

Balogh József: Diszkrét struktúrák leszámmlálása és jellemzése

MTA doktori értekezés bírálata

1. A disszertáció formája. A disszertáció angolul íródott, három fejezetből áll. Az első két fejezet a szerző egy-egy cikke ([37],[31]) lényegében szó szerint, ebből adódóan kis kényelmetlenségek adódnak, ugyanazok a fogalmak jelölések az első és második fejezetben ismétlődnek (és 29. oldal Theorem 44 helyesen Theorem 4). A harmadik fejezet a szerző három cikkének feldolgozása. Tehát a disszertáció öt cikk bemutatása. Megjegyzem, hogy valami technikai hiba folytán a disszertacio bekötött formájában a lapszámozás erősen hiányos.

2. A disszertáció eredményei.

2.1. $K_{s,t}$ -mentes címkézett gráfok aszimptotikus száma ([37] tsz: Samotij). Erdős, Frankl és Rödl (1986) eredménye, hogy nem páros H gráf esetén az n pontú H -mentes gráfok $f_n(H)$ számára fennáll, hogy

$$2^{ex(n,H)} \leq f_n(H) \leq 2^{(1+o(1))ex(n,H)},$$

ahol $ex(n,H)$ a Turán szám, azaz a legtöbb él, ami egy H -mentes n pontú gráfban lehet. Az alsó korlát persze páros H gráf esetén is igaz, de nyitott maradt az a sejtése Erdősnek, hogy igaz-e ugyanez a felső korlátra is, amennyiben H nem erdő. Ez csak $H \in \{C_4, C_6, K_{3,3}\}$ esetén volt ismert (Kleitman-Winston, Kleitman-Wilson, Balogh - Samotij). A fejezet fő eredménye a 4.Tétel, mely valószínűsíti a sejtést arra az esetre, ha H teljes páros gráf, ugyanis felső becslésük nem $ex(n,H)$ -t, hanem annak sejtett értékét használja. Ez egyébként megszokott jelenség ezen a területen.

2.2. Hipergráfok független halmazai ([31] tsz: Morris, Samotij). A disszertáció fő része és ezen belül a fejezet fő eredménye a 44. tétel, melyet önmagáért nehéz megszeretni komplikáltsága miatt. A szerzőt idézve az értekezés téziséből: "A tétel nagyjából azt mondja, hogy ha egy H hipergráf teljesít bizonyos feltételeket, akkor minden I független halmazát meg lehet címkézni egy kis részhalmazával, $g(I)$ -vel, hogy az összes S -el címkézett halmaz benne legyen egyetlen halmazban, amely csak kevés élt tartalmazza H -nak." Persze az a fontos, hogy a "bizonyos feltételeket" úgy kell kitalálni, hogy $[n]$ k tagú számtani sorozatainak hipergráfja kielégítse ezeket a feltételeket. A 44. tételben sikerül ezeket a feltételeket úgy összehozni, hogy érdekes alkalmazásokat lehessen belőle levezetni, például:

- k -tagú számtani sorozatot nem tartalmazó halmazok kevesen vannak (32. tétel és 33. következmény) illetve ennek többdimenziós általánosítása (57. tétel)
- Sárközy András és Fürstenberg eredményeinek ritka változata négyzetszámot nem tartalmazó különbség halmazokról (58. tétel)
- Turán probléma és stabilitás véletlen gráfokra (34. és 35. tételek)
- n pontú és m élű 2-balanced H -mentes gráfok aszimptotikus száma (36. tétel)

2.3. Ramsey - Turán elmélet ([26,27] tsz: Lenz, [29] tsz: Hu, Simonovits). A fő eredmény az Erdős és Sós kérdését megválaszoló 75. tétel, mely szerint a klasszikus $RT(n, K_5, m)$ függvénynek az $m = \sqrt{n \log(n)}$ helyen fázisváltása van. További eredmények pl. a 79. tétel, a klasszikus kérdéseknek arra az általánosítására vonatkoznak (Erdős, Hajnal, Sós, Szemerédi kérdései alapján), ahol a függetlenségi szám helyett a legnagyobb K_r -mentes részgráf pontszámát korlátozzuk.

3. Értékelés. A disszertációban bemutatott öt cikk (26,27,29,31,37) az extremális kombinatorika fontos kérdéseiben hoz lényeges előrelépést. Kiemelten fontosnak találom a 4. és a 44. tételt, bár ez utóbbit inkább lemmának nevezném, ami a Regularity Lemma fényében egyáltalán nem degradáló - sőt!

A 4. tételről. A tétel felső becslése a $K_{s,t}$ -mentes címkézett gráfok számára aszimptotikusan a lehető legjobb, amennyiben Erdős (és a szakértők) sejtése igaz, miszerint $ex(n, K_{s,t}) = \Theta(n^{2-1/s})$. A 4. tételnek a szerző több érdekes alkalmazását mutatja be (12,13,16,17 következmények), ezek Haxell-Kohayakawa-Luczak, Kohayakawa-Luczak-Rödl, Erdős-Faudree sejtéseinek speciális eseteit bizonyítják teljes páros gráfokra.

A 44. tételről. A tételt alkalmazásai teszik érdekessé. A Szemerédi tételből következik, hogy k tagú számtani sort nem tartalmazó halmazok száma $[n]$ -ben $2^{o(n)}$. A dolgozat centrumában álló 44. tételből ennek "ritka változatát" vezeti le Balogh.

32. Tétel. Minden β, k esetén van C, n_0 , melyre igaz: $n \geq n_0, m \geq Cn^{1-\frac{1}{k-1}}$ esetén legfeljebb $\binom{\beta n}{m}$ olyan részhalmaz van $[n]$ -ben mely nem tartalmaz k tagú számtani sorozatot.

Ebből a tételből adódik a 33. Következmény, a Szemerédi tétel "ritka véletlen" analogonja, melynek fontosságát az is bizonyítja, hogy ezt Schacht és Conlon-Gowers is felfedezi.

A 32. tétel mellett a 44. tételből további "ritka verziós" eredményeket is levezet a szerző. Ilyen a Gallai tétel ritka változata, az 57. tétel, illetve a négyzetszám különbséget nem tartalmazó halmazokról szóló Sárközy A. és Fürstenberg tétel ritka változata (57. és 58. tétel).

Érdekes, hogy a két fő eredmény (4. tétel és 44. tétel) bizonyításában is algoritmusok állnak a középpontban, az utóbbinál egy "Scythe" (azaz Kasza) névre keresztelt algoritmus.

A 44. tétel kritikájaként megjegyzem, hogy bár sok érdekes alkalmazását mutatja be a disszertáció, ezekben a főszerepet nem a 44. tétel, hanem valamely mélyebb tétel játssza. Például a 32. tételnél a 44. tételen kívül Szemerédi tétel kell (Varnavides lemmájával), az 57. tételben pedig Sárközy András és Fürstenberg eredményei kellenek (Hamel és Laba lemmájával). Ennek ellenére a disszertáció meggyőző arról, hogy a 44. tétel jó új eszköz - akár lemmává is kinőheti magát...

5. Konklúzió. A disszertáció a szakterület vezető kutatói által sokat vizsgált témakörökhöz kapcsolódik, fontos új eredménnyel gazdagítva azokat. Feltétlenül meg kell említenem, hogy Balogh Józsefnek a disszertációban bemutatott 5 cikkén kívül nagyon sok komoly, sokat idézett eredménye van.

A doktori cím odaitélését feltétlenül javaslom.

Budapest, 2015 Január 15.

Gyárfás András