Válasz opponensi bírálatra

Opponens: Rontó Miklós, a matematikai tudomány doktora, az MTA doktora

Mindenekelőtt hálásan köszönöm Rontó Miklós Professzor Úr gondos és alapos, sok részletre kiterjedő bírálatát. Nagyon megtisztelő számomra, hogy színvonalasnak és nemzetközi összehasonlításban is jelentősnek értékeli az értekezésben bemutatott eredményeket. A bírálatban feltett kérdéseket szeretném külön megköszönni, mert így kitérhetek számos olyan kutatási eredményre, amely az értekezés benyújtása után keletkezett.

Első kérdés: *Melyik pont környezetében célszerű a (68) differenciálegyenlet-rendszer "linearizációját" elvégezni? Hogyan keletkezett a (69) lineáris differenciálegyenlet-rendszer a (68) nemlineáris rendszerből?*

A (68) és a (69) differenciálegyenlet-rendszerek leírják a tömeg leválását követően a megmaradó test helyzetváltozását. Ezzel igazolni szeretnénk azt a feltételezést, miszerint a test szétválását követően az alap és a levált test helyzet- és szögkoordinátái nem változnak. Az egyenletek rávilágítanak a test rövid idő alatti, a kezdeti helyzethez viszonyított elmozdulására és szögelfordulására. Az egyenleteket a kezdeti helyzet- és szögkoordináták környezetében volt célszerű meghatározni. A (68) és a (69) egyenletrendszer ugyanazt a mozgást írja le. Matematikai okok miatt a nemlineáris (68) differenciálegyenlet-rendszert linearizáltam, feltételezve, hogy a szög- és helyzetkoordináták megfelelő kezdeti értékhez viszonyított eltérése kicsi. Az értekezésben a linearizált (69) egyenletrendszert tanulmányoztam. Eredményül a rendszer egyik stacionárius megoldását kaptam, amelynek alapján megvizsgáltam a test mozgásának stabilitását.

Megjegyzés: *A változó tömegű testek vizsgálata során a jelölt feltételezi, hogy a test tömegének változása "nagyon rövid ideig tart". Ezek után sikerül előállítani és vizsgálni az alap test és a levált rész, illetve az alap test és a hozzáadott test dinamikáját.*

Második kérdés: *Hogyan viszonyul ez a "nagyon rövid időintervallum" ahhoz az intervallumhoz ahol vizsgáljuk a rendszer teljes dinamikáját?*

A test szétválásának dinamikáját három részre osztom:

1. Az egész test dinamikájára (a mozgástól függően meghatározom a test szögsebességét és tömegközéppontjának sebességét).
2. A változó tömegű test dinamikájára. A következőket feltételezem:
   - A test szétválasztása rugalmatlan,
   - A test tömegének változása nagyon rövid ideig tart,
   - A leválasztott és az alap test helyzet- és szögkoordinátái nem változnak,
   - A testek sebességének és szögsebességének változása dinamikus jellegű.

Meghatározom a leváló és az alaptest sebességeit és szögsebességeit.

3. A leváló és az alaptest dinamikája. A testek mozgása az előbb meghatározott kezdeti feltételektől (helyzetkoordinátáktól, szögkoordinátáktól, sebességektől és szögsebességektől) függ.

A testek egyesülésének dinamikája is hasonlóan három részre osztható:

1. Az alaptest és a hozzáadott test dinamikája. A testek mozgása ismert, a rendszer teljes dinamikai vizsgálata alapján meghatározzuk a testek sebességét és szögsebességét az egyesülés előtt.

2. Az egyesülés dinamikája. Ezt az esetet úgy vizsgáljuk, mint a rugalmatlan ütközést és meghatározzuk az így képződő test sebességét és szögsebességét, feltételezve, hogy a test nem változtatja helyzetét, vagyis, tömegközéppontjának helyzet- és szögkoordinátái nem változnak.
3. Az egyesített test dinamikája. Kezdeti feltételként felhasználva a fenti értékeket (a test tömegközéppontjának helyzetkoordinátáit és sebesség-komponenseit, valamint a test szögkoordinátáit és szögsebesség komponenseit), az egyesített test mozgását meghatározzuk.

Harmadik kérdés: *A „generáló" megoldások az* $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ *(258) alakú kezdeti feltételekhez lettek hozzárendelve. Alkalmazható-e javasolt matematikai eljárás abban az esetben, ha a derivált értéke nem nulla?*

Ez a matematikai eljárás alkalmazható abban az esetben is, ha a derivált kezdeti értéke nem nulla, vagyis, $\dot{x}(0) \neq 0$. Ekkor is a „generáló" differenciálegyenlet megoldásától függ a módszer hatékonysága. Ha az így kapott függvény jól megközelíti az egyenlet pontos megoldását, a perturbált egyenlet is sikeresen megoldható. A megoldás annál jobb, minél pontosabb a generáló differenciálegyenlet megoldása.
Példa a fentiekre: A rezgések differenciálegyenletének alakja

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, \tau) = \varepsilon f_1(x, \dot{x}, \tau) \ , \tag{1}$$

ahol $f(x, \dot{x}, \tau)$ és $\varepsilon f_1(x, \dot{x}, \tau)$ két különböző nagyságrendű, folytonos, nemlineáris függvény, amelyben a változó a helyzetkoordináta, a sebesség és a $\tau=\varepsilon t$ az ún. „lassított idő", ahol $\varepsilon<<1$.
A kezdeti feltételek

$$x(0) = x_0 \ , \ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 . \tag{2}$$

Ha $\varepsilon=0$ és $\tau=\tau_0$=const., az egyenlet a alábbi alakúra egyszerűsödik:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, \tau_0) = 0. \tag{3}$$

A (3) „generáló" differenciálegyenlet egzakt analitikai megoldása ritkán található, ezért általában közelítő megoldást keresünk. Minél pontosabb a megközelítés, annál hatékonyabb az eljárás és megfelelőbb a végeredmény is. Ez a bemutatott módszer legnehezebb és legfontosabb része. Megoldásként különböző függvényeket választhatunk. Célszerű a közelítő megoldást úgy választanunk, hogy a rezgés periódusának, amplitúdójának és a legnagyobb rezgéssebességnek megfeleljen. Általános megközelítésként a (3) egyenlet megoldása a következő alakú függvénnyel adható meg:

$$x = Acp(\omega t + \theta), \tag{4}$$

továbbá annak idő szerinti deriváltja,

$$\dot{x} = A\omega sp(\omega t + \theta), \tag{5}$$

ahol *cp*-vel jelöljük az általános függvényt, *sp*-vel a derivált függvényt. A és θ konstans paraméterek, amelyek megfelelnek a kezdeti (2) feltételeknek és

$$\omega=\omega(A,\theta,\tau_0) \ . \tag{6}$$

a függvény körfrekvenciája. Amint látható, a függvény körfrekvenciája az A, θ, τ_0 kezdeti feltételektől függ. Kiindulva az előállított (4) és (5) megoldásokból, a (1) egyenlet közelítő megoldását a következő alakban írjuk:

$$x = A(t)cp\psi(t), \tag{7}$$

$$\dot{x} = A(t)\omega(t)sp\psi(t), \tag{8}$$

ahol $A(t)$ és $\theta(t)$ időben változó ismeretlen függvények,

$$\psi(t) = \theta(t) + \int \omega(t)dt, \tag{9}$$

és

$$\omega(t) = \omega(A(t), \theta(t), \tau(t)). \tag{10}$$

Felírva a (7) egyenlet pontos idő szerinti derivált függvényét,

$$\dot{x} = A(t)\omega(t)sp\psi(t) + \dot{A}(t)cp\psi(t) + A(t)\dot{\theta}(t)sp\psi(t). \tag{11}$$

A (11) pontos egyenlet megfelel a (8) bevezetett egyenletnek, ha

$$\dot{A}(t)cp\psi(t) + A(t)\dot{\theta}(t)sp\psi(t) = 0 \, . \tag{12}$$

A (8) egyenlet idő szerinti deriválása és (1) egyenletbe történő behelyettesítése után a következő elsőfokú egyenlet adódik:

$$\dot{A}(t)\omega(t)sp\psi(t) + A(t)\dot{\omega}(t)sp\psi(t) + A(t)\dot{\theta}(t)\omega(t)cp\psi(t) = \varepsilon f_1, \tag{13}$$

ahol

$$\varepsilon f_1 = \varepsilon f_1(A(t)cp\psi(t), A(t)\omega(t)sp\psi(t), \tau). \tag{14}$$

A (12) és (13) egyenletek felírhatók a következő formában is,

$$\dot{A}(t)\omega(t)(sp^2\psi(t) - cp^2\psi(t)) + A(t)\dot{\omega}(t)sp^2\psi(t) = sp\psi(t)\varepsilon f_1, \tag{15}$$

$$A(t)\dot{\theta}(t)\omega(t)\big(cp^2\psi(t) - sp^2(t)\big) + A(t)\dot{\omega}(t)cpsp\psi(t) = cp\psi(t)\varepsilon f_1. \tag{16}$$

A két elsőfokú (15-16) egyenlet megfelel az (1) másodfokú egyenletnek. Sajnos az ilyen egyenletek analitikai megoldása igen nehézkes, emiatt átlagolással közelítő egyenleteket képezünk:

$$\dot{A}(t)\omega(t)\langle sp^2\psi(t) - cp^2\psi(t)\rangle + A(t)\dot{\omega}(t)\langle sp^2\psi(t)\rangle = \langle sp\psi(t)\varepsilon f_1\rangle, \tag{17}$$

$$A(t)\dot{\theta}(t)\omega(t)\langle cp^2\psi(t) - sp^2(t)\rangle + A(t)\dot{\omega}(t)\langle cp\psi(t)sp\psi(t)\rangle = \langle cp\psi(t)\varepsilon f_1\rangle, \tag{18}$$

ahol $\langle\cdot\rangle = \int_0^T(\cdot)\,dt$ és T a cp függvény periódusideje. A (17) és (18) egyenletek megoldásával az amplitúdó és a fázis időben változó függvényei meghatározhatóak. Behelyettesítve az $A(t), \theta(t)$, vagyis, az $\omega(t)$ és a $\psi(t)$ függvényeket a (7) egyenletbe, az (1) egyenlet közelítő megoldását kapjuk.

***Megjegyzés**: Kissé hiányolom a dolgozatból a számítógépes eredmények részletesebb bemutatását, illetve a (72)-(74) oldalon található számításoknál a kapott analitikus és numerikus megoldások egymástól való eltérésének számbeli értékelését.*

A (72)-(74) oldalon egy Duffing típusú, $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + x^3 = 0$ alakú egyenlet analitikus és numerikus megoldása látható. A tömegváltozás időben lineárisan változó függvény, vagyis, $m = 1 + 0.1\,t$, továbbá a kezdeti feltételek, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$. A másodfokú differenciál-egyenletet levezettem két első fokú egyenletre és lehetővé tettem a Runge-Kutta numerikus módszer használatát. A megoldást 'pontosnak' értékeltem, mivel a számítást 10^{-14} pontossággal végeztem. Összehasonlítottam a numerikus és az analitikus számítás eredményeit. Az analitikus közelítő értékeket Ateb, trigonometrikus és Jacobi elliptikus függvényekkel számítottam. Az eredmények összehasonlítását a 22a), 23a) és 24a) ábrák mutatják. A rezgés-sebesség numerikus és analitikus megoldásai a 22b), 23b) és 24b) ábrákon láthatóak.

1. Táblázat.

t	0	4.18616	9.40225	15.7615	23.3772	32.3624
x_m	1	−0.94343	0.89548	−0.85418	0,81811	−0.7862
A_{mA}	1	−0.94338	0.89541	−0.85409	0.81801	−0.7861
$\lvert x_m - A_{mA}\rvert$	0	0.00004	0.00007	0.00009	0.00010	0.00011
$\left\lvert \frac{x_m - A_{mA}}{x_m} \right\rvert 100$	0	0.0045%	0.0078%	0.0103%	0.0122%	0.014%
A_{mt}	1	−0.8396	0.71792	−0.62304	0.54736	−0.4859
$\lvert x_m - A_{mt}\rvert$	0	0.10384	0.17757	0.23114	0.27074	0.30039
$\left\lvert \frac{x_m - A_{mt}}{x_m} \right\rvert 100$	0	11.006%	19.829%	27.060%	33.094%	38.21%
A_{mJ}	1	−0.94683	0.90162	−0.86255	0.82834	−0.7981
$\lvert x_m - A_{mJ}\rvert$	0	0.00340	0.00613	0.00837	0.01024	0.01181
$\left\lvert \frac{x_m - A_{mJ}}{x_m} \right\rvert 100$	0	0.3605%	0.6851%	0.9805%	1.2515%	1.502%

Az ábrák alapján megállapítható, hogy a trigonometrikus megoldás nagymértékben eltér a pontos eredménytől, míg az Ateb és a Jacobi elliptikus eredmények megfelelőek. Sajnos, ennek alapján nem lehet értékelni az eredmény számszerű eltérését. Erre rámutatott Rontó Miklós Professzor Úr, az Opponensi bírálatában is. E problémát úgy küszöböltem ki, hogy a rezgés amplitúdóját és legnagyobb rezgéssebességét analitikusan és numerikusan meghatároztam és összehasonlítottam. Így a megoldások egymástól való eltérése számszerűsíthető. Az értékeket két táblázatban foglaltam össze. Az 1. táblázatban az amplitúdó numerikus (x_m) és analitikus értékei (az Ateb A_m, trigonometrikus A_{mt} és Jacobi elliptikus A_{mJ}) láthatóak. A 2. táblázat a legnagyobb rezgéssebesség numerikus és analitikus értékeit tartalmazza, ahol $\dot{x}_m$ a numerikusan meghatározott érték, $\dot{x}_{AA}$ (az Ateb függvény), $\dot{x}_{At}$ (a trigonometrikus függvény) és $\dot{x}_{AJ}$ (a Jacobi elliptikus függvény) értékei.

2. Táblázat.

t	1.34951	5.90864	11.5449	18.3719	26.5031	36.0519
$\dot{x}_m$	−0.63368	0.47856	−0.37187	0.29576	−0.23982	0.19765
$\dot{x}_{AA}$	−0.63631	0.48024	−0.37299	0.29654	0.24037	0.19805
$\lvert\dot{x}_m - \dot{x}_{AA}\rvert$	0.00263	0.00168	0.00112	0.00077	0.00055	0.00040
$\left\lvert\frac{\dot{x}_m - \dot{x}_{AA}}{\dot{x}_m}\right\rvert 100$	0.4151%	0.3510%	0.3013%	0.2617%	0.2295%	0.203%
$\dot{x}_{At}$	−0.70069	0.42222	−0.26790	0.17728	−0.12148	0.08573
$\lvert\dot{x}_m - \dot{x}_{At}\rvert$	0.06707	0.05634	0.10397	0.11848	0.11834	0.11192
$\left\lvert\frac{\dot{x}_m - \dot{x}_{At}}{\dot{x}_m}\right\rvert 100$	10.574%	11.772%	27.959%	40.060%	49.346%	56.63%
$\dot{x}_{AJ}$	0.63799	0.48491	0.37900	0.30305	0.24694	0.20445
$\lvert\dot{x}_m - \dot{x}_{AJ}\rvert$	0.00431	0.00635	0.00713	0.00729	0.00712	0.00680
$\left\lvert\frac{\dot{x}_m - \dot{x}_{AJ}}{\dot{x}_m}\right\rvert 100$	0.6807%	1.3267%	1.9183%	2.4638%	2.9700%	3.442%

Az összehasonlítást elvégeztem mind az abszolút értékek különbségére, mind a százalékos eltérésekre vonatkozóan. A számítások alapján a következő látható: a legkisebb eltérés a numerikus megoldástól az Ateb függvény alkalmazásánál jelentkezik, valamivel nagyobb a Jacobi elliptikus függvénynél, míg a legnagyobb a trigonometrikus függvénynél. Itt az eltérés meghaladja az 50 %-ot is. Az ilyen megoldás természetesen nem fogadható el. Az Ateb függvény használata a legkedvezőbb, itt az eltérés 0,25 %, míg a Jacobi elliptikus függvény esetén kisebb, mint 5%. Az eltérés az idővel növekszik. Ezek az eredmények csak megerősítik a már megadott összegzésben azt, hogy a Jacobi elliptikus függvény alakú analitikus megoldás megfelelő pontosságú és a gyakorlatban alkalmazható. Az Ateb függvény pontosabb eredményt ad, de számítása problémát okoz, mivel egyelőre még nincs bevezetve a speciális függvények listájára.

Újvidék, 2014. október 7.

Cvetityanin Lívia