

# Opponensi vélemény

Balogh József

Counting and Characterizing Discrete Structures

című doktori értekezéséről

## Témaválasztás

Balogh József extrémális kombinatorikai problémákról és azokhoz szorosan kapcsolódó kérdésekről nyújtotta be értekezését. A tématerület sok évtizednyi múltat tekint vissza, és az ezirányú kutatások mindmáig aktívan folynak. A témaválasztás tehát korszerű és jól illeszkedik a tudományág fejlődési folyamatába.

## Rövid értékelés

A szerző érdekes és fontos eredményeket ér el a diszkrét matematika extrémális problémáinak területén. Szervesen kapcsolódik élvonalbeli szerzők aktuálisan folyó kutatásaihoz, és régen felvetett problémákhoz tesz hozzá értékes új eredményeket. Sikeresen alkalmaz erős kombinatorikus módszereket, és ő maga is gazdagítja ezeknek a tárházát újabbakkal. Egyik eredményével (44. tétel) jelentős új eszközt ad, amivel egy sor különböző kombinatorikus struktúrára vonatkozó nehéz kérdés kezelhetővé válik. A fő bizonyítások összetettek, megmutatják a szerző mély struktúralátását és bizonyító erejét, egyúttal tanúsítják jártasságát számos szemléletben, a véletlen módszertől a konstruktív és algoritmikus megközelítésekig.

## Az új tudományos eredmények

Az értekezés három fejezetben tárgyalja a vizsgált kérdéseket: adott méretű teljes páros részgráfot nem tartalmazó gráfokról, hipecgráfok független halmazairól, valamint úgynevezett Ramsey–Turán típusú problémákról. Közülük a legnagyobb részt a független halmazok

elhelyezkedésének struktúrája és az arra vonatkozó általános tételek alkalmazásainak bemutatása teszi ki.

Az első fejezet két 2011-ben megjelent, Wojciech Samotijjal közös publikáció alapján készült, és azt vizsgálja, hogy adott csúcsszámmal hány olyan gráf van, amely nem tartalmaz egy előre rögzített  $H$  gráffal izomorf részgráfot. Jelen esetben  $H = K_{s,t}$  teljes páros gráf.

Szimmetria miatt feltehetjük, hogy  $s \leq t$ . A fejezet fő eredménye (4. tétel) szerint a szóban forgó gráfok száma nem haladja meg a csúcsszámnak egy olyan függvényét, amiben a kitevő  $2 - 1/s$ . Ez a korlát az exponensben konstans szorzótól eltekintve egybeesik azzal, amit alsó korlátként is kapnánk, amennyiben a  $K_{s,t}$  Turán-számára régóta ismert felső korlát nagyságrendileg pontos lenne. Néhány  $s$  értékre ez ismert, ezekre a jelölt tétele megadja a kitevő pontos nagyságrendjét. A fejezet adott élszámú,  $K_{s,t}$  részgráfot nem tartalmazó gráfokra is ad felső korlátot az élszámoknak egy olyan tartományában, amelynek alsó határa viszonylag közel van a Turán-számról ismert felső korláthoz (6. tétel).

A disszertációnak mintegy felét teszi ki a második fejezet, amelyben az eredmények hipergráfok független halmazai köré rendeződnek. (Egy halmazt függetlennek nevezünk, ha nem tartalmazza a hipergráf egyetlen élét sem.) Részletes és informatív bevezetést követően a fejezet fő eredménye (44. tétel) a 2.1. alfejezetben kerül kimondásra. A tétel idézéséhez hosszabb előzetesre lenne szükség, ezért itt inkább csak annyit mondunk róla, hogy bizonyos feltételeknek eleget tevő hipergráfokban garantálja a független halmazoknak egy olyan csoportosítási lehetőségét nem túl sok részre, amelyben az egyes csoportokon belüli halmazok egyesítése bár nem független, de csak kevés élt tartalmaz.

A tétel jelentőségét aláhúzza, hogy egy sor fontos következménye van, amiket a fejezet bevezetője, valamint a későbbi alfejezetek taglalnak.

A 2.3. alfejezetben bizonyított 33. tétel Szemerédi híres, adott hosszúságú számtani sorozatokra vonatkozó tételét is felhasználva felső korlátot ad az első  $n$  szám olyan  $m$ -elemű részhalmazainak számára, amelyekben nincs  $k$  tagú számtani sorozat. Ha  $m$  nem nő lassabban, mint  $n$ -nek egy  $(k$ -tól függő) 1-hez közeli kitevőjű hatványa, akkor a korlát minden „ $cn$  alatt az  $m$ ” függvényénél lassabban növekszik.

A 2.4. és 2.5. alfejezetekben a szerző ritka szerkezetű halmazrendszerekre Schacht valamint Conlon és Gowers eredményihez kapcsolódva olyan extrémális tételeket bizonyít, amelyek a későbbiekben is felhasználásra kerülnek. Segítségükkel a 2.6. fejezetben a Turán-probléma véletlen hipergráfokra vonatkozó változatában az említett szerzők tételeire kapunk új bizonyításokat. Ezután az értekező egy stabilitási tételt igazol tiltott gráfoknak egy széles osztályára, az úgynevezett „2-egyensúlyozott” gráfokra (35. tétel).

A 2.7. alfejezet olyan gráfok tipikus szerkezetét tárgyalja, amelyek nem tartalmaznak egy adott (és meghatározott tulajdonságnak eleget tevő) uniform  $H$  hipergráfot. Ezek a vizsgálatok többek között Erdős, Frankl és Rödl valamint Erdős, Kleitman és Rothschild eredményeihez kapcsolódnak. A 70. tétel a  $H$ -t nem tartalmazó uniform hipergráfok

számát két binomiális együttható közé szorítja. Ezt követően a szerző „háromszögeként” definiálja azt az 5 csúcsú és 3 élű 3-uniform hipergráfot, amelyben nincs harmadfokú csúcs, majd más szerzők több erős eredményéből levezeti, hogy az elegendően nagy együtthatójú kvadratikus függvény szerint növekedő élszámú, „háromszöget” nem tartalmazó 3-uniform hipergráfok háromosztályúvá tehetők az élhalmaz egy csekély részének elhagyásával.

A 2. fejezet utolsó alfejezete a közel 20 év elteltével is mindmáig megoldatlan Kohayakawa–Łuczak–Rödl sejtést bizonyítja be „2-egyensúlyozott” gráfokra.

A harmadik fejezet egy megjelenés alatt álló, valamint két, néhány éve megjelent cikk alapján készült. Társszerzői Ping Hu és Simonovits Miklós, illetve a megjelenteké John Lenz. A fejezet fő eredménye a 75. tétel, amely szerint ha  $K_5$ -mentes gráfoknak egy végtelen sorozatában a függetlenségi szám nagyságrendileg lassabban nő, mint  $(n \log n)^{1/2}$ , akkor az élszám nem növekedhet kvadratikusán. A 76. tétel ennél szorosabb numerikus összefüggést is kifejez a függetlenségi szám és az élszám növekedési sebessége között. Másik irányból a 79. tétel egy geometriai konstrukción keresztül alsó korlátot ad Ramsey–Turán számok aszimptotikájára, mégpedig olyant, ami bizonyos esetekben – Erdős és társszerzőinek 1994-ben publikált eredményével párosítva – az  $n^2$  pontos együtthatóját is garantáltan megadja végtelenhez tartó  $n$ -re, és remélhető, hogy a képletben szereplő paraméter további értékeire is (esetleg végtelen sok számra) aszimptotikusan éles.

## Az eredmények elismertsége

A szerző által elért eredmények nemzetközi elismertségét jól mutatják a rájuk érkezett hivatkozások, valamint hogy a belőlük készült publikációk a tudományterület élvonalbeli folyóirataiban jelentek és jelennek meg.

## Az értekezés stílusa

A disszertáció angol nyelven íródott. Általában az angolsága kiváló, nyelvezete gördülékeny. Helyenként (nem egyenletes eloszlásban) szerepelnek benne hibás szófordulatok, hiányos kifejezések, hibásan használt igeidők, felesleges illetve hiányzó névelők, apró elírások, stb., de gyakorlatilag minden ekkora terjedelmű munkában előfordulnak hasonlóak, és az olvasó könnyen tudja javítani azokat. Helyenként talán rövidíthető lenne a szöveg, de ott sem válik terjengőssé, és a részletezés szintje olvasóbarát, a bővebb kifejtés a követhetőség javát szolgálja.

Érzésem szerint néhány megfogalmazás kissé félrecsúszott, de gyorsan hozzáteszem, hogy ezek nem vonnak le az eredmények tudományos értékéből.

Példaként említem, hogy Szemerédi regularitási lemmájára a szerző számos bizonyítási módszer felsorolását követően azt vélelmezi, hogy a lista távolról sem teljes („I am sure that this list of references is highly incomplete”). Ez azt a téves képet sugallja, mintha a – valójában nagy horderejű és egyáltalán nem könnyű – tétel szinte „bármiből” kijönne.

A kisebb pontatlanságok közül hadd említsek meg néhányat:

- Mantel az *adott csúcsszámú* háromszögmentes gráfok maximális élszámát határozta meg.
- Erdős, Stone és Simonovits tételéhez nem egyetlen referencia tartozna, továbbá a tétel lényegesen többet ad a nagyságrendnél („order of magnitude”). E tekintetben az „i.e.” használata tartalmilag hibás.
- Erősen nézőpont kérdése, hogy a  $t > (s - 1)!$  egyenlőtlenség „majdnem minden”  $(s, t)$  párra teljesül-e, vagy épp ellenkezőleg.
- Az (5) képlet alatt definiált  $RT_r$  függvényre néhány sorral lejjebb egy  $(1/2)$ -nél kisebb konstans felső korlát olvasható, ez nyilvánvalóan hibás még akkor is, ha a szerző ugyanabban a sorban azt állítja, hogy ez végtelen sok  $t$  értékre a lehető legjobb. (A hiányos képlet sajnálatos módon a tézisfüzetbe is bekerült.)
- Nézetem szerint meglehetősen elnagyolt  $n$ -hez beállítani a fázisátmenetet az Erdős–Sós tétel kapcsán.
- A 8. következmény utolsó állításában  $t \geq 2$  helyett vélhetően  $s = 2$  lenne az igazi feltétel.
- A 11. sejtés kapcsán nem derül ki, mik azok a „balanced” gráfok. (Nem gondolnám, hogy ismertnek kell feltételezni.)
- A 2. fejezet második oldalán  $p$  valós számot jelöl 0 és 1 között. Emiatt nehezen értelmezhető a kiemelt képlet alatti feltétel, amely szerint  $p$  elegendően nagy.
- Nem világos, mi az a „subsection 2”, amit a 2.1. alfejezet nyitó oldalának legfelső sora szerint az olvasónak meg kéne néznie.
- Érzésem szerint indokolt lett volna megadni a háromosztályú (tripartite) hipergráf definícióját.
- Váratlan nyelvi fordulat olyant mondani (bár tartalmilag kibogozható a jelentése), hogy ha  $M$  és  $N$  1970-ben ismerte volna  $X$  és  $Y$  tételét 1980-ból, akkor egy bizonyos dolgot be tudtak volna bizonyítani.
- A 80. állítás alatti utolsó bekezdés azt vetíti előre, hogy a bizonyítás közvetlenül gráfokon lesz végrehajtva (hipergráfok „árnyék gráfjainak” alkalmazása nélkül), két oldallal később azonban mégis a hipergráfokon keresztüli származtatással találkozunk.
- Az erős függetlenség definícióját nem találtam meg a dolgozatban.
- Nézetem szerint egy olyan fogalmat, ami több tételben is szerepel kulcsfeltételként (2-egyensúlyozott gráf) nem lábjegyzetben kell definiálni.
- Jelöléstechnikailag célszerű lehetett volna megkülönböztetni két különböző objektumot, amelyek egyazon bizonyítás két részében jelennek meg. Nevezetesen a

Claim 28 bizonyítása elején a  $D$ -vel jelölt halmaz egy kiemelt képletben  $r$ -eleműként van definiálva, a következő oldal közepén pedig a szövegben szereplő  $D$  halmazt  $r+1$  eleműnek feltételezzük. Ez utóbbi miatt a szintén kiemelt (1.19) egyenlőség formailag nincs összhangban az egy oldallal korábbival.

Helyenként előfordulnak szórendi hibák is, de nem érzem szükségesnek ezek felsorolását, hiszen olvasás közben könnyen javíthatók, a dolgozatban pedig amúgy sem kerülnének már javításra.

## Formai észrevételek

A kiváló tartalommal ellentétben az értekezés formai megvalósításának vonatkozásában számos probléma merül fel.

Hogy a több negatívum előtt egy pozitív észrevétellel kezdjem: a szerző gondosan ügyelt a tipográfiára, nevezetesen az eltérő funkciójú részleteket a folyó szövegben is más betűtípussal tette jól megkülönböztethetővé.

Másrészt viszont – tekintve, hogy a LaTeX minden szükséges formázási feladatot elvégez – az olvasó számára nehezen érthető, miért olyan makro csomag használatával készült a bekötésre szánt (és bekötésre került) példány nyomtatása, amely törli az oldalszámozást. Pontosabban mondva léteznek ugyan a dolgozatban számozott oldalak is (talán összesen 7 ilyen található benne), de kizárólag ott, ahol a LaTeX rendszerének belső értelmezése szerint „Chapter” szintű rész kezdődik, beleértve az irodalomjegyzék és a tartalomjegyzék kezdőlapját is. Ráadásul két 1-es számú oldal van (Introduction, Notation), ami vélhetően csak tudatos beavatkozással érhető el és nem látszik indokoltnak.

Továbbá az általános szokástól eltérően a tartalomjegyzék az értekezés végére került – bár ez (ha az olvasó egyszer már felfedezte, hogy nem kimaradt, hanem a végén van), nyilvánvalóan sokkal kevésbé zavaró, mint az oldalszámok hiánya.

Szintén az általános szokástól eltérően, a disszertáció elejéről hiányzik a rövid összefoglalás. Ezt itt, a formai kifogások között említtem, de valójában tartalmi probléma is. Ugyanis a szerző általános történeti bevezetővel nyitja értekezését, egy néhány bekezdésből álló tömör leírás helyett. Emiatt az olvasónak hét oldalnyi anyagot (Introduction) vagy legalábbis annak számottevő részét át kell néznie még ahhoz is, ha csak nagy vonalakban akarja megtudni, miről szól a mű. (Tudomásom szerint egyetemi PhD értekezés be sem adható ilyen szerkezettel, annak az elejére kötelezően előírják az 1 oldalt nem meghaladó összefoglalást.)

Némiképp szokatlan az is, hogy az említett hétoldalas bevezetés definiálatlan jelöléseket tartalmaz, pontosabban a definíciók majd csak később jönnek, emiatt a nem specialista számára még a bevezetés sem olvasható zökkenőmentesen önmagában.

Egészen apróság, hogy bár magyarul az utalás „1. fejezet” formában történik, angolban „Chapter 1” után nem teszünk pontot. Így például hirtelen rápillantással a „Chapter 1.” láttán az olvasóban felmerülhet, hogy egy kis LaTeX futtatási hiba történt. Az viszont vélhetően címkézési hiba, hogy több helyen ott is Theorem 44 hivatkozás történik, ahol a szövegkörnyezetnek ahhoz nincs semmi köze. Ez talán abból adódhat, hogy különböző cikkekből összemásolt fájlokban eltérő tételek kaptak megegyező azonosítót. Ezzel szemben a gondos címkézésnek inkább csak apró hiányossága, hogy a (3) képlet alatti szöveg (3.1) -et hivatkozik; tartalmilag ez azért nem zavaró, mert bár (3) -hoz képest (3.1) csaknem száz oldallal később következik, a két képlet teljesen megegyezik. Érdekességképpen ennek a jelenségnek a fordítottját is megemlíthetem, nevezetesen hogy a disszertációban két „Theorem 2” megnevezésű állítás is van, amiknek viszont tartalmilag nincs semmi közük egymáshoz.

A jelölésekre vonatkozó megjegyzések egyike szerint az első index mindig a csúcsszámot jelöli. Valójában viszont nem mindig. ( $K_{s,t}$ )

Szintén csak apróság, hogy az 1.1. fejezet elején a „size” szó egyetlen soron belül két meglehetősen különböző értelemben jelenik meg; továbbá nem szokványos az  $(i+1)$ -es indexű csúcs fokát  $d_i$ -vel jelölni (1.5. alfejezet).

## A tudományos tézisek elfogadása

A dolgozat mindegyik tézisét elfogadom új tudományos eredményként.

## A kapcsolódó publikációk

A szerző a disszertációban bemutatott eredmények legnagyobb részét a szakterület élvonalbeli nemzetközi folyóirataiban jelentette meg. Feltételezem, hogy a „to appear” jelzésű (a dolgozatban [5, 6, 30, 31] sorszámú) cikkeket a megjelölt folyóirat már hivatalosan elfogadta közlésre, a „submitted” [25, 26, 28, 32] cikkeknek pedig bizonyára egy része vagy talán már az összes elfogadásra került.

## A magyar nyelvű tézisfüzet

A tézisfüzet az elért eredményeknek informatív és lényegi összefoglalását adja, a legfontosabb állításokat megfelelően emeli ki. Tudományos tartalmát tekintve részemről

semmilyen kifogás nem merül fel, csupán formailag nem tartom szerencsésnek az 1. tételben azt a megoldást, hogy a [31, 32] referenciák együtt szerepelnek. Ez ugyanis akaratlanul is azt sugallja, mintha a szerző duplán publikálná ugyanazt az eredményét. Az ilyen félreértéseket érdemes lenne valamilyen magyarázó szöveggel eloszlatni.

Amint fentebb említettem, a disszertációban előforduló apró hibák részben szükségszerűek a terjedelem folytán, másrészt az olvasó többnyire könnyen javítja és túleszi magát rajtuk. A téziszfüzet stílusa viszont már több vonatkozásban is problémásnak tűnik. A jelen sorok íróját eléggé zavarta, hogy egy eredetileg nyilvánvalóan angolul megírt (és csekély számú helyen az angol írásmódot a fordítás után is megtartó) szöveg lett átfordítva magyarra oly módon, hogy a szerző több helyen nem volt tekintettel az angoltól nem ritkán eltérő magyar szórendre. Az ilyen megoldás által a mondatfűzés több helyen is nehézkessé válik, sőt, kevésbé szerencsés esetben enyhe értelmi változást is eredményezhet. Példaként említem a 2.1. fejezet legvégéről a következőt:

„A Tétel 3 alapján a tipikus háromszögmentes gráfok struktúráját lehet leírni.”

Valójában pedig ezzel szemben arról lenne itt szó, hogy a tétel alapján le lehet írni a tipikus háromszögmentes gráfok struktúráját (is). Azzal, hogy a „can be described” magyar megfelelője a mondat végén ragadt (ráadásul az igekötő sem lett eggyel előbbre hozva), a jelentés korlátozottabbá vált.

Az angol szórend automatikus átvételének eklatáns példája kiemelt környezetben a 2.4. fejezet címe: „A tipikus struktúrája H-mentes gráfoknak”.

A háromszögmentes gráfokról fentebb idézett, értelmileg módosult mondat egy másik problémát is illusztrál. A magyar szokásnak megfelelően a szerző nagyon helyesen 1., 2., 3., ... tételként fogalmazza meg állításait. Nem helyes viszont – sem nyelvtanilag, sem a formai egység kivánalma szempontjából –, hogy a folyó szövegben következetesen a Tétel 3, Tétel 4 szórendet alkalmazza. Fokozottan hibás változata ennek, amikor ráadásul a hangrendi egyeztetés is hiányzik (ld. „Tétel 3-nek” szófordulat).

Formailag az oldalszámok hiánya – a téziszfüzet kis terjedelmének köszönhetően – nem zavaró, bár ez is eléggé szokatlan.

A LaTeX egyszerű megoldást kínál a sor közepén megjelenő kötőjelek (pl. leszáma - lálásairól, feltétele - leket) elkerülésére a „backslash” használatával. A magyartalan elválasztást pedig (Simon - ovits, két helyen is) akár kézzel, akár a fájl preambulumban ki lehet iktatni, utóbbi módon akkor, ha nincs a szóban speciális karakter. Az pedig már teljes rejtély számomra, hogy az angol „wit - hout” kinek az ötlete volt; meglepődésemben vettem a fáradságot és kipróbáltam, a LaTeX még azon az áron is helyesen választja el, ha emiatt túlnyúló („overfull”) sor keletkezik.

Tekintve, hogy az anyagnak a téziszfüzet az a része, ami a legtöbb érdeklődő kezébe kerül, megfontolásra javaslom, hogy készüljön ebből egy javított változat még a védeésre szóló meghívók kiküldése előtt.

## **Kérdések a szerzőhöz**

1. A szerző az (1) aszimptotikus egyenlőség kapcsán páros gráfokra drámai változást ígér („The picture changes dramatically”). Kérdezem, van-e olyan páros gráf, amelyre (1) bizonyítottan nem érvényes.
2. A Turán-tételhez kapcsolódóan a disszertáció olyan gráfokat tárgyal, amelyekben van kör. Mi a helyzet körmentes gráfokra?
3. A 2. fejezetről az általános bevezetőben a szerző jelzi, hogy számos más szerző használja eszközként a [31] cikk fő eredményét, de nincs elérhető referencia („at this time no manuscript is available”). Milyen forrásból tudhatjuk, hogy a tétel valóban alkalmazásra került?

## **Alkalmasság nyilvános vitára**

Az értekezés nyilvános vitára bocsátását és a fokozat odaítélését javaslom.

Budapest, 2014. január 23.

Tuza Zsolt