

Szálas struktúrák mechanikai modellezése: káosz és fraktálok

MTA doktori értekezés tézisei

Dr. Károlyi György

Budapest, 2006.

1. A kutatás célkitűzései

Szálas struktúrák a természetben a legkisebbtől a legnagyobbig minden méretben előfordulnak: a DNS-molekuláktól és a szálas baktériumoktól a gombafonalakon és mérnöki rúdszerkezeteken át a többszáz kilométeres planktonvirágzás-mintázatokig. A dolgozatban ezen struktúrák közül vizsgáltunk meg néhányat, és ezek mechanikai modellezésével foglalkoztunk.

A dolgozatban szálas struktúrán olyan alakzatokat értünk, amelyeknek lényeges tulajdonsága, hogy egyik térbeli kiterjedése lényegesen meghaladja a másik kettőt. A mérnöki gyakorlatban ilyen szerkezetek a rudak, rúdszerkezetek, és a dolgozatnak ilyen szerkezetek képezik az egyik fő témáját: az eredmények egyik része rugalmas rúdláncok kihajlási feladataival kapcsolatos. Már korábban ismert, hogy a rugalmas rúdláncok egyensúlyi helyzetei nyomóterhelés hatására igen bonyolultak lehetnek. Ismert az is, hogy ennek oka egy kaotikus dinamikai rendszerrel való analógia: a rugalmas rúdlánc egyensúlyi és geometriai egyenletei által alkotott peremérték-feladatnak megfeleltethető egy kezdetiérték-feladat. A peremérték-feladat és a kezdetiérték-feladat egyenletei megegyeznek, csak az idő veszi át az ívhossz szerepét, és peremfeltételek helyett kezdőfeltételeket kell előírni. Ezen analógia alapján szokás a bonyolult térbeli „viselkedést”, vagyis a bonyolult alakot a *térbeli káosz* elnevezéssel jelezni.

A rengeteg bonyolult egyensúlyi helyzetet bifurkációs diagramon szokás ábrázolni, amelyen a megoldások egyensúlyi utakat alkotnak. Az egyensúlyi utakat hagyományosan *invariánsokkal* szokás jellemezni, amelyek jól leírják egy-egy egyensúlyi út mentén a megoldások valamilyen jellemzőjét, például a zérushelyek számát, a stabilitást, vagy a szimmetriát. Ezek a klasszikusan alkalmazott invariánsok azonban nem adják egyértelmű leírását az egyensúlyi utaknak. Ezért felmerült az igény, hogy olyan invariánst találjunk, amely egyrészt *egyértelmű* jellemzését adja az egyensúlyi utaknak, másrészt a megoldásokat jellemző klasszikus invariánsok is *egyszerűen meghatározhatók* belőle.

A rugalmas rúdláncok – és általában a peremérték-feladatok tartományának – véges hossza miatt a térbeli káosz jelenségének vizsgálata nehézségekbe ütközhet. A peremérték-feladat és a megfelelő kezdetiérték-feladat közötti analógia azt sugallja, hogy akkor lenne jó a peremérték-feladatot térbeli kaotikus rendszerként azonosítani, ha a megfelelő kezdetiérték-feladat kaotikus. A gondot azonban az okozza, hogy a peremérték-feladat tartománya véges, a kaotikus viselkedés azonosítása pedig csak olyan mennyiségek (pl. Ljapunov-exponens, topológikus entrópia) számítása alapján lehetséges, amelyek végtelen hosszú időre vett átlagolást tartalmaznak. Érdemes lenne tehát a térbeli káosz jelenségének azonosítására olyan módszert kidolgozni, amelyhez elég az eredeti, statikai feladatot vizsgálni, és nem okoz gondot a tartomány véges mérete.

A korábbi, rugalmas rúdláncokkal kapcsolatos vizsgálatok csaknem minden esetben konzervatív terhekkkel foglalkoztak. Azt derült ki, hogy ekkor a megfelelő kezdetiérték-feladat minden esetben területtartó, konzervatív dinamikai rendszer volt. Felmerült a kérdés, hogy vajon mi történik, ha *nemkonzervatív* a teher, ekkor vajon nemkonzervatív lesz-e a megfelelő kezdetiérték-feladat is.

A másik rendszer, ahol szálas struktúrák jelentős szerepet kapnak, a hidrodinamikai áramlásokban zajló kaotikus sodródás jelensége. Ismert, hogy a folyadékban sodródó részecskék mozgása nem követi a folyadék áramvonalait, ha az áramlás sebessége időfüggő. Ez lehetővé teszi, hogy a sodródó részecskék mozgása sokkal bonyolultabb legyen az áramlási képnél. Még ha az áramlás maga időben periodikus, akkor is előfordulhat, hogy a sodródó részecskék mozgása rendkívül bonyolult, kaotikus lesz. A kaotikus rendszerek egy jól ismert tulajdonsága,

hogy a kezdőfeltételek egy adott halmazát rövid idő alatt *nyújtások és hajtogatások* sorozatának teszi ki, és ezáltal bonyolult *szálas* szerkezetűvé alakítja. Ezt nagyon egyszerű ellenőrizni folyadékáramlások esetében: kezdjünk lassan tejszínt keverni egy csésze kávéban, és a szálas alak a szemünk láttára bontakozik ki. Amennyiben az áramlás *nyitott*, vagyis a vizsgált tartományba van beáramlás, majd onnan a keveredés után kisodródna a részecskék, akkor a szálas struktúrák egy *fraktáلالakzatot* alkotnak. A keveredés okozta szálas szerkezetnek lényeges szerepe lehet a gyakorlatban igen sok esetben: a víztárolókban lappangó régi és friss víz eloszlásában, a szennyeződések (olajfoltok, szennyvíz) eloszlásában stb. A dolgozatban azt vizsgáltuk, hogy a keveredés okozta szálas szerkezetek milyen szerepet játszanak, ha a sodródó részecskék *aktívak*: kémiai reakciókban vesznek részt, vagy biológiailag aktívak. Kérdés, hogy a szálas fraktálszerkezet befolyásolja-e a hagyományos, átlagos koncentráción alapuló reakcióegyenletet, vagy a fraktálszerkezet miatt előálló inhomogenitás módosítja-e a kémiai folyamatot.

Amennyiben azt tapasztaljuk, hogy az áramlásban zajló aktív folyamatokat lényegesen befolyásolja a szálas fraktálszerkezet, akkor ez választ adhat régóta fennálló biológiai kérdésekre is. Egy ilyen régi probléma az *együttélés* problémája. Ha feltételezzük, hogy az erőforrásokért versengő fajok homogén módon elkeverednek az áramló közegben, akkor a tradicionális populációdinamikai egyenletek szerint legfeljebb annyi faj maradhat életben, amennyi erőforrásért versengenek: azok a fajok, amelyek a legjobban ki tudnak aknázni legalább egyet az erőforrások közül. Ez azonban nem így van a valóságban: például az együtt élő planktonfajok száma egy adott élőhelyen nagyságrendekkel meghaladja a szükséges erőforrások számát. Ez az ellentmondás a *plankton-paradoxon*. Érdekes tehát megvizsgálni, hogyha elvetjük a jól kevert környezet ideáját, és figyelembe vesszük az áramlás mechanikai tulajdonságait, azt, hogy szálas struktúrák alakulnak ki, akkor ez lehetővé teszi-e az erőforrásoknál nagyobb számú faj együttélését.

Növekvő szálas struktúrákra a fonalas szerkezetű gombák és bizonyos baktériumfajok adnak példát. Ezen élőlények fontosságát az adja, hogy a világ antibiotikum-, enzim- és citromsavtermelésének jelentős részét ilyen fajok tenyésztésével végzik. Ezek a fajok életüket spóráként kezdik, majd ebből egy szálat növesztenek. Ez a szál sokszor elágazik, új ágakat képez, amelyek szintén elágaznak, és végül sűrűn behálózva a környéket egy sűrű telepet alkotnak.

Egy-egy ilyen növekvő szálnak az alakjára sokféle modellt dolgoztak ki. Azonban egyik esetben sem vizsgálták meg, hogy milyen általános feltételeknek kell eleget tennie egy növekvő szálnak, milyen korlátozást adnak az alakra a *kinematikai feltételek*. Ennek megvizsgálása is a dolgozat egyik célja volt. Hasonlóképpen, sok modellt dolgoztak ki a teljes telep növekedésére is. Ezek a modellek azonban csak a növekedés egyik fázisát tudják leírni: vagy a növekedés kezdeti, exponenciális szakaszára adnak magyarázatot, vagy a végső, telítődő szakaszra, amikor a telep sűrű közepén nyersanyagok hiányában leáll a növekedés. Hasznos lenne egy olyan modell, amely a telep növekedésének *egészére* egy egységes modellt adna, mert ez lehetőséget teremthetne annak eldöntésére, hogy mikor lép a telep abba a fázisba, amikor az antibiotikumtermelés megkezdődik. Ennek az egységes modellnek az alapja az a megfigyelés, hogy a telepet képező szálak olyan fraktált alkotnak, amelynek dimenziója időben változó.

Az időben változó fraktálság ötlete azonban nemcsak itt alkalmazható. *Zárt* hidrodinamikai áramlásokban zajló aktív folyamatok esetén a sodródó részecskék szálas struktúrákat rajzolnak ki, de ennek nincs jól definiált, állandó fraktáldimenziója. Az teszi lehetővé kémiai egyenletek felírását, ha figyelembe vesszük, hogy az áramlás mechanikai törvényszerűségei időben változó szálas struktúrák felbukkanását okozzák, amelyeket egy időben változó dimenzióval lehet leírni.

2. A kutatás módszerei, az elvégzett vizsgálatok

A rugalmas rúdláncok vizsgálata során először az egyensúlyi alakokat leíró bifurkációs diagram egyensúlyi útjait egyértelműen jellemző címkézést vezettünk be. Ez a címkézés a dinamikai rendszerek elméletéből kölcsönvett szimbolikus dinamikán alapult. Lényegében az egyensúlyi rúdláncalakok szándékosan pontatlan leírása adta a címkézést. Megmutattuk, hogy ezekből a címkékből igen egyszerűen kiszámíthatók a klasszikus invariánsok: a zérushelyek száma, a stabilitás és a szimmetria.

Ezután a rugalmas rúdláncot általános (konzervatív és nemkonzervatív eseteket is tartalmazó) teherrel terhelve megmutattuk, hogy az egyensúlyi rúdláncalakok igen szoros kapcsolatban állnak egy diszkrét dinamikai rendszer periodikus pályáival. Ez az analógia arra engedett következtetni, hogy a rúdláncalakok száma ugyanúgy változik a rúdlánc hosszával, ahogy a dinamikai rendszer periodikus pályáinak a száma változik a periódus hosszával. Mivel a periodikus pályák száma exponenciálisan nő a periódus hosszával egy kaotikus dinamikai rendszerben, és annál lassabban nemkaotikus esetben, ezért a megoldások számának a rúdlánc hosszától való függése alapján vizsgálható, hogy a rúdlánc a térbeli káosz állapotában van-e. A periodikus pályák számának exponenciális növekedését a periódus hosszának függvényében a topologikus entrópia határozza meg. Ezért ha a rugalmas rúdlánc megoldásainak száma exponenciálisan nő, az lényegében a topologikus entrópia pozitív voltát jelenti. Tehát a dinamikai rendszer kaotikus volta és a rugalmas rúdlánc térbeli kaotikus volta közötti szoros kapcsolat fennáll, de nem kell végtelen hosszú tartományt vizsgálni.

Nemkonzervatív erőkkel terhelve a rugalmas rúdláncot, és felírva az egyensúlyi és geometriai egyenleteket, megtalálható a feladatnak megfelelő dinamikai rendszer is. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy az így kapott diszkrét dinamikai rendszer területtartó-e, akkor a linearizált egyenletek Jacobi-mátrixát kell vizsgálni. A dinamikai rendszer akkor területtartó, ha a Jacobi-mátrix determinánsa 1. Azt kaptuk, hogy ez minden esetben így van, akár konzervatív, akár nemkonzervatív a teher.

A nyitott hidrodinamikai áramlásokban zajló kémiai és biológiai aktivitás vizsgálata során a fraktálgeometria eszköztárát használtuk. Először felírtuk, hogy milyen hatása van a sodródásnak egy-egy szála, amely a reagáló anyagot tartalmazza. Ezután megvizsgáltuk annak a hatását, hogy nem csak egy szál tartalmaz anyagot, hanem szálaiknak egy fraktálstruktúrája. Az új reakcióegyenletbe így bekerült a fraktáldimenzió, a szálak struktúra jelentős hatást gyakorol a kémiai folyamatokra. Ezt numerikus szimulációk sorozatával is ellenőriztük.

A nyitott áramlásban versengő planktonfajok viselkedését szintén numerikus szimulációk segítségével vizsgáltuk. Azt tapasztaltuk, hogy a fraktálszála mentén a fajok együtt tudnak élni, hiszen a fraktálszála felülete igen nagy, így mindegyik faj hozzáférhet a nyersanyagokhoz. Kimutatható volt a *ritka előnye* is, azaz ha valamelyik faj egyedeiből kevesebb volt, akkor még finomabb felbontását fedte le a szálak fraktálnak, és ezzel még hosszabb felületen jutott tápanyagokhoz.

A növekvő szála modellezése során először egy változatlan alaknak a haladására vonatkozó általános kinematikai feltételt fogalmaztunk meg. Ez azon a megfigyelésen alapult, hogy a szálak mikroorganizmusok szálaiknak alakja változatlan a növekedés során. Ezután kihasználtuk azt a megfigyelést, hogy a növekvő szál felületi pontjai csak a felületre merőlegesen mozognak el a növekedés során, majd a növekedés rátája és a szál felületének görbülete között teremtettünk kapcsolatot. Ez vezetett el végül növekvő szála olyan modelljéhez, amely a valódihoz hasonló alakot jósolt a szála alakjára.

Az egész mikroorganizmus-telep növekedésére kidolgozott modell a telepek mérésekben tapasztalt időfüggő fraktalitását használta ki. A telep teljes tömegére, az időfüggő fraktáldimenzióra és a rendelkezésre álló tápanyag mennyiségére vonatkozó csatolt differenciálegyenlet-rendszert lehetett levezetni. Az egyenletrendszer megoldása a biomassza növekedését adta, ami igen hasonló volt a valódi telepek esetében mért fejlődéshez, és amit numerikus szimuláció segítségével is sikerült ellenőrizni.

Ugyancsak az időben változó dimenzió ötlete segített a zárt áramlásban sodródó, kémiaileg aktív anyagok reakcióegyenletének levezetésében is. A reakcióegyenlet, csakúgy, mint a nyitott áramlás esetében, most is tartalmazta a dimenziót, de ennek időbeli változására egy újabb, csatolt egyenlet adódott. A két csatolt egyenlet együtt írja le a reagáló anyagok mennyiségének időbeli változását és a szálasságot jellemző dimenziót.

3. A kutatás eredményei, tézisek

A kutatások eredményeképpen az alábbi nyolc tézist lehetett megfogalmazni.

1. tézis. *Megmutattam, hogy a rugalmas rúdláncok egyensúlyi helyzeteit leíró, a szimbolikus dinamikával rokon címkézés segítségével egyértelműen meghatározhatóak a hagyományosan az egyensúlyi helyzetek osztályozására használt klasszikus invariánsok: az egyensúlyi helyzetek stabilitása, szimmetriája és zérushelyeinek száma. A szimbolikus dinamikán alapuló címkézés kiválthatja a klasszikus invariánsok alkalmazását. (Közös eredmény Kapsza Enikővel.) [8]*

2. tézis. *A dinamikai rendszerek elméletéből ismert topologikus entrópia segítségével egy lehetséges módszert adtam a térbeli káosz felismerésére. A módszer azon alapszik, hogy a vizsgált rendszert leíró peremérték-feladat megoldásainak száma exponenciálisan függ az értelmezési tartomány méretétől térbeli kaotikus rendszer esetén. (Közös eredmény doktoranduszommal, Kocsis Attilával.) [16, 18]*

3. tézis. *Megmutattam, hogy nemcsak a konzervatív erőkkel terhelt rugalmas rúdláncok esetében lehetséges térbeli káosz, hanem olyan rugalmas rúdláncok esetében is, amelyekre nem-konzervatív terhek hatnak. A szerkezet egyensúlyi egyenleteinek megfeleltethető kezdetiérték-feladat minden esetben területtartó, konzervatív; és kaotikus volta okozza a szerkezet térbeli kaotikus állapotát. (Közös eredmény doktoranduszommal, Kocsis Attilával.) [15, 16]*

4. tézis. *Nyitott hidrodinamikai áramlásokban a részecskék egy bonyolult, szálas fraktáلالakzatra gyűlnek össze. Ezen a fraktáلالakzaton hosszú időre csapdába esnek a kisodródásuk előtt, így ha a sodródó részecskék kémiaileg vagy biológiailag aktívak, akkor az aktív folyamatok egy szálas fraktáلالakzaton zajlanak. Megmutattam, hogy az áramlás mechanikai tulajdonságai módosítják a hagyományos reakcióegyenletet, az új kémiai egyenletben megjelenik a sodródó részecskék eloszlását jellemző fraktáldimenzió. [1, 2, 3, 5, 9, 11]*

5. tézis. *Numerikus kísérletek segítségével megmutattam, hogy a nyitott áramlásokban sodródó részecskék bonyolult eloszlása tökéletlen keveredéshez vezet, amely lehetővé teszi versengő planktonpopulációknak a hagyományos populációdinamikai egyenletek által kizárt együttélését. A nyitott hidrodinamikai áramlások mechanikai tulajdonságai erősítik a biodiverzitást. [4, 6, 7, 12]*

6. tézis. Szálas baktériumok és gombafonalak növekedési jellemzőire kinematikai modellt dolgoztam ki. A baktériumok illetve gombafonalak hosszmetszetének kontúrját növekedésre képes szálnak tekintve felírtam az általános kompatibilitási egyenleteket. A szálas baktériumok és gombafonalak alakját jól közelítő megoldás adódott egy heurisztikus biológiai feltevessel, miszerint a növekedés a görbülettel arányos. [13]

7. tézis. Szálakból álló gombatelepek és baktériumkolóniák növekedésének mechanikai modelljét sikerült levezetni, amely a telep fraktáldimenziójának időbeli változásán alapul. A kolónia teljes tömegére és a fraktáldimenzió időfüggésére egy csatolt egyenlet adódott, amelynek megoldása jól közelíti a valós mérésekből és a saját numerikus szimulációimból nyert eredményeket. [10, 17]

8. tézis. Kimutattam, hogy zárt hidrodinamikai áramlásokban a sodródó részecskék egy időben változó dimenzióval leírható, szálas alakzaton gyülekeznek. Ha a sodródó részecskék kémiai reakciókban vesznek részt, akkor az időfüggő szálasságot leíró fraktáldimenzió és az anyagmennyiség egy csatolt differenciálegyenlet-rendszerrel írható le. A kémiai reakciók zárt áramlásokban is erősen függenek az áramlás mechanikai tulajdonságaitól. [14]

A [zárójeles] hivatkozások az irodalomjegyzék megfelelő elemeire utalnak.

4. Az eredmények hasznosítása

A dolgozatban szálas struktúrák mechanikai modellezésével foglalkoztunk. Három területet ölelt fel a dolgozat. A kihajló rudak és rúdláncok esetén maga a vizsgált szerkezet alakja alkotta ezeket a „szálas” struktúrákat. A hidrodinamikai áramlásokban sodródó részecskék az áramlás mechanikai tulajdonságai miatt gyülekeztek szálas struktúrákon. A szálas mikroorganizmusok a táplálék hatékony keresése és minél jobb kiaknázása érdekében nőnek szálas alakba. Megannyi ok tehát a szálas struktúrák felbukkanására.

Az egyszerű mechanikai szerkezetek mellett pl. szálas biológiai rendszereket is szoktak rudakkal, illetve rúdláncokkal modellezni. A hosszú, sok bázispárból álló DNS-molekulákat sokan folytonos rúdként modellezik, csakúgy, mint a biopolimerek alakját. Máskor hasonló molekulákat diszkrét láncként modelleznek, például merev elemeket összekötő hajlékony kapcsolatokkal. Növényi (pl. szőlő-) kacsokat vagy indákat is lehet rúdként modellezni, például így lehetett megmagyarázni a kacsoknál található hélix alak irányultságának spontán megfordulását. Hasonló modelleket javasoltak még szálas baktériumok, polipropilén-szálakból készített anyagok gyártása, és nanoszálak növesztése esetében. Mindezen esetekben remélhető, hogy a dolgozatban bemutatott eredmények, pl. a klasszikus invariánsokat kiváltó, szimbolikus dinamikán alapuló címkézés, vagy a térbeli káosz vizsgálatára kidolgozott módszer, alkalmazható lesz.

A nyitott áramlásokban zajló reakciókra levezetett kémiai reakcióegyenlet jelentősen eltér a hagyományos reakcióegyenlettől, amely jól kevert anyagok esetén érvényes. Ennek jelentős szerepe lehet az égési folyamatokban, a motorok vizsgálatában, tervezésében vagy például a mikroáramlásokban (pl. számítógépes nyomtatókban). További fontos alkalmazási területet a környezeti áramlások szolgáltatnak. Például a légkörben zajló kémiai folyamatok esetén nem lehet eltekinteni a reagáló anyagok egyenlőtlen, inhomogén eloszlásától; ennek nagy jelentősége lehet az ózonlyuk viselkedésének megértése szempontjából. Egy másik példa a planktonpopulációk viselkedése. Éppen ezen a területen sikerült alkalmaznunk eredményünket. Egy

régóta fennálló biológiai probléma, a *plankton-paradoxon* egy lehetséges megoldását jelentheti, ha figyelembe vesszük, hogy a planktonra is érvényes az áramlásban a „ritka előnye”, vagyis hogy a szálas fraktálokon a kisebb számban jelenlevő faj jobban hozzá tud férni az erőforrásokhoz.

Az együttélés problémája nem csak ezen a területen merül fel, az a korai evolúciónak is egy központi kérdése. Az önreprodukálódó makromolekulák együttélése szükséges ahhoz, hogy a *korai evolúció 22-es csapdáját* fel lehessen oldani, és ebben segíthet, ha figyelembe vesszük, hogy az őselevesben a makromolekulák szálas alakzatokon helyezkedhettek el [6, 24, 25].

A szálas mikroorganizmusok jelentőségét az adja, hogy a világ antibiotikum-, enzim- és citromsav-termelésének jelentős része ezen fajok termesztésével zajlik. Ehhez azonban nem árt tudni, hogy mikor éri el a szálas kolónia fejlődésének azt a szakaszát, amikor a kolónia közepe már annyira sűrű, hogy nem jut tápanyaghoz, akkor indul be ugyanis az antibiotikum termelés. Viszont mindeddig nem volt olyan modell, amely a kolónia fejlődésének minden szakaszát le tudta volna írni a kezdeti exponenciális fejlődéstől a végső telítődéséig.

A zárt áramlásban zajló kémiai reakció egyenletének speciális eseteként megkapható a korábban a nyitott áramlásra kapott egyenletünk is, ez tehát egy általánosabb érvényű egyenlet. Habár az eredményeket kétdimenziós, hiperbolikus áramlásban passzívan sodródó részecskék autokatalitikus reakciói esetén mutattuk be, azok kiterjeszthetők egyéb esetekre is. Ezt részben saját cikkek, részben mások munkái mutatják be. Egy nemrégiben megjelent terjedelmes összefoglaló cikkünk [11] részletesen tartalmazza ezeket az eseteket. A kémiai reakcióegyenletekben felbukkan a fraktálságot jellemző dimenzió akkor is, ha az áramlás három dimenziós, nem periodikus [9], nem hiperbolikus; ha a sodródó részecskéknek van tehetetlensége; ha másfajta reakció zajlik [2, 7, 14].

Publikációk az értekezés témakörében

Közvetlenül a tézisekhez kapcsolódó publikációk

Bírált folyóiratcikkek

- [1] Z. Toroczkai, Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél, C. Grebogi: Advection of active particles in open chaotic flows. *Physical Review Letters* **80** (1998) 500–503. IF: 6,017.
- [2] Gy. Károlyi, Á. Péntek, Z. Toroczkai, T. Tél, C. Grebogi: Chemical or biological activity in open chaotic flows. *Physical Review E* **59** (1999) 5468–5481. IF: 2,045.
- [3] Á. Péntek, Gy. Károlyi, I. Scheuring, T. Tél, Z. Toroczkai, J. Kadtké, C. Grebogi: Fractality, chaos, and reactions in imperfectly mixed open hydrodynamical flows. *Physica A* **274** (1999) 120–131. IF: 1,289.
- [4] I. Scheuring, Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél, Z. Toroczkai: A model for resolving the plankton paradox: coexistence in open flows. *Freshwater Biology* **45** (2000) 123–132. IF: 1,571.
- [5] T. Tél, Gy. Károlyi, Á. Péntek, I. Scheuring, Z. Toroczkai, C. Grebogi, J. Kadtké: Fractality, chaos, reactions, and population dynamics in imperfectly mixed open hydrodynamical flows. *Chaos* **10** (2000) 89–99. IF: 2,350.

- [6] Gy. Károlyi, Á. Péntek, I. Scheuring, T. Tél, Z. Toroczkai: Chaotic flow: the physics of species coexistence. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **97** (2000) 13661–13665. IF: 10,789.
- [7] I. Scheuring, Gy. Károlyi, Z. Toroczkai, T. Tél, Á. Péntek: Competing populations in flows with chaotic mixing. *Theoretical Population Biology* **63** (2003) 77–90. IF: 2,261.
- [8] E. Kapsza, Gy. Károlyi, S. Kovács, G. Domokos: Regular and random patterns in complex bifurcation diagrams. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B* **3** (2003) 519–540. IF: 0,984.
- [9] Gy. Károlyi, T. Tél, A.P.S. de Moura, C. Grebogi: Reactive particles in random flows. *Physical Review Letters* **92** (2004) 174101/1–4. IF: 7,218.
- [10] Gy. Károlyi: Fractal scaling of microbial colonies affects growth. *Physical Review E* **71** (2005) 031915/1–6. IF: 2,352
Közlésre kiválasztva:
Virtual Journal of Biological Physics Research **9** (2005) Issue 7.
- [11] T. Tél, A.P.S. de Moura, C. Grebogi, Gy. Károlyi: Chemical and biological activity in open flows: A dynamical system approach. *Physics Reports* **413** (2005) 91–196.
Erratum: **415** (2005) 360. IF: 14,742.
- [12] Gy. Károlyi, Z. Neufeld, I. Scheuring: Rock-scissors-paper game in a chaotic flow: The effect of dispersion on the cyclic competition of microorganisms. *Journal of Theoretical Biology* **236** (2005) 12–20. IF: 1,683.
- [13] A. Goriely, Gy. Károlyi, M. Tabor: Growth induced curve dynamics for filamentary microorganisms. *Journal of Mathematical Biology* **51** (2005) 355–366. IF: 1,762.
- [14] Gy. Károlyi, T. Tél: Chemical transients in closed chaotic flows: The role of effective dimensions. *Physical Review Letters* **95** (2005) 264501/1–4. IF: 7,218.
- [15] A. Kocsis, Gy. Károlyi: Buckling under conservative and nonconservative load: conservative spatial chaos. Közlésre elfogadva a *Periodica Polytechnica* c. folyóirathoz, 2005.
- [16] A. Kocsis, Gy. Károlyi: Conservative spatial chaos of buckled elastic linkages. Közlésre benyújtva a *Chaos* c. folyóirathoz, 2006.

Cikkek konferenciakiadványokban

- [17] Gy. Károlyi: Role of fractality in growth of filamental colonies. In: *Proceedings of the First Hungarian Conference on Biomechanics*, pp. 182–190. Research Center for Biomechanics, Budapest University of Technology and Economics, 2004.

Ismeretterjesztő cikk

- [18] Gy. Károlyi: Locsolócső és DNS: Létezik-e térbeli káosz? *Természet Világa* **134** (2003) 440–443.

Egyéb publikációk az értekezés témakörében

Könyvrészlet

- [19] Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél, Z. Toroczkai: Chaotic tracer dynamics in open hydrodynamical flows. In: E. Infeld, R. Żelazny, A. Gałkowski (Eds.): *Nonlinear Dynamics, Chaotic and Complex Systems*, pp. 24–38. Cambridge University Press, 1997.

Bírált folyóiratcikkek

- [20] Z. Toroczkai, Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél, C. Grebogi, J. A. Yorke: Wada dye boundaries in open hydrodynamical flows. *Physica A* **239** (1997) 235–243. IF: 1,206.
- [21] G. Károlyi, T. Tél: Chaotic tracer scattering and fractal basin boundaries in a blinking vortex-sink system. *Physics Reports* **290** (1997) 125–147. IF: 9,099.
- [22] Gy. Károlyi, G. Domokos: Symbolic dynamics of infinite depth: finding global invariants for BVPs. *Physica D* **134** (1999) 316–336. IF: 1,361.
- [23] Z. Toroczkai, Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél: Autocatalytic reactions in systems with hyperbolic mixing: exact results for the active baker map. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34** (2001) 5215–5235. IF: 1,542.
- [24] Gy. Károlyi, I. Scheuring, T. Czárán: Metabolic network dynamics in open chaotic flow. *Chaos* **12** (2002) 460–469. IF: 1,982
Közlésre kiválasztva:
Virtual Journal of Biological Physics Research **3** (2002) Issue 11.
- [25] I. Scheuring, T. Czárán, P. Szabó, Gy. Károlyi, Z. Toroczkai: Spatial models of prebiotic evolution: Soup before pizza? *Origins of Life and Evolution of the Biosphere* **33** (2003) 319–355. IF: 1,678.

Cikkek konferenciakiadványokban

- [26] Gy. Károlyi: Chaotic advection in two-dimensional flows. In: G.L. Balázs (Ed): *Proceedings of the 1st International Ph. D. Symposium*, pp. 183–188. Technical University of Budapest, 1996.
- [27] Gy. Károlyi, G. Domokos: Rúdláncok egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitása. In: *Az MTA-BME Mechanikai Kutatóközösség VI. Tudományos Ülésszakán elhangzott előadások*, pp. 15–20. Budapesti Műszaki Egyetem, 1998.

Ismeretterjesztő cikk

- [28] G. Domokos, Zs. Gáspár, Gy. Károlyi, M. Kurutz, P. Nédli: Global equilibrium paths. *Research News of the Budapest University of Technology and Economics* **4** (2000) 30–37, különszám.