Opponensi vélemény
Cvetityanin Lívia „Változó tömegű test dinamikája ”
című MTA doktori értekezéséről

Az értekezés nyolc fejezetet tartalmaz és az irodalomjegyzékkel együtt 98 számozott oldal terjedelmű. Az irodalomjegyzékben 84 tétel található, amelyből 20 önállóan írt saját dolgozat illetve 3 egy- társszerzős cikk. A jelölt publikációi közül kiemelném az 1998-ban Londonban megjelent „ Dynamics of machines with variable mass” c. monográfiáját.

A disszertáció az elméleti mechanika különböző témáival foglalkozik, sokszínű a felhasznált matematikai és fizikai apparátus és világosan látszik a dolgozat gyakorlati orientációja egyaránt, a különböző folyamatok leírását szolgáló matematikai modellek megalkotása és azok elméleti vizsgálata során. Megjegyezzük, hogy az előállított matematikai modellek zömében nemlineárisak és a változó tömegű test dinamikájának leírásához általában változó együtthatójú nemlineáris közönséges differenciálegyenletekhez vezetnek. Ismeretes, hogy az utóbbi egyenletek megoldásainak konstruktív vizsgálata a gyakorlatban számos nehézségekbe ütközik, melyeknek enyhítésére a szerző több elegáns megoldást alapozott meg.

A értekezés 1. fejezetében a szerző röviden és világosan ismerteti a kutatási téma eddigi irodalmát és előzményeit illetve bemutatja a kitűzött kutatási feladatokat. Kielemezte több változó tömegű mechanizmus működését, pl. egyes szállítási szalagok, változó tömegű rotorok illetve szőnyegkészítő gépek esetén.

A 2.-3.fejezetekben az általános klasszikus dinamikai törvények felhasználásával a szerző bizonyos feltételek mellett megalapozza a merev test szétválasztásának illetve összevonásának analitikus elméletét. A test szétválasztás vagy összevonás esetében kidolgozott egy módszert a mozgásmennyiségek meghatározására, amelyet csak számos matematikai észrevételek segítségével sikerült megalapozni.

Így a szerző, a 3.3.2 Példában a 23. oldalon egy rotor dinamikájának vizsgálata során előállítja a (46) egyenletrendszert. Egy m tömegű rész leválasztása után a rotor dinamikáját a (68) három egyenletből álló nemlineáris másodrendű közönséges differenciálegyenlet rendszer írja le. A továbbiakban a (68) nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert „linearízálása ” után megkapja a (69) lineáris differenciálegyenlet-rendszert és a rotor dinamikájának vizsgálata már az utóbbi lineáris egyenletrendszer alapján történik.

Ezzel kapcsolatban a bíráló első kérdése:

Melyik pont környezetében célszerű a (68) differenciálegyenlet-rendszer „linearizációját” elvégezni ? Hogyan keletkezett a (69) lineáris differenciálegyenlet-rendszer a (68) nemlineáris rendszerből ?

A változó tömegű testek vizsgálata során a jelölt feltételezi, hogy a test tömegének változása „nagyon rövid ideig tart”. Ezek után sikerül előállítani és vizsgálni az alap test és a levált rész, illetve az alap test és a hozzáadott test dinamikáját.

Ezzel kapcsolatban a bíráló második kérdése : Hogyan viszonyul ez a „nagyon rövid időintervallum” ahhoz az intervallumhoz ahol vizsgáljuk a rendszer teljes dinamikáját ?

Az értekezésben a változó tömegű testek dinamikájának vizsgálata két jól elkülöníthető témakör mentén történik:

- az első eset, amikor a testtömeg változás folyamatosan függ az időtől, helykoordinátától vagy a sebességtől,
- a második eset, amikor a tömegváltozás „impulzus jellegű", azaz nem folytonos.

A 4. fejezetben a szerző kidolgozott egy hatékony analitikus eljárást a „nem folytonosan" változó tömegű testek dinamikai elemeinek meghatározására. Sikerült meghatározni a test sebességének és szögsebességének változását, amely a hozzáadott vagy leválasztott test mozgásából adódik. Továbbá, színvonalas és jó eredménynek tekintem a 4.1 alfejezetben a 2.Tételben a (113) formulával megfogalmazott eredményt, amely egzakt módon kifejezi az összefüggést az egész test, a leválasztott vagy hozzáadott test illetve a maradvány test kinetikus energiája között. Érdekesek az eredmények, amelyek bemutatják, hogyan változik a kinetikus energia az elválasztott és maradvány testnél, rugalmatlan szétválasztás esetén.

A folyamatos változású tömeg esete a könnyebben kezelhető feladatokhoz sorolható. Habár ez esetben is el kellet végezni a klasszikus dinamikai törvények megfelelő kiterjesztését.

Így, az 5.fejezetben a cél a folytonosan változó tömeg és test dinamikájának vizsgálata.

Ennek keretében a szerző megalkotta a folytonosan változó tömegű merev test szabad mozgásának matematikai modelljét két vektor-alakú egyenletből álló, a (159)-(160) differenciálegyenlet rendszer formájában:

$$M\frac{dv}{dt} = F_r + \Phi,$$

$$I\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \times I\Omega = M_S^{Fr} + \Xi + M_S^{\Phi} + \mathbb{R}.$$

Ebben az egyenlet rendszerben az első egyenlet a mozgás egyenlete, míg a második- a test forgását írja le tömegközéppont mentén.

Az említett (159) –(160) vektor alakú mozgás egyenleteket a gyakorlati „kezelhetőség" miatt, a szerző, egy megfelelő koordináta rendszerben, átalakította hat „könnyebben átlátható" skalár differenciálegyenletből álló- a (161) és (163) rendszer alakjára:

$$M\frac{du}{dt} = F_x + \Phi_x,\ M\frac{dv}{dt} = F_y + \Phi_y,\quad M\frac{d\omega}{dt} = F_z + \Phi_z,$$

$$I_{\xi\xi}\frac{dp}{dt} + (I_{\zeta\zeta} - I_{\eta\eta})\,qr = M_\xi + \Xi_\xi + M_\xi^{\Phi} + \mathbb{R}_\xi,$$

$$I_{\eta\eta}\frac{dp}{dt} + (I_{\zeta\zeta} - I_{\zeta\zeta})\,pr = M_\eta + \Xi_\eta + M_\eta^{\Phi} + \mathbb{R}_\eta,$$

$$I_{\zeta\zeta}\frac{dr}{dt} + (I_{\eta\eta} - I_{\xi\xi})\,pq = M_\zeta + \Xi_\zeta + M_\zeta^{\Phi} + \mathbb{R}_\zeta.$$

A szóban forgó technikát a szerző sikeresen alkalmazta az 5.2 alfejezetben egy fontos műszaki probléma megoldása során a szállítási szalagokkal kapcsolatban , amikor a szalag rátekeredik a dobra.

A 6.fejezet célkitűzése a Lagrange-féle differenciálegyenletek levezetése a folyamatosan változó tehetetlenségi nyomaték és tömegű test mozgása során. Az előállított (247) alakú Lagrange-féle egyenlet, bizonyos szempontból, a korábban ismert, Bessonov –féle változat kibővített általánosítása.

A 7.fejezet rezgéstani kutatásokhoz kapcsolódik folyamatos változású tömeg esetén. Itt is első lépésben matematikai modell alkotásra van szükség. Nem szabad megfeledkezni arról, hogy bonyolult folyamatok és jelenségek matematikai egyenletekkel történő leírása a nehéz feladatok osztályához tartozik. Dinamikai folyamatok esetén a matematikai modellezés gyakran valamilyen típusú differenciálegyenlethez vagy integrálegyenlethez vezet. A jelölt, véleményem szerint, jól „ráérzett" arra, hogy az ő eseteiben a szükséges matematikai modellnek nem szabad túl bonyolultnak lennie és ismert matematikai eszközökkel, módszerekkel könnyen kezelhetőnek kell lennie. Itt csak zárójelben jegyzem meg, hogy bonyolult, nehezen vagy egyáltalán matematikailag nem kezelhető modelleket talán könnyebb gyártani, mint egy egyszerűbbet, amely meghatározott körülmények között jól írja le a jelenséget. Igaz, végső sorban a modell helyességét, pontosságát főként mérésekkel illetve kísérletekkel lehet csak igazolni.

Az egy szabadságfokú test rezgésének tanulmányozására a szerző a (254) alakú

$$\ddot{x} + \omega^2(\tau)\ x\,|x|^{\alpha-1} = \varepsilon f(\tau, x, \dot{x})$$

másodrendű nemlineáris differenciálegyenletet vezette be. Ez az egyenlet azért nehezen kezelhető, mert két különböző nagyságrendű nem- lineáris tag szerepel benne : az $\omega^2(\tau)\ x\,|x|^{\alpha-1}$, ahol α valamilyen pozitív egész vagy racionális szám és a második nemlineáris tag $\varepsilon f(\tau, x, \dot{x})$, ahol $\varepsilon << 1$ „kis paraméter" és $\tau = \varepsilon t$ pedig az ún. „lassú idő". Egzakt módon zárt alakban a (254) differenciálegyenlet az előirt (258) alakú kezdeti feltételek mellett nem oldható meg. A közelítő megoldás meghatározására a jelölt saját fejlesztésű analitikus eljárásokat javasol különböző speciális függvények felhasználásával.

Itt a fontosabb eredmények a következők.

- a (254) egyenlethez tartozó $\varepsilon = 0$ –nak megfelelő) ún. „generáló" (257) alakú egyenlet közelítő megoldásának meghatározása különböző alakokban (lásd: (282),(291),(297)) felhasználva három speciális függvény tulajdonságait, nevezetesen az Ateb- függvényt, bizonyos trigonometrikus függvényeket illetve a Jacobi- féle elliptikus függvényt,
- kiindulva az előállított „generáló" megoldásokból, egy sajátos „állandók variálásának módszerének" megalapozása az eredeti nemlineáris (254) alakú differenciálegyenlet közelítő megoldására (lásd a (310),(329) és (370) „próbafüggvényeket").

Értékes gyakorlati eredményekhez vezettek a változó tömegű Van der Pol rendszer illetve a változó tömegű rotor rezgésének analitikus és numerikus vizsgálata.

Ezzel a témakörrel kapcsolatban a harmadik kérdésem a következő:

A „generáló ” megoldások az $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ (258) alakú kezdeti feltételekhez lettek hozzárendelve. Alkalmazható-e javasolt matematikai eljárás abban az esetben, ha a derivált értéke nem nulla?

Az értekezés alapvetően jól megírt munka, kevés és jelentéktelen elírás vettem észre benne. Azonban megjegyzem, hogy a hazai matematikai szakirodalomban a „differenciálegyenlet” az igazi szakkifejezés, nem pedig a tézisben sokszor ismétlődő „differenciális egyenlet”. Kissé hiányolom a dolgozatból a számítógépes eredmények részletesebb bemutatását, illetve a (72)-(74) oldalon található számításoknál a kapott analitikus és numerikus megoldások egymástól való eltérésének számbeli értékelését.

Összegzés.

Az értekezés a változó tömegű test dinamikájának széles körű vizsgálatában értékes eredeti ötleteket és módszereket tartalmaz. A dolgozatban foglalt eredmények nemzetközi összehasonlításban is jelentősek. Cvetityanin Lívia értekezése és a PhD megvédése óta elvégzett munkássága véleményem szerint megfelel az MTA Doktora címhez tartozó követelményeknek. Javaslom az eljárás folytatását, a nyilvános vita kitűzését és a mű elfogadását.

Miskolc, 2014. június 12.

Rontó Miklós
a matematikai tudomány doktora