek rendszerére is használjuk: ha az általános koordináta szög, az általános erő erőpár, a virtuális munka pedig az erőpár vektorának és virtuális szögelfordulásának szorzata.

Elfogadom Patkó Gyula Professzor Úr megjegyzését. A 4. és a 6. fejezetben a Lagrange-D’Alambert-tétel és az analitikai képleteket csak speciális esetekre érvényesek.

A hiányosság kiküszöbölésére az egyenleteket módosítottam, amint az alábbiakban látható.

LAGRANGE'S EQUATIONS FOR CONTINUAL MASS VARIATION

In this Section the Lagrange's equations of the second kind for the body with continual mass variation are derived. Let us rewrite the Eqs. (151) and (152) into the form

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = \mathbf{F}_r + \Phi_a, \quad (227)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}\Omega) = \mathbf{M}_S^{Fr} + \mathfrak{M} + \mathbf{M}_S^\Phi + \mathbb{R}_a. \quad (228)$$

where

$$\Phi_a = \frac{dM}{dt}\mathbf{u}, \quad \mathbb{R}_a = \frac{d\mathbf{I}}{dt}\Omega_2, \quad (229)$$

and the reactive force Φ and the moment of the reactive force $\mathbf{M}_S^\Phi$ are given with Eqs. (156) and (158), respectively.

Let us introduce a virtual motion of the body: a virtual rotation and a virtual translator motion of the system centre. Multiplying the Eq. (227) with the virtual displacement $\delta\mathbf{r}$ we have

$$(\mathbf{F}_r + \Phi_a)\delta\mathbf{r} - (M\dot{\mathbf{v}} + \dot{M}\mathbf{v})\delta\mathbf{r} = 0, \quad (230a)$$

where $(\dot{\cdot}) \equiv d(\cdot)/dt$. For rotation virtual variation of three independent Euler angles are introduced: the virtual variation of the precession angle $\delta\Psi_p$, virtual variation of the nutation angle $\delta\Psi_n$ and virtual variation of the spin angle $\delta\Psi_s$.

Let us multiply Eq. (228) with $\delta\mathbf{\Psi}_p$, $\delta\mathbf{\Psi}_n$ and $\delta\mathbf{\Psi}_s$ separately. The sum of these products is

$$0 = (\mathbf{M}_S^{Fr} + \mathfrak{M} + \mathbf{M}_S^\Phi + \mathbb{R}_a)(\delta\mathbf{\Psi}_p + \delta\mathbf{\Psi}_n + \delta\mathbf{\Psi}_s) - (\mathbf{I}\dot{\mathbf{\Omega}} + \dot{\mathbf{I}}\mathbf{\Omega})(\delta\mathbf{\Psi}_p + \delta\mathbf{\Psi}_n + \delta\mathbf{\Psi}_s). \quad (230b)$$

Summarizing (230a) and (230b), we have

$$0 = (\mathbf{F}_r + \mathbf{\Phi}_a)\delta\mathbf{r} + (\mathbf{M}_S^{Fr} + \mathfrak{M} + \mathbf{M}_S^\Phi + \mathbb{R}_a)(\delta\mathbf{\Psi}_p + \delta\mathbf{\Psi}_n + \delta\mathbf{\Psi}_s) - (M\dot{\mathbf{v}} + \dot{M}\mathbf{v})\delta\mathbf{r} - (\mathbf{I}\dot{\mathbf{\Omega}} + \dot{\mathbf{I}}\mathbf{\Omega})(\delta\mathbf{\Psi}_p + \delta\mathbf{\Psi}_n + \delta\mathbf{\Psi}_s), \quad (230)$$

where $(\dot{\cdot}) \equiv d(\cdot)/dt$. The relation (230) describes the D'Alembert-Lagrange principle for the body with continual mass variation: The total virtual work, of all active forces and torques (including the non-ideal constraint reactions), of the reactive force and torque, of the moment of the reactive force and of the inertial force and torque, is equal to zero for any virtual displacement of mass centre and any virtual variation of precession, nutation and spin angles. Mathematically, it is

$$\delta A^I + \delta A^{\phi a} + \delta A^{Ra} + \delta A + \delta A^{M\phi} = 0, \quad (231)$$

where

$$\begin{aligned} \delta A^I &= -(M\dot{\mathbf{v}} + \dot{M}\mathbf{v})\delta\mathbf{r} - (\mathbf{I}\dot{\mathbf{\Omega}} + \dot{\mathbf{I}}\mathbf{\Omega})(\delta\mathbf{\Psi}_p + \delta\mathbf{\Psi}_n + \delta\mathbf{\Psi}_s), \\ \delta A^{\phi a} &= \mathbf{\Phi}_a\delta\mathbf{r}, \\ \delta A^{Ra} &= \mathbb{R}_a(\delta\mathbf{\Psi}_p + \delta\mathbf{\Psi}_n + \delta\mathbf{\Psi}_s), \\ \delta A^{M\phi} &= \mathbf{M}_S^\Phi(\delta\mathbf{\Psi}_p + \delta\mathbf{\Psi}_n + \delta\mathbf{\Psi}_s), \\ \delta A &= \mathbf{F}_r\delta\mathbf{r} + (\mathbf{M}_S^{Fr} + \mathfrak{M})(\delta\mathbf{\Psi}_p + \delta\mathbf{\Psi}_n + \delta\mathbf{\Psi}_s). \end{aligned} \quad (232)$$

Let us introduce $i = 1, 2, \dots, 6$ independent generalized coordinates q_i . The position vector $\mathbf{r}$ and the angle vectors $\mathbf{\Psi}_p$, $\mathbf{\Psi}_n$ and $\mathbf{\Psi}_s$ depend on the generalized coordinates q_i and time t

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_i, t), \quad \mathbf{\Psi}_p = \mathbf{\Psi}_p(q_i, t), \quad \mathbf{\Psi}_n = \mathbf{\Psi}_n(q_i, t), \quad \mathbf{\Psi}_s = \mathbf{\Psi}_s(q_i, t). \quad (233)$$

Using (233), the virtual displacement and the virtual variation of Euler angles are determined by formulas

$$\delta\mathbf{r} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta\mathbf{\Psi}_p = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\mathbf{\Psi}_p}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta\mathbf{\Psi}_n = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\mathbf{\Psi}_n}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta\mathbf{\Psi}_s = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\mathbf{\Psi}_s}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (234)$$

where δq_i is the variation of the generalized coordinate q_i . Substituting (234) into (231) and after some modification we have

$$\sum_{i=1}^6 (Z_i + Q_i^{\phi a} + Q_i^{Ra} + Q_i + Q_i^{M\phi}) \delta q_i = 0, \quad (235)$$

where the generalized inertial force Z_i , generalized force of the part of the reactive force $Q_i^{\phi a}$ and reactive torque Q_i^{Ra} , generalized force of the active forces and torques and reactions of non-ideal constraints Q_i and the generalized force

of the moment of the reactive force $Q_i^{M\phi}$ are calculated according to following formulas

$$\begin{aligned}
Z_i &= -\left[\frac{d}{dt}(M\mathbf{v})\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\Omega)\left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_n}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial q_i}\right)\right], \\
Q_i^{\phi a} &= \Phi_a \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}, \\
Q_i^{Ra} &= \mathbb{R}_a\left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_n}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial q_i}\right) \\
Q_i &= \mathbf{F}_r \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} + (\mathbf{M}_S^{Fr} + \mathfrak{M})\left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_n}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial q_i}\right), \\
Q_i^{M\phi} &= \mathbf{M}_S^{\Phi}\left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_n}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial q_i}\right). \tag{236}
\end{aligned}$$

The generalized inertial force Z_i is rewritten as

$$\begin{aligned}
Z_i &= -\frac{d}{dt}\left[(M\mathbf{v})\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} + (\mathbf{I}\Omega)\left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_n}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial q_i}\right)\right] \\
&\quad + \left[(M\mathbf{v})\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} + (\mathbf{I}\Omega)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_n}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial q_i}\right)\right]. \tag{237}
\end{aligned}$$

Let us determine the velocity and angular velocity as a function of generalized coordinates. Using the assumption that generalized coordinates depend on time, $q_i \equiv q_i(t)$, and the definition of the velocity ($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$) and angular velocities of the precession ($\Omega_p = d\Psi_p/dt$), nutation ($\Omega_n = d\Psi_n/dt$) and spin ($\Omega_s = d\Psi_s/dt$), we have

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \Omega_p = \frac{d\Psi_p}{dt} = \frac{\partial\Psi_p}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi_p}{\partial q_i} \dot{q}_i, \\
\Omega_n &= \frac{d\Psi_n}{dt} = \frac{\partial\Psi_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi_n}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \Omega_s = \frac{d\Psi_s}{dt} = \frac{\partial\Psi_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi_s}{\partial q_i} \dot{q}_i. \tag{238}
\end{aligned}$$

For the case of stationary constraints the first term in all formulas (238) are zero. As the generalized velocity $\dot{q}_i$ is only a multiplier of the partial derivatives $\partial\mathbf{r}/\partial q_i$, $\partial\Psi_p/\partial q_i$, $\partial\Psi_n/\partial q_i$ and $\partial\Psi_s/\partial q_i$ in (238), we obtain

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\Omega_p}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\Psi_p}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\Omega_n}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\Psi_n}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\Omega_s}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\Psi_s}{\partial q_i}. \tag{239}$$

On the other hand, taking the partial derivatives of both the sides of equalities (238), we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_i} &= \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t\partial q_i} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_i\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \frac{\partial\Omega_p}{\partial q_i} = \frac{\partial^2\Psi_p}{\partial t\partial q_i} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2\Psi_p}{\partial q_i\partial q_j} \dot{q}_j, \\
\frac{\partial\Omega_n}{\partial q_i} &= \frac{\partial^2\Psi_n}{\partial t\partial q_i} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2\Psi_n}{\partial q_i\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \frac{\partial\Omega_s}{\partial q_i} = \frac{\partial^2\Psi_s}{\partial t\partial q_i} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2\Psi_s}{\partial q_i\partial q_j} \dot{q}_j. \tag{240}
\end{aligned}$$

Directly, the time derivative of $(\partial\mathbf{r}/\partial q_i)$ and $(\partial\Psi_p/\partial q_i)$, $(\partial\Psi_n/\partial q_i)$, $(\partial\Psi_s/\partial q_i)$ is

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi_p}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j, \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial q_i} \right) &= \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j.
\end{aligned} \tag{241}$$

The right sides of the Eqs. (240) and (241) are equal, and consequently,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right), \quad \frac{\partial \Omega_p}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi_p}{\partial q_i} \right), \\
\frac{\partial \Omega_n}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial q_i} \right), \quad \frac{\partial \Omega_s}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_i} \right).
\end{aligned} \tag{242}$$

Applying (239) and (242), the generalized inertial force (237) is

$$\begin{aligned}
Z_i &= -\frac{d}{dt} [(M\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} + (\mathbf{I}\Omega) \left(\frac{\partial \Omega_p}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Omega_n}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Omega_s}{\partial \dot{q}_i} \right)] \\
&\quad + [(M\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} + (\mathbf{I}\Omega) \left(\frac{\partial \Omega_p}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_n}{\partial q_i} + \frac{\partial \Omega_s}{\partial q_i} \right)],
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
Z_i &= -\frac{d}{dt} [(M\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} + (\mathbf{I}\Omega) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\Omega_p + \Omega_n + \Omega_s)] \\
&\quad + [(M\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} + (\mathbf{I}\Omega) \frac{\partial}{\partial q_i} (\Omega_p + \Omega_n + \Omega_s)].
\end{aligned} \tag{243}$$

As the sum of the angular velocities of precession, nutation and spin gives the total angular velocity Ω of the rigid body rotation about the fixed point

$$\Omega = \Omega_p + \Omega_n + \Omega_s,$$

Eq. (243) yields

$$Z_i = -\frac{d}{dt} [(M\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} + (\mathbf{I}\Omega) \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_i}] + [(M\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} + (\mathbf{I}\Omega) \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}].$$

After some modification, it is

$$Z_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i}, \tag{244}$$

where $\tilde{T}$ is the kinetic energy

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} M \mathbf{v} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \Omega \Omega. \tag{245}$$

Substituting (244) into (235) the general equation of dynamics for mass variation is

$$\sum_{i=1}^6 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} - \left(Q_i + Q_i^{\phi a} + Q_i^{Ra} + Q_i^{M\phi} \right) \right] \delta q_i = 0 \tag{246}$$

Since the coordinates q_i are independent so are the variations δq_i and therefore condition (246) implies

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^{\phi\alpha} + Q_i^{R\alpha} + Q_i^{M\phi}, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (247)$$

3. kérdés: A 7.4. fejezetben a (335) egyenlet baloldalán mind a két tag előjele pozitív. A (336) egyenlet bal oldalán a második tag felesleges, és a jobb oldalon hiányzik a

$$-A\dot{A} \frac{\partial \Omega}{\partial A} \sin\psi \cos\psi$$

tag.

A (335) egyenlet bal oldalán valóban mind a két tag előjele pozitív. Emiatt a (337), (342), (344), (345), (347), (352)-(354), (360), (361), (364), (365), (367)-(369) egyenletekben és a 69. oldalon az első sorban lévő képletben $(5-\alpha)$ helyett $(3+\alpha)$ -t kell szerepeltetni.

A javított (336) egyenlet alapján a (338) és (339) egyenletek

$$A\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon A^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\omega \Omega_\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau, A \cos\psi, -A \Omega \sin\psi) \cos\psi d\psi,$$

és

$$\dot{\psi} = \omega \Omega_\alpha A^{\frac{\alpha-1}{2}} - \frac{\varepsilon}{\omega \Omega_\alpha A^{\frac{1+\alpha}{2}}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau, A \cos\psi, -A \Omega \sin\psi) \cos\psi d\psi.$$

További megjegyzések:

1. A (16) összefüggésben a bíráló számításai szerint hiányzik egy $\mathbf{r}_S \times [(\mathbf{M} \mp \mathbf{m})\mathbf{v}_{S1} \mp \mathbf{m}\mathbf{v}_{S2} - \mathbf{M}\mathbf{v}_S]$ tag. Mivel a zárójelben lévő kifejezés nulla (lásd a (13) egyenletet) a (16) összefüggésben ez a tag nincs felírva.
2. Az $\mathbf{r}_S \times \mathbf{AK}$ tag csak akkor nulla, ha a test tömegének változása spontán, és az összesített impulzus egyenlő nullával.
3. A (40) jelű képletben a Steiner-tétel következő alakját kell felírni:

$$I_S = I_{S1} + (M-m) (SS_1)^2 + I_{S2} + m (SS_2)^2.$$
4. A (143) összefüggés jobb oldalán egy Δt tényező lemaradt.
5. A (195) egy közönséges elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet.
6. A (250) egyenlet jobb oldalán a helyes $-Fe(x)$.