

A bírálóbizottság értékelése

Balogh József tézisei három fejezetből állnak. Az első két fejezet a szerző egy-egy meghatározó dolgozatának az eredményeit tartalmazza, a harmadik pedig három dolgozat eredményeit foglalja össze.

Mindjárt az első fejezetben található a szerző egyik legfontosabb eredménye. Jelölje $ex(n, H)$ egy H gráf Turán számát (azaz a legtöbb élt, amit egy H -mentes n csúcsú gráf tartalmazhat), $f_n(H)$ a H -mentes n csúcsú gráfok számát. Erdős, Frankl és Rödl belátták, hogy nem páros H esetén

$$2^{ex(n, H)} \leq f_n(H) \leq 2^{(1+o(1))ex(n, H)}$$

Az alsó korlát igaz természetesen páros gráfokra is, és Erdős Pál többször kérdezte, hogy igaz-e a felső korlát, ha H páros és tartalmaz kört. Erre a sokat vizsgált kérdésre eddig csak részleges válaszok születtek. Talán a legnagyobb áttörés ebben az irányban a szerző (Samotijjal közös) 4. Tétele a disszertációban. Eszerint, a kitevő nagyságrendjében, a felső korlát teljesül azokra a teljes páros gráfokra, amelyeknek az extrémális száma ismert, azaz

$$\log_2 f_n(K_{s,t}) \leq C_{s,t} n^{2-1/s}.$$

A tételnek sok rendkívül fontos alkalmazása van, többek között a Haxell-Kohayakawa-Luczak, Kohayakawa-Luczak-Rödl és az Erdős-Faudree sejtések speciális esetei bizonyíthatóak teljes páros gráfokra.

A tézisek második fejezetének fő tétele (Morris-szal és Samotijjal közös, 44. Tétel a disszertációban) egy szintén rendkívül fontos eredmény, amelynek számos alkalmazása van, így szinte minden nemzetközi konferencián idézik az elmúlt években. A tétel kimondása túlságosan technikai, így a szerzőt idézzük egy 'elnagyolt' változathoz: „Röviden, a tétel nagyjából azt mondja, hogy ha egy $\mathcal{H}$ hipergráf teljesít bizonyos feltételeket, akkor minden I független halmazát meg lehet címkézni egy kis részhalmazával, $g(I)$ -vel, hogy az összes S -sel címkézett halmaz, ahol $S \in \mathcal{S}$, benne van egyetlen halmazban, $f(S)$ -ben, ami csak kevés élt tartalmazza $\mathcal{H}$ -nak.” A tétel rendkívül fontos következményei, többek között

- A híres k tagú számtani sorozatokra vonatkozó Szemerédi tétel egy 'ritka' változata (Conlon-Gowers, Schacht)
- A Turán probléma megoldása véletlen gráfokban (Conlon-Gowers, Schacht)
- Sárközy és Fürstenberg eredményeinek 'ritka' változata négyzetszámot különbségként nem tartalmazó számhalmazokról

Érdemes megjegyezni, hogy mindkét (4., 44.) tétel bizonyításában algoritmusoké a fő szerep. Az utóbbi esetben Balogh és szerzőtársai a Kleitman és Winston által először használt 'scythe' módszert fejlesztették tovább. A 44. Tétel önmagában leginkább egy új bizonyítási eszköz.

A harmadik fejezet (Lenz, illetve Hu, Simonovits társszerzőkkel közös) mély Ramsey-Turán típusú eredményeket tartalmaz.

Az opponensek kérdéseit Balogh József a kiváló előadásában maradéktalanul megválaszolta. A 44. Tétel fontos bizonyítási módszerré nőtte ki magát. A disszertáció beadása után további jelentős eredmények születtek: Balogh József és szerzőtársai számos nyitott problémát oldottak meg.

Összefoglalva, Balogh József a témakör számos centrális, régóta nyitott problémáját oldotta meg és ezzel nemzetközi szinten kimagasló eredményeket ért el a diszkrét struktúrák extrémális elméletében. Ezek új, fontos kérdéseket vetnek fel. A bizottság a téziseit elfogadja és az MTA doktora cím megítélését egyöntetűen javasolja.