

dc_738_13

DISZKRÉT STRUKTÚRÁK
LESZÁMLÁLÁSA ÉS JELLEMZÉSE

JÓZSEF BALOGH

DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

SZEGED, 2014

dc_738_13

Bevezetés

Kombinatorika jelenleg az egyik leggyorsabban fejlődő része a matematikának, és közeli kapcsolatban áll a matematika több más területével is, mint például geometria, számelmélet, statisztikai fizika és elméleti számítástechnika. Ezen kapcsolatok közül talán az egyik legnagyobb hatású Szemerédi Endre tétele a számtani sorozatokon.

Több elismert matematikus is dolgozik ezen a területen, kombinatorikus eredményekért is osztották ki a Wolf díjat 1983-ban és 1999-ben, a Fields medált 1998-ban és 2006-ban, és az Ábel díjat 2012-ben.

Ez a doktori dolgozat az extrémális gráfelmélet témaköréhez tartozik. Az extrémális gráfelmélet születését sokan Mantel [65] rövid cikkéhez kapcsolják, aki meghatározta egy háromszögmentes gráf maximális élszámát. Valójában a témakör Turán [78] eredményétől kezdve indult gyors fejlődésnek, aki általánosította Mantel eredményét teljes gráfokra. A dolgozat szoros kapcsolatban áll Turán tételével, és lényegében a tétel különböző kiterjesztéseit vizsgálja.

1. $K_{s,t}$ -mentes gráfok száma

Legyen H egy gráf. Jelölje $f(n)$ a címkézett H -mentes gráfok számát egy n -elemű csúcshalmazon, és $\text{ex}(n, H)$ a H gráf Turán számát, vagyis a maximum élszámát egy H -mentes n -csúcsú gráfnak. Turán tételét kiterjesztve, Erdős, Stone és Simonovits [44] bizonyította, hogy $\text{ex}(n, H)$ főleg csak a H kromatikus számától függ, pontosabban

$$\text{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2).$$

Mivel egy H -mentes gráf minden részgráfja H -mentes, így $f_n(H) \geq 2^{\text{ex}(n,H)}$. Erdős, Frankl és Rödl [39] bizonyította, hogy ez a durva alsó korlát valójában éles, amikor $\chi(H) \geq 3$, vagyis

$$f_n(H) = 2^{(1+o(1)) \cdot \text{ex}(n,H)}. \quad (1)$$

Az (1)-nek rengeteg változatát vizsgálták. Én is több cikket írtam az (1) reláció különböző kibővítéseiről, többek között tournamentek, rendezett gráfok, szavak, hipergráfok leszám-lálásairól [1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32].

A dolgozat első fejezete azt az esetet tanulmányozza, amikor H egy páros gráf, akkor mit mondhatunk (1) helyett.

Erdős Pál többször is kérdezte (például [35]-ben), vajon (1) igaz-e olyan páros gráfokra, amelyek tartalmazznak kört, de ezt sokáig nem tudták megválaszolni, sőt a C_4 és a C_6 kivételével még a $\log_2 f_n(H)$ függvény nagyságrendje sem volt ismert. Pár hónapja, Morris és Saxton [66] észrevette, hogy (1) nem igaz C_6 -ra. Ettől függetlenül, először a gyengébb állítás,

$$f_n(H) = 2^{\Theta(\text{ex}(n,H))}. \quad (2)$$

volt a kutatások célja. Az első eredményt ebben az irányban Kleitman és Winston [55] érte el, akik bizonyították, hogy $\log_2 f_n(C_4) \leq 2.17 \cdot \text{ex}(n, C_4)$. Később, Kleitman és Wilson [56] igazolta, hogy $\log_2 f_n(C_6) = \Theta(\text{ex}(n, C_6))$.

A fő eredménye az első fejezetnek az az, hogy (2) teljesül azon teljes páros gráfokra, amelyeknek az extrémális száma ismert. Ezt az eredményt Wojciech Samotijjal együtt bizonyítottuk, aki a cikk írása idején a doktorandusz diákom volt.

1. Tétel. [31, 32] Minden s és t egész számra ahol $2 \leq s \leq t$, van olyan pozitív konstans $C_{s,t}$, hogy a címkézett $K_{s,t}$ -mentes n -csúcsú gráfok száma, $f_n(K_{s,t})$ teljesíti

$$\log_2 f_n(K_{s,t}) \leq C_{s,t} \cdot n^{2-1/s}.$$

Erdős Pál többször is említette azt a sejtését, például [38]-ban, hogy $\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta(n^{2-1/s})$ minden $2 \leq s \leq t$ egész számpárra. Ha ez igaz volna, akkor Tétel 1 aszimptotikusan igaz lenne minden teljes páros gráfra. Eddig az Erdős sejtés bizonyított, amikor $s \leq 3$ ([33, 46, 47]), illetve amikor $t > (s-1)!$ ([4, 62]). Ezekre az értékekre Tétel 1 is aszimptotikusan éles.

A Tétel 1-nek több következményét is tárgyalja ez a fejezet. A legfontosabb számomra az, hogy a bizonyítás közben kifejlesztett módszer alkalmas volt más problémák megoldására is. Ezt a módszert először egy Alon–Balogh–Morris–Samotij [2] cikkben használtuk, ahol Ábel-csoportoknak azon részhalmazainak számát becsültük, amelyek nem tartalmazzak megoldását az $x + y = z$ egyenletnek, vagyis összegmentesek. Egy másik alkalmazás egy másik Alon–Balogh–Morris–Samotij [3] cikkben szerepel, ahol a Cameron–Erdős sejtés [34], illetve a Green–Saphozenko [52, 69] tételnek egy finomított változatát bizonyítottuk. A Green–Saphozenko [52, 69] tétel azt mondja ki, hogy az $[1, \dots, n]$ intervallum legfeljebb $O(2^{n/2})$ összegmentes részhalmazzal rendelkezik, mi viszonylag pontos becslést adtunk az m elemű összegmentes részhalmazok számára, ahol $1 \leq m \leq n/2$.

A legfontosabb alkalmazása a módszerünknek, a dolgozat második fejezetében szerepel, ezekről az eredményekről majd részletesebben is beszélünk.

Egy közvetlen alkalmazását Tétel 1-nek érdemes megemlíteni.

Egy G gráfot Ramsey-nek hívunk H -hoz viszonyítva, ha minden 2-színezése a G éleinek tartalmaz egy egyszínű részgráfot ami H -val izomorf, ezt úgy jelöljük, hogy $G \rightarrow H$. Erdős és Faudree [45] kérdezte, vajon létezik-e egy olyan gráf G amelyikre teljesül, hogy $G \rightarrow C_4$, de G nem tartalmaz $K_{2,3}$ -t részgráfként, vagyis ‘ritka’. Füredi [45] egy erősebb eredményt bizonyított: minden m elég nagy számra létezik egy $K_{2,3}$ -mentes m élű gráf, aminek minden m^{1-c} élű részgráfja tartalmaz egy C_4 -t, ahol $c = 1/51 + o(1)$. Természetesen ezek a gráfok Ramsey a C_4 -hez viszonyítva. Füredi [45] kérdezte, hogy vajon hasonló eredményeket lehet-e más gráf-párokra bizonyítani. Füredi [45] módszerét a mi módszerünkkel párosítva több ilyen gráf-párt is találtunk:

2. Következmény. Minden $2 \leq s \leq t$ egész számpárra létezik egy $u > t$ és egy pozitív konstans c , hogy minden elég nagy m -re létezik egy $K_{s,u}$ -mentes gráf G amelyiknek m éle van, és amelyik legnagyobb $K_{s,t}$ -mentes részgráfja csak m^{1-c} éllel rendelkezik. Például, ha $s = t = 3$, akkor $u = 4$ választható.

Érdemes megemlíteni, hogy az Erdős–Faudree kérdést Füredi-től függetlenül Nešetřil és Rödl [67] is megoldotta.

2. Független halmazok hipergráfokban

2.1. Fő tétel

A dolgozat legfontosabb eredménye a 2. fejezetben található, ami egy Robert Morrissal és Wojciech Samotijjal közösen írt cikkre [26] épül. A fő eredmény egy hosszú állítás hipergráfok függetlenségi számával kapcsolatban, amelynek meglepően sok alkalmazása van. Az alkalmazások egy része már nem sokkal a mi munkánk előtt is ismert volt Conlon és Gowers [36] és Schacht [71] eredményei által. Viszont, a mi tételünknek több olyan alkalmazása is van, amelyek [36] és [71] fő tételeiből nem következtek. Saxton és Thomasson [70] tőlünk függetlenül hasonló tételeket bizonyítottak hipergráfok függetlenségi számával kapcsolatban, és Samotijjal való szóbeli megbeszélés után hasonló alkalmazásokat is tudtak találni.

A fejezet fő eredménye hipergráfok független halmazaira ad egy struktúrális karakterizációt. A tétel kimondása előtt szükségünk van több definícióra is. V jelöli a csúcshalmazát a hipergráfnak, $\mathcal{P}(V)$ pedig a V összes részhalmazának a családját. Egy halmazrendszer $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(V)$ monoton növekvő, ha felülről zárt, vagyis ha $A, B \subseteq V$, $A \in \mathcal{F}$ és $A \subseteq B$ akkor $B \in \mathcal{F}$. A következő jelölést használok, $[n] = \{1, \dots, n\}$ és $[n]_p$ jelöli a p -véletlen részhalmazát $[n]$ -nek.

Egy $\mathcal{H}$ hipergráfot uniformnak hívunk, ha minden élének ugyanaz a mérete. Legyen $\mathcal{F}$ egy monoton növekvő család a $\mathcal{H}$ csúcshalmazán, V -n, és legyen $\varepsilon \in$

$(0, 1]$. A $\mathcal{H}$ hipergráf $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ -sűrű, ha

$$e(\mathcal{H}[A]) \geq \varepsilon e(\mathcal{H})$$

minden $A \in \mathcal{F}$ halmazra.

Jelölje $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ független halmazait. Ha $T \subseteq V(\mathcal{H})$, akkor a T -fokszáma a $\mathcal{H}$ -nak

$$\deg_{\mathcal{H}}(T) = |\{e \in \mathcal{H} : T \subseteq e\}|.$$

Az ℓ -maximum fokszáma a $\mathcal{H}$ hipergráfnak

$$\Delta_{\ell}(\mathcal{H}) = \max \{ \deg_{\mathcal{H}}(T) : T \subseteq V(\mathcal{H}) \quad \text{és} \quad |T| = \ell \}.$$

A fejezet fő eredménye a következő tétel.

3. Tétel. Minden k pozitív egész számra és minden pozitív c, c', ε konstansokra létezik egy pozitív konstans C , hogy a következő állítás teljesül. Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform hipergraph, és $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(V(\mathcal{H}))$ egy monoton növekvő család a $\mathcal{H}$ csúcshalmazán, úgy hogy minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $|A| \geq \varepsilon v(\mathcal{H})$ teljesül. Feltételezzük, hogy $\mathcal{H}$ $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ -sűrű, és $p \in (0, 1)$ olyan, hogy $p^{k-1}e(\mathcal{H}) \geq c'v(\mathcal{H})$ és minden $\ell \in [k-1]$ kielégíti az alábbi feltételt:

$$\Delta_{\ell}(\mathcal{H}) \leq c \cdot \min \left\{ p^{\ell-k}, p^{\ell-1} \frac{e(\mathcal{H})}{v(\mathcal{H})} \right\}.$$

Akkor létezik egy olyan $\mathcal{S} \subseteq \binom{V(\mathcal{H})}{\leq C p v(\mathcal{H})}$ halmazrendszer, és függvények $f: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$ és $g: \mathcal{I}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}$, hogy minden $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ kielégíti az alábbi relációt:

$$g(I) \subseteq I \quad \text{és} \quad I \setminus g(I) \subseteq f(g(I)).$$

Röviden, a tétel nagyjából az mondja, hogy ha egy $\mathcal{H}$ hipergráf teljesít bizonyos feltételeket, akkor minden I független halmazát meg lehet címkézni egy kis részhalmazával, $g(I)$ -vel, hogy az összes S -sel címkézett halmaz, ahol $S \in \mathcal{S}$, benne van egyetlen halmazban, $f(S)$ -ben, ami csak kevés élét tartalmazza $\mathcal{H}$ -nak.

Egy tipikus alkalmazása a tételnek a következő. Legyen $\mathcal{H}$ az a k -uniform hipergráf, amelynek a csúcshalmaza $[n]$, és az élhalmaza azon k elemű részhalmazai, amelyek egy k hosszú számtani sorozatot alkotnak. Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ azon részhalmazainak a családja, amelyek mérete legalább δn . Természetesen $\mathcal{F}$ monoton

növekvő, és Szemerédi [76] tételéből egy átlagolási leszámlálással következik, hogy a $\mathcal{H}$ hipergráf $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ -sűrű valamilyen kis ε -ra, ami csak δ -tól és k -tól függ. Mivel minden $S \in \mathcal{S}$ kicsi, így a $\mathcal{H}$ független halmazai számosságára, vagyis az $[n]$ halmaz k hosszú számtani sorozatmentes részhalmazai számosságára egy viszonylag jó felső korlátot kaphatunk.

Egy másik tipikus alkalmazása a tételnek a következő. Legyen $\mathcal{H}$ az a 3-uniform hipergráf, amelynek a csúcshalmaza az élhalmaza egy n -csúcsú teljes gráfnak, és $\mathcal{H}$ élhalmaza azon 3 élű részgráfok, amelyek egy háromszöget alkotnak. Legyen $\mathcal{F}$ az olyan n -csúcsú gráfok halmaza amelyeknek legalább $(1/2 - \varepsilon)\binom{n}{2}$ éle van és minden 2-színezése a csúcsainak ad legalább δn^2 egyszínű élet. Természetesen $\mathcal{F}$ monoton növekvő. Erdős és Simonovits [37, 72] stabilitási tételéből és a Ruzsa és Szemerédi [68] háromszög elmozdítási lemmájából következik, hogy a $\mathcal{H}$ hipergráf $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ -sűrű valamilyen kis ε -ra. A Tétel 3 alapján a tipikus háromszögmentes gráfok struktúráját lehet leírni.

Most a Tétel 3 fontosabb következményeit sorolom fel:

2.2. A k -hosszú számtani sorozatmentes halmazok számossága

Szemerédi [76] tétele azt mondja, hogy minden k pozitív egész számra, a legnagyobb k -hosszú számtani sorozatmentes részhalmazának az $[n]$ halmaznak, csak $o(n)$ eleme lehet. Ebből egyből következik, hogy $[n]$ -nek csak $2^{o(n)}$ k -hosszú számtani sorozatmentes részhalmaza létezik. Az első következménye Tétel 3-nek egy ritka változata ennek az állításnak.

4. Tétel. Minden pozitív β és k egész számra léteznek konstansok C és n_0 , hogy a következő teljesül. Minden n egész számra ahol $n \geq n_0$, ha $m \geq Cn^{1-1/(k-1)}$ akkor legfeljebb $\binom{\beta n}{m}$ darab m elemű részhalmaza létezik $[n]$ -nek, ami k -hosszú számtani sorozatmentes.

A Tétel 4-ből egyszerűen lehet igazolni a következő, ‘ritka véletlen Szemerédi tételnek’ néven ismert állítást, amit Conlon és Gowers [36], illetve függetlenül Schacht [71] bizonyított be először. Hívjunk egy $A \subseteq \mathbb{N}$ halmazt (δ, k) -Szemerédinek

ha minden $B \subseteq A$, amelyiknek van legalább $\delta|A|$ eleme tartalmaz egy k -hosszú számtani sorozatot.

5. Következmény. Minden $\delta \in (0, 1)$ és $k \in \mathbb{N}$ számpárra létezik egy konstans C , hogy a következő állítás igaz. Ha $p_n \geq Cn^{-1/(k-1)}$ akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr([n]_{p_n}(\delta, k) - \text{Szemerédi}) = 1.$$

Érdemes megemlíteni, hogy ebben a két állításban a p -re adott alsó korlát éles a konstans C értékét nem számítva.

Hasonló tételket könnyedén lehet hasonló módszerekkel bizonyítani, például összeg-mentes részhalmazok számára lehet viszonylag pontos felső korlátokat adni.

2.3. A Turán probléma véletlen gráfokban

A híres Erdős–Stone–Simonovits tétel [44] azt mondja ki, hogy egy H -mentes n -csúcsú gráf maximális élszáma, $\text{ex}(n, H)$, lényegében csak a H kromatikus számától, $\chi(H)$ -től függ:

$$\text{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \binom{n}{2}. \quad (3)$$

Az Erdős–Rényi véletlen gráfra, $G(n, p)$ -re való változtatát először Babai, Simonovits és Spencer [5] vizsgálta, bizonyítva, hogy a legnagyobb háromszögmentes részgráfja a $G(n, 1/2)$ -nak majdnem biztosan egy páros gráf lesz.

Az úgynevezett Turán problémát a véletlen gráfban, Haxell, Kohayakawa, és Łuczak [53, 54], illetve Kohayakawa, Łuczak, és Rödl [59] kezdte az általános esetre is vizsgálni, amit a következő módon fogalmaztak meg:

Probléma. Egy adott H gráfra határozzuk meg a pontos feltételt $\mathbf{p} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ -re, hogy majdnem biztosan

$$\text{ex}(G(n, p_n), H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \binom{n}{2} p_n, \quad (4)$$

ahol $\text{ex}(G, H)$ jelöli a maximális élszámát a G egy H -mentes részgráfiának.

Osszuk véletlenül $(\chi(H) - 1)$ -osztályba a $G(n, p)$ csúcshalmazát, így könnyen látható, hogy $\text{ex}(G(n, p), H) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)\right) \binom{n}{2} p$ teljesül minden $p \in [0, 1]$ -re.

Másrészt, ha valamilyen $H' \subseteq H$ példányai száma $G(n, p)$ -ben sokkal kisebb mint a $G(n, p)$ éleinek száma, akkor ez a becslés nem pontos, mert $G(n, p)$ H -mentessé változtatható, úgy hogy a H minden példányából elveszünk egy élet. Ez motiválja a H 2-sűrűségének a definícióját, amit $m_2(H)$ -vel jelölünk:

$$m_2(H) = \max \left\{ \frac{e(H') - 1}{v(H') - 2} : H' \subseteq H \quad \text{ahol} \quad v(H') \geq 3 \right\}. \quad (5)$$

Tehát ha egy H gráf maximális fokszáma legalább 2 és $\delta \in (0, 1/(\chi(H) - 1))$, akkor létezik egy pozitív c , hogy ha $p_n \leq cn^{-1/m_2(H)}$, akkor majdnem biztosan

$$\text{ex}(G(n, p_n), H) > \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \delta\right) \binom{n}{2} p_n.$$

Haxell, Kohayakawa, és Łuczak [53], illetve Kohayakawa, Łuczak, and Rödl [59] azt sejtette, hogy nagyobb p -re (4) majdnem biztosan teljesül. Több cikk [45, 48, 50, 53, 54, 59, 61, 75] is foglalkozott a problémával, mielőtt a sejtést Conlon és Gowers [36] illetve Schacht [71] megoldotta.

6. Tétel. Minden H gráfra amelyre $\Delta(H) \geq 2$ és minden pozitív δ -hoz, létezik egy pozitív konstans C hogyha $p_n \geq Cn^{-1/m_2(H)}$, akkor majdnem biztosan

$$\text{ex}(G(n, p_n), H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \delta\right) \binom{n}{2} p_n.$$

Tétel 3 alkalmazásával a Tétel 6-t bizonyítjuk, amikor H 2-egyensúlyozott, vagyis minden $H' \subset H$ esetén $m_2(H') \leq m_2(H)$. Megjegyezzük, hogy az érdekes gráfok többsége 2-egyensúlyozottak, mint például teljes gráfok és körök.

Erdős és Simonovits [37, 72] stabilitási tételét is bizonyítjuk véletlen gráfokra, amit először Conlon és Gowers [36] látott be.

7. Tétel. Legyen H egy 2-egyensúlyozott gráf, hogy $\Delta(H) \geq 2$. Akkor minden pozitív δ -hoz létezik C és ε , hogyha $p_n \geq Cn^{-1/m_2(H)}$, akkor majdnem biztosan a következő

teljesül. A $G(n, p_n)$ -nek minden H -mentes részgráfja, amelynek legalább

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \varepsilon\right) \binom{n}{2} p_n$$

éle van, $(\chi(H) - 1)$ -osztályúvá tehető legfeljebb $\delta n^2 p_n$ él elmozdításával.

2.4. A tipikus struktúrája H -mentes gráfoknak

Tétel 3 alkalmazásával egy ritka változatát bizonyítjuk az (1)-nak, ami Łuczak [63] egy sejtését oldja meg. Jelölje $f_{n,m}(H)$ a H -mentes m élű gráfok számát amelyeknek $[n]$ a csúcshalmaza.

8. Tétel. Legyen H egy 2-egyensúlyozott gráf és δ egy pozitív konstans. Akkor létezik egy C hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $m \geq Cn^{2-1/m_2(H)}$, akkor

$$\binom{\text{ex}(n, H)}{m} \leq f_{n,m}(H) \leq \binom{\text{ex}(n, H) + \delta n^2}{m}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy a Tétel 8 bizonyításában a Szemerédi regularitási lemmát nem használtuk, eltérően azoktól akik hasonló típusú (más) eredményeket igazoltak, mint például Łuczak [63], Erdős, Frankl, és Rödl [39], illetve Balogh, Bollobás és Simonovits [13].

A gráfok megszámlálásánál pontosabb eredményeket adnak a struktúrális leírások. Például, Erdős, Kleitman és Rothschild [42] bizonyította, hogy majdnem minden három-szögmentes gráf páros. Ennek az állításnak a ritka változatát Osthus, Prömel és Taraz [64] igazolta: Ha $m \geq Cn^{3/2}\sqrt{\log n}$ valamilyen $C > \sqrt{3}/4$ konstansra, akkor majdnem minden n -csúcsú háromszögmentes gráf, amelynek m éle van, az páros. Mi egy általánosabb, de gyengébb változatot bizonyítottunk, megválaszolva egy kérdését Łuczak [63]-nak. Adott δ -ra és k -ra egy G gráfot (δ, k) -osztályúnak hívunk, ha G -t k -osztályúvá tudjuk változtatni legfeljebb $\delta e(G)$ él eltörlésével.

9. Tétel. Legyen H egy 2-egyensúlyozott gráf amely kromatikus száma legalább 3, és δ egy pozitív konstans. Akkor létezik egy C hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $m \geq Cn^{2-1/m_2(H)}$, akkor majdnem minden H -mentes n csúcsú és m élű gráf az $(\delta, \chi(H) - 1)$ -osztályú.

Tétel 8 és Tétel 9 bizonyítása a Tétel 3 alkalmazásával történik. Mostanában Morris, Samotij és Warnke-val közösen egy pontosabb állítást igazoltunk teljes gráfokra.

10. Tétel. [27] Legyen $\ell > 2$. Akkor léteznek konstansok C_ℓ és r_ℓ hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $m \geq (1 + o(1))C_\ell(\log n)^{r_\ell}n^{2-1/(\ell-1)}$, akkor majdnem minden K_ℓ -mentes n csúcsú és m élű gráf $(\ell - 1)$ -osztályú, és ha $n \ll m \leq (1 - o(1))C_\ell(\log n)^{r_\ell}n^{2-1/(\ell-1)}$, akkor ez nem teljesül.

2.5. A KŁR-sejtés

A Szemerédi regularitási lemma [77], ami az egyik legfontosabb eszköz a gráfelméletben, nagyjából azt mondja, hogy minden (nagy csúcsszámú) gráf csúcshalmaza konstans számú nagyjából azonos méretű osztályba osztható, hogy majdnem minden két osztály között levő gráf véletlenszerű. Az egyik erőssége az alkalmazásoknak az úgynevezett beágyazási lemma, ami azt mondja, hogy a véletlenszerű gráfokban bizonyos részgráfokat meg lehet találni részgráfként.

Az eredeti változata a Szemerédi regularitási lemmának sűrű gráfokra hasznos. Ritka gráfokra, amelyek csak $o(n^2)$ éllel rendelkeznek, Kohayakawa [57] és Rödl kiterjesztette az ε -regularitás definícióját, és egy regularitási lemmát bizonyítottak, amelyet ritka gráfokra is lehet használni, különös tekintettel véletlen gráfok pozitív sűrűségű részgráfjaira.

Egy adott $p \in [0, 1]$ -re és ε -ra azt mondjuk, hogy a páros gráf két csúcshalmaz V_1 és V_2 között (ε, p) -reguláris, ha minden $W_1 \subseteq V_1$ és $W_2 \subseteq V_2$ részhalmazra, amelyekre $|W_1| \geq \varepsilon|V_1|$ és $|W_2| \geq \varepsilon|V_2|$, az élsűrűsége, $d(W_1, W_2)$, a (W_1, W_2) párnak teljesíti

$$|d(W_1, W_2) - d(V_1, V_2)| \leq \varepsilon p.$$

A beágyazási lemma azt mondja, hogy ha egy tetszőleges H gráfnak a csúcsait nagy független halmazokra cseréljük és az éleit ε -reguláris pozitív sűrűségű páros gráfokra, akkor ez a felfújtt gráf tartalmazza H -t mint részgráf. A pontos állítás

a következő. Jelölje H csúcshalmazát $\{1, \dots, v(H)\}$, rögzítsük le ε -t és p -t, és legyen n és m olyan számpár amelyekre $0 \leq m \leq n^2$. Legyen $\mathcal{G}(H, n, m, p, \varepsilon)$ azon G gráfok családja amelyeket az alábbi módon állíthatunk elő. A G csúcshalmaza a diszjunkt uniója $V_1 \cup \dots \cup V_{v(H)}$ halmazoknak, ahol minden V_i mérete n , és mindegyik halmaz a H egy csúcsához tartozik. A H minden $\{i, j\}$ éléhez a G -ben a V_i és V_j halmazok között egy (ε, p) -reguláris páros gráfot rendelünk, aminek m éle van. Más éle nincs G -nek. Egy ilyen G gráfra, azon H részgráfjait G -nek, amelyekben minden i -re az i csúcsa H -nak V_i -ben van, *kanonikus részgráfoknak* hívunk.

11. Lemma (Beágyazási lemma). *Minden H -ra és pozitív d -re létezik egy pozitív ε és egy n_0 , hogy minden n és m számpárra, ahol $n \geq n_0$ és $m \geq dn^2$, minden $G \in \mathcal{G}(H, n, m, 1, \varepsilon)$ tartalmaz egy kanonikus példányát a H -nak.*

Azt várhatnánk, hogy egy hasonló állítás igaz, ha egy $p \geq cn^{-1/m_2(H)}$ függvényt írunk az 1 helyére, és csak a $m \geq pdn^2$ relációt feltételezzük. Azonban, Łuczak [51, 60] észrevette, hogy minden kört tartalmazó H gráfra és $p = o(1)$ -ra, léteznek gráfok a $\mathcal{G}(H, n, pn^2, p, \varepsilon)$ halmazban, amelyek nem tartalmazzák H mint részgráfot.

Kohayakawa, Łuczak és Rödl [59] sejtése, amit általában *KŁR-sejtésnek* rövidítenek azt mondja, hogy nincs sok ilyen gráf G . Egy H gráfra, m és n egész számokra, $p \in [0, 1]$ -re és egy pozitív ε -ra jelölje $\mathcal{G}^*(H, n, m, p, \varepsilon)$ azon gráfok halmazát amelyek elemei a $\mathcal{G}(H, n, m, p, \varepsilon)$ -nak, és nem tartalmazzák H -t mint részgráfot.

A KŁR sejtés. *Legyen H egy gráf. Akkor minden pozitív β -hoz létezik pozitív C , n_0 és ε , hogy minden n és m egész számokra, ha $n \geq n_0$ és $m \geq Cn^{2-1/m_2(H)}$, akkor*

$$|\mathcal{G}^*(H, n, m, m/n^2, \varepsilon)| \leq \beta^m \binom{n^2}{m}^{e(H)}.$$

A KŁR-sejtés egy fontos problémának számított, több speciális esetet megnézték. Például $H = K_3$, K_4 és K_5 eseteket a [58], [49] és [50] cikkekben oldották meg. A Tétel 3 alkalmazásával a KŁR-sejtést megoldottuk minden 2-egyensúlyozott gráfra.

12. Tétel. *Legyen H egy 2-egyensúlyozott gráf. Akkor minden pozitív β -hoz létezik pozitív számok C , n_0 és ε , hogy minden n és m számpárra, ahol $n \geq n_0$ és $m \geq Cn^{2-1/m_2(H)}$,*

$$|\mathcal{G}^*(H, n, m, m/n^2, \varepsilon)| \leq \beta^m \binom{n^2}{m}^{\epsilon(H)}.$$

Az közismert, hogy Tétel 12 segítségével Tétel 6 és Tétel 7 könnyedén igazolható. Valójában ez volt az eredeti motiváció a KŁR-sejtés kimondásában. Továbbá, Łuczak [63] bizonyította Tétel 8-t és Tétel 9-t a Tétel 12 segítségével, amikor az még csak KŁR-sejtésként volt ismert.

3. Ramsey-Turán elmélet

A dolgozat 3. fejezetében Ramsey-Turán típusú kérdéseket vizsgálunk. Ez a fejezet két John Lenzzel közös [22, 24], és egy Ping Huval és Simonovits Miklóssal közös [21] cikkekre épül. John Lenz és Ping Hu az együttműködés alatt doktorandusz diákjaim voltak.

Erdős és Sós [43] vetett fel Ramsey-Turán típusú kérdéseket először. A ‘Ramsey-Turán’ függvény $\mathbf{RT}(n, L, m)$ a maximuma egy L -mentes n -csúcsú gráf élszámának, amely függetlenségi száma kisebb mint m . A $\mathbf{RT}(n, L, f(n))$ függvény fázis változásait vizsgáljuk, vagyis azt hogy hogyan változik $\mathbf{RT}(n, L, f)$ amikor az f függvényt kicseréljük egy kicsit kisebb g függvényre. Mi azt az esetet néztük, amikor L egy teljes gráf.

Erdős és Sós [43] minden pozitív egész r számra bizonyította, hogy

$$\mathbf{RT}(n, K_{2r+1}, o(n)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) n^2 + o(n^2). \quad (6)$$

Ennek az eredménynek az a jelentése, hogy a Ramsey-Turán „sűrűsége” a K_{2r+1} -nek ugyanannyi mint a Turán „sűrűsége” a K_{r+1} -nek. Mivel Turán tétele [78] azt mondja, hogy $\mathbf{RT}(n, K_{2r+1}, n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2r}\right) n^2 + o(n^2)$, ezért (6) az jelenti, hogy K_{2r+1} -nek *fázis változása* van n -nél. A [21]-ben ezt részletesen vizsgáltuk, a dolgozat csak egy speciális esetet tartalmaz.

Erdős and Sós [43] megmutatta, hogy $\mathbf{RT}(n, K_5, c\sqrt{n}) \leq n^2/8 + o(n^2)$ minden $c > 0$ konstansra. Továbbá azt kérdezték, vajon

$$\mathbf{RT}(n, K_5, c\sqrt{n}) = o(n^2)$$

valamilyen $c > 0$ konstansra? Mi megválaszoltuk ezt a kérdést a következő formában.

13. Tétel.

$$\mathbf{RT}\left(n, K_5, o\left(\sqrt{n \log n}\right)\right) = o(n^2).$$

Itt, ahogy már [43]-ben is megjegyezték, $o\left(\sqrt{n \log n}\right)$ optimális, ugyanis

$$\mathbf{RT}\left(n, K_5, c\sqrt{n \log n}\right) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{ ha } c > 1. \quad (7)$$

A 3. fejezet többi eredménye, amelyek [22] és [24]-ben jelentek meg, a Ramsey-Turán függvények elméletét másik irányba terjeszti ki.

Egy G gráfnak a K_r -függetlenségi száma

$$\alpha_r(G) := \max\{|S| : S \subseteq V(G), G[S] \text{ } K_r\text{-mentes}\}. \quad (8)$$

Legyen $\mathbf{RT}_r(n, H, f(n))$ a maximum lehetséges élszáma egy H -mentes n -csúcsú gráfnak, amely függetlenségi száma kisebb mint $f(n)$. Erdős, Hajnal, Simonovits, Sós és Szemerédi [40] bizonyította, hogy $\mathbf{RT}_r(n, K_t, o(n)) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{t-1}\right)$, és ez pontos ha $t \equiv 1 \pmod{r}$.

Erdős, Hajnal, Sós, and Szemerédi [41, p. 80] (illetve [73, Probléma 17]) azt kérdezték, hogy milyen $r+2 \leq t \leq 2r+1$ esetén lesz $\mathbf{RT}_r(n, K_t, o(n)) = \Theta(n^2)$. Mi ezt a problémát megoldottuk, igazoltuk, hogy $\mathbf{RT}_r(n, K_t, o(n)) = \Theta(n^2)$ minden $t \geq r+2$.

A bizonyítás során Bollobás-Erdős típusú gráfokat szoroztunk össze, egy általunk definiált gráfszorzat segítségével. Ez az új fajta gráfcsalád hasznos más problémáknál is, mi akkor tudtuk használni [23], amikor hipergráfok kromatikus küszöbértékét vizsgáltuk.

Irodalomjegyzék

- [1] N. ALON, J. BALOGH, B. BOLLOBÁS AND R. MORRIS, The structure of almost all graphs in a hereditary property, *Journal of Combinatorial Theory, Series B.* **101** (2011), 85–110.
- [2] N. ALON, J. BALOGH, R. MORRIS, AND W. SAMOTIJ, Counting sum-free sets in Abelian groups, to appear in *Israel Journal of mathematics*.
- [3] N. ALON, J. BALOGH, R. MORRIS AND W. SAMOTIJ, A refinement of the Cameron-Erdős Conjecture, to appear in *Proceedings of the London Mathematical Society*.
- [4] N. ALON, L. RÓNYAI, AND T. SZABÓ, Norm-graphs: variations and applications, *Journal of Combinatorial Theory B*, **76** (1999), 280–290.
- [5] L. BABAI, M. SIMONOVITS, AND J. SPENCER, Extremal subgraphs of random graphs, *J. Graph Theory*, **14** (1990), 599–622.
- [6] J. BALOGH AND B. BOLLOBÁS, Hereditary properties of words, *RAIRO Theoretical Informatics and Applications* Special Issue (Imre Simon), Vol 39, **1** (2005), 49–66.
- [7] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS, AND R. MORRIS, Hereditary properties of ordered graphs, Topics in discrete mathematics, 179–213, Algorithms Combin., 26, Springer, Berlin, 2006.
- [8] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS, AND R. MORRIS, Hereditary properties of partitions, ordered graphs and ordered hypergraphs, *European J. Combin.*, **27** (2006), 1263–1281.

- [9] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS, AND R. MORRIS, Hereditary properties of tournaments, *Electronic J. of Combinatorics*, **14** (2007), no. 1, Research Paper 60, 25 pp. (electronic).
- [10] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS, AND R. MORRIS, Hereditary properties of combinatorial structures: posets and oriented graphs, *J. Graph Theory*, **56** (2007), 311–332.
- [11] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS, M. SAKS, AND V. T. SÓS, On the diversity function of a hereditary graph property, *J. Comb. Theory A.*, **99** (2009), 9–19.
- [12] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS AND M. SIMONOVITS, The number of graphs without forbidden subgraphs, *Journal of Combinatorial Theory B*, **91** (2004), 1–24.
- [13] J. BALOGH, BOLLOBÁS, AND SIMONOVITS, The typical structure of graphs without given excluded subgraphs, *Random Structures and Algorithms*, (2009) **34** 205–318.
- [14] J. BALOGH, BOLLOBÁS, AND SIMONOVITS, The fine structure of octahedron-free graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. **101** (2011), 67–84.
- [15] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS, AND D. WEINREICH, The speed of hereditary properties of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **79** (2000), 131–156.
- [16] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS, AND D. WEINREICH, The penultimate rate of growth for graph properties, *European J. Combin.*, **22** (2001), 277–289.
- [17] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS, AND D. WEINREICH, Measures on monotone properties of graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **116** (2002), 17–36.
- [18] J. BALOGH, B. BOLLOBÁS, AND D. WEINREICH, A jump to the Bell number for hereditary graph properties, *J. Combin. Theory Ser. B*, **95** (2005), 29–48.
- [19] J. BALOGH AND J. BUTTERFIELD, Excluding induced subgraphs: critical graphs, *Random Structures and Algorithms*, (2011) **38**, 100–120.

- [20] J. BALOGH, J. BUTTERFIELD, P. HU, AND J. LENZ, Mantel's Theorem for Random Hypergraphs, submitted.
- [21] J. BALOGH, P. HU, AND M. SIMONOVITS, Phase transitions in the Ramsey-Turán theory, submitted.
- [22] J. BALOGH AND J. LENZ, Some Exact Ramsey-Turán Numbers, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **44** (2012), 1251-1258.
- [23] J. BALOGH AND J. LENZ, Hypergraphs with Zero Chromatic Threshold, submitted.
- [24] J. BALOGH AND J. LENZ, On Ramsey-Turán numbers of graphs and hypergraphs, *Israel Journal of mathematics*, **194** (2013) 45–68.
- [25] J. BALOGH, R. MORRIS AND W. SAMOTIJ, Random sum-free subsets of Abelian groups, to appear in *Israel Journal of Mathematics*.
- [26] J. BALOGH, R. MORRIS AND W. SAMOTIJ, Independent sets in hypergraphs, to appear in *Journal of the American Mathematical Society*.
- [27] J. BALOGH, R. MORRIS, W. SAMOTIJ AND L. WARNKE, The typical structure of sparse K_{r+1} -free graphs, submitted.
- [28] J. BALOGH AND D. MUBAYI, Almost all triple systems with independent neighborhoods are semi-partite, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **118** (2011), 1494–1518.
- [29] J. BALOGH AND D. MUBAYI, Almost all triangle-free triple systems are tripartite, *Combinatorica*, **32** (2012), 143–169.
- [30] J. BALOGH AND W. SAMOTIJ, Almost all C_4 -free graphs have less than $(1 - \varepsilon) \text{ex}(n, C_4)$ edges, *SIAM J. Discrete Mathematics*, (2010) **24**, 1011–1018.
- [31] J. BALOGH AND W. SAMOTIJ, The number of $K_{m,m}$ -free graphs, *Combinatorica*, **31** (2011) 131–150.

- [32] J. BALOGH AND W. SAMOTIJ, The number of $K_{s,t}$ -free graphs, *Journal of the London Mathematical Society*, **83** (2011), 368–388.
- [33] W. BROWN, On graphs that do not contain a Thomsen graph, *Canadian Mathematical Bulletin*, **9** (1966), 281–285.
- [34] P.J. CAMERON AND P. ERDŐS, On the number of sets of integers with various properties, in *Number Theory* (R.A. Mollin, ed.), 61–79, Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [35] F. CHUNG, Open problems of Paul Erdős in graph theory, *Journal of Graph Theory*, **25** (1997), 3–36.
- [36] D. CONLON, AND W. T. GOWERS, Combinatorial theorems in sparse random sets, submitted.
- [37] P. ERDŐS, Some recent results on extremal problems in graph theory. Results, *Theory of Graphs* (Internat. Sympos., Rome, 1966), Gordon and Breach, New York, 1967, pp. 117–123 (English); pp. 124–130 (French).
- [38] P. ERDŐS, Some recent progress on extremal problems in graph theory, *Proceedings of the Sixth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, (1975), 3–14.
- [39] P. ERDŐS, P. FRANKL, AND V. RÖDL, The asymptotic number of graphs not containing a fixed subgraph and a problem for hypergraphs having no exponent, *Graphs and Combinatorics*, **2** (1986), 113–121.
- [40] P. ERDŐS, A. HAJNAL, M. SIMONOVITS, V. T. SÓS, E. SZEMERÉDI, Turán-Ramsey theorems and K_p -independence numbers, *Combin. Probab. Comput.*, **3** (1994) 297–325.
- [41] P. ERDŐS, A. HAJNAL, V. T. SÓS, AND E. SZEMERÉDI, More results on Ramsey-Turán type problems, *Combinatorica*, **3** (1983), 69–81.

- [42] P. ERDŐS, D. J. KLEITMAN, AND B. L. ROTHSCILD, Asymptotic enumeration of K_n -free graphs, *Theorie Combinatoire, Proc. Conf. held at Rome, 1973*, Roma, Acad. Nazionale dei Lincei 1976, vol II, 19–27.
- [43] P. ERDŐS AND V. T. SÓS, Some remarks on Ramsey’s and Turán’s theorem, in: *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, North-Holland, Amsterdam, 1970, pp. 395–404.
- [44] P. ERDŐS AND A. J. STONE, On the structure of linear graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52**, (1946), 1087–1091.
- [45] Z. FÜREDI, Random Ramsey graphs for the four-cycle, *Discrete Mathematics*, **126** (1994) 407–410.
- [46] Z. FÜREDI, New asymptotics for bipartite Turán numbers, *Journal of Combinatorial Theory A*, **75** (1996), 141–144.
- [47] Z. FÜREDI, An upper bound on Zarankiewicz’ problem, *Combinatorics, Probability and Computing*, **5** (1996), 29–33.
- [48] S. GERKE, Random graphs with constraints, 2005, Habilitationsschrift, Institut für Informatik, Technische Universität München.
- [49] S. GERKE, H. J. PRÖMEL, T. SCHICKINGER, A. STEGER, AND A. TARAZ, K_5 -free subgraphs of random graphs, *Random Structures and Algorithms*, **24** (2004), 194–232.
- [50] S. GERKE, T. SCHICKINGER, AND A. STEGER, K_5 -free subgraphs of random graphs, *Random Structures and Algorithms*, **24** (2004), 194–232.
- [51] S. GERKE AND A. STEGER, The sparse regularity lemma and its applications, *Surveys in combinatorics 2005*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 327, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, pp. 227–258.
- [52] B. GREEN, The Cameron-Erdős conjecture, *Bull. London Math. Soc.*, **36** (2004), 769–778.

- [53] P. E. HAXELL, Y. KOHAYAKAWA, AND T. ŁUCZAK, Turán's extremal problem in random graphs: forbidding even cycles, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 273–287.
- [54] P. E. HAXELL, Y. KOHAYAKAWA, AND T. ŁUCZAK, Turán's extremal problem in random graphs: forbidding odd cycles, *Combinatorica* **16** (1996), 107–122.
- [55] D. J. KLEITMAN AND K. J. WINSTON, On the number of graphs without 4-cycles, *Discrete Mathematics* **41**, (1982) 167–172.
- [56] D. J. KLEITMAN AND D. B. WILSON, On the number of graphs which lack small cycles, preprint. (1996).
- [57] Y. KOHAYAKAWA, Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs, *Foundations of computational mathematics (Rio de Janeiro, 1997)*, Springer, Berlin, 1997, pp. 216–230.
- [58] Y. KOHAYAKAWA, T. ŁUCZAK, AND V. RÖDL, Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set, *Acta Arith.*, **75** (1996), 133–163.
- [59] Y. KOHAYAKAWA, T. ŁUCZAK, AND V. RÖDL, On K_4 -free subgraphs of random graphs, *Combinatorica* **17** (1997), 173–213.
- [60] Y. KOHAYAKAWA AND V. RÖDL, Regular pairs in sparse random graphs. I, *Random Structures and Algorithms*, **22** (2003), 359–434.
- [61] Y. KOHAYAKAWA, V. RÖDL, AND M. SCHACHT, The Turán theorem for random graphs, *Combin. Probab. Comput.*, **13** (2004), 61–91.
- [62] J. KOLLÁR, L. RÓNYAI, AND T. SZABÓ, Norm-graphs and bipartite Turán numbers, *Combinatorica*, **16** (1996), 399–406.
- [63] ŁUCZAK, On triangle free random graphs, *Random Structures and Algorithms*, **16** (2000), 260–276.

- [64] D. OSTHUS, H.J. PRÖMEL, AND A. TARAZ, For which densities are random triangle-free graphs almost surely bipartite?, *Combinatorica*, **23** (2003), 105–150, Paul Erdős and his mathematics (Budapest, 1999).
- [65] W. MANTEL, Problem 28. *Wiskundige Opgaven*, volume 10, (1907), 60–61.
- [66] R. MORRIS AND D. SAXTON, The number of $C_{2\ell}$ -free graphs, submitted.
- [67] J. NESETRIL AND V. RÖDL, On Ramsey graphs without bipartite subgraphs, *Discrete Mathematics*, **101** (1992), 223–229.
- [68] I.Z. RUZSA AND E. SZEMERÉDI, Triple systems with no six points carrying three triangles, *Combinatorics* (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. II, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, vol. 18, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 939–945.
- [69] A. A. SAPOZHENKO, The Cameron-Erdős conjecture, *Dokl. Akad. Nauk*, **393** (2003), 749–752.
- [70] D. SAXTON AND A. THOMASON, Hypergraph containers, submitted.
- [71] M. SCHACHT, Extremal results for random discrete structures, submitted.
- [72] M. SIMONOVITS, A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems, *Theory of Graphs* (Proc. Colloq., Tihany, 1966), Academic Press, New York, 1968, pp. 279–319.
- [73] M. SIMONOVITS AND V. T. SÓS, Ramsey-Turán theory, *Discrete Math.*, **229** (2001), 293–340.
- [74] V. T. SÓS, On extremal problems in graph theory, in: *Combinatorial Structures and their Applications* (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta., 1969), Gordon and Breach, New York, 1970, pp. 407–410.
- [75] T. SZABÓ AND V.H. VU, Turán’s theorem in sparse random graphs, *Random Structures and Algorithms*, **23** (2003), 225–234.

- [76] E. SZEMERÉDI, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith.*, **27** (1975), 199–245.
- [77] E. SZEMERÉDI, Regular partitions of graphs, Colloques Internationaux C. N. R. S. **260**, in Problèmes combinatoires et théorie des graphes. *Proc. Colloq. Orsay*, Éditions C. N. R. S, Paris, (1978), 399–401.
- [78] P. TURÁN, Egy gráfelméleti szélsőérték feladatról. (On an extremal problem in graph theory), *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), 436–452.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. $K_{s,t}$ -mentes gráfok száma	1
2. Független halmazok hipergráfokban	4
2.1. Fő tétel	4
2.2. A k -hosszú számtani sorozatmentes halmazok számossága .	6
2.3. A Turán probléma véletlen gráfokban	7
2.4. A tipikus struktúrája H -mentes gráfoknak	9
2.5. A KŁR-sejtés	10
3. Ramsey-Turán elmélet	13
Irodalomjegyzék	14