

Balogh József: Counting and Characterizing Discrete Structures

2015. január 30.

A disszertáció angolul íródott, egy bevezetőből és három fejezetből áll. Az első fejezet kettő, a második egy, végül a harmadik három cikk alapján készült. Ezek mind társszerzősek, a társszerzők közül Samotij és Lenz a szerző korábbi doktoranduszai. Azonban a disszertáció témáiban 30 saját (társszerzős) cikket sorol fel a hivatkozási listában.

1. A disszertáció főbb eredményei

Itt a bíráló eléggé bajban van, hogy mely eredményeket **ne** sorolja fel, mint jelentős eredményt.

1.1. $K_{s,t}$ -mentes gráfok száma

$f_n(H)$ jelöli a címkézett H -mentes n -csúcsú gráfok számát, $\text{ex}(n, H)$ a H -mentes n -csúcsú gráfok maximális élszámát. Minthogy egy H -mentes gráf tetszőleges részgráfja is H -mentes, ezért $f_n(H) \geq 2^{\text{ex}(n, H)}$ nyilvánvalóan teljesül. Erdős, Frankl és Rödl bizonyították 1986-ban, hogy ez a durva alsó becslés éles, ha H nem páros gráf, azaz belátták hogy $\log_2 f_n(H) = (1 + o(1))\text{ex}(n, H)$. Erdős kérdezte, hogy igaz-e ugyanez akkor is ha H olyan páros gráf, ami tartalmaz kört? Az első fejezet fő eredménye, a 4. Tétel ami felső becslést ad a $K_{s,t}$ -mentes gráfok számára. A 4. Tétel felső korlátja aszimptotikusan éles minden s, t párra amelyre $\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta(n^{2-1/s})$ igaz. Ez utóbbi Erdős sejtése, és Alon, Brown, Füredi, Kollár, Rónyai és Szabó bizonyították $s \leq 3$ és $t > (s-1)!$ esetekre. A 4. Tétel bizonyításának finomabb analízise adja a fejezet másik fő eredményét, felső korlátot n -csúcsú m -élű

$K_{s,t}$ -mentes gráfok számára, ha m teljesít egy bizonyos alsó korlátot. Ezen utóbbi tétel érdekes következményei a 8. Következmény, miszerint majdnem minden n -csúcsú $K_{s,t}$ -mentes gráfnak legalább $c_{s,t}\text{ex}(n, K_{s,t})$ éle van azokban az esetekben amikor Erdős sejtése igaz. Valamint a 12. Következmény, ami Haxell, Kohayakawa és Łuczak egy sejtésének relaxált változata.

1.2. Független halmazok hipergráfokban

Ez a disszertáció leghosszabb fejezete majdnem $4/3$ -szor olyan hosszú mint a másik kettő együttvéve. Ennek oka, hogy a fejezet fő tételének nagyon sok igen jelentős következménye van. Kiemelném a 32. Tételt, ami Szemerédi híres tétele ritka analógiájának tekinthető, nevezetesen ha n elég nagy és $m \geq Cn^{1-1/(k-1)}$, akkor az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz m elemű részhalmazai közül csak elenyésző mennyiségű nem tartalmaz k -elemű számtani sorozatot. Schacht, valamint Conlon és Gowers által bizonyított „ritka, véletlen Szemerédi tétel” a 32. Tétel egyszerű következményeként adódik. Új bizonyítást ad az ugyancsak Schacht, valamint Conlon és Gowers által bizonyított „véletlen Turán tételre”, valamint a megfelelő stabilitási tételre, 34. és 35. Tételek. A 36. Tétel érdekessége, hogy a Szemerédi Regularitási Lemma nélkül ad felső becslést az m élű, n csúcsú H -mentes gráfok számára, amennyiben m egy természetes alsó korlátot kielégít. A fejezet fő tételének másik kiemelkedő következménye Kohayakawa, Łuczak és Rödl *KLR-sejtés* néven ismert sokat vizsgált sejtésének bizonyítása 2-kiegyensúlyozott gráfokra, 39. Tétel. Az említett tételeket Schacht, valamint Conlon és Gowers „általános átviteli tételeinek” megfelelő változatai használatával, vagy leszámlálós analógiájával bizonyítja, amely vátozatokra új bizonyítást ad a fejezet fő tételéből.

A fejezet fő tétele a 44. Tétel, ami bizonyos technikai feltételeknek eleget tevő uniform hipergráfok független pontthalmazait karakterizálja abban az értelemben, hogy minden I független halmazhoz hozzárendelhető egy kis részhalmaza, hogy azok a független halmazok, melyekhez ugyanaz a kis részhalmaz lett rendelve, mind lényegileg benne vannak egyazon majdnem független csúcshalmazban, vagyis egy olyan csúcshalmazban, amelyik a hipergráfnak csak nagyon kevés élet tartalmazza. Mivel az extrémális gráfelmélet alapkérdése általában valamely struktúrát nem tartalmazó gráfok maximális élszámáról szól, a 44. Tételt általában úgy lehet alkalmazni, hogy a hipergráf csúcshalmaza az n -csúcsú teljes gráf éleinek halmaza, a hipergráf élei a tiltott struktúrát alkotók, és akkor legnagyobb független csúcshalmazt keressünk, vagy a független halmazok számát akarjuk megtudni. A 44. Tétel azt

mondja, hogy ezek a független halmazok lényegileg benne vannak valamelyik majdnem független halmazban a kevés megadott közül. Amennyiben a majdnem független halmazokra létezik jó karakterizáció, ami általában előfordul, akkor kapunk egy felső korlátot a független halmazok számára.

1.3. Gráfok Ramsey-Turán elmélete

A Ramsey-Turán számot Erdős és Sós vezették be, $\mathbf{RT}(n, L, m)$ a legnagyobb élszámú n csúcsú L -mentes gráf élszáma, amelynek függetlenségi száma kisebb mint m . A disszertáció legrövidebb fejezetében két tételt találunk. Az első megadja, hogy K_5 -nek $\sqrt{n \log n}$ -nél fázis átmenete van (76. Tétel). A második egy majdnem optimális alsó korlát $\mathbf{RT}_r(n, K_{r+s}, o(n))$ -re (79. Tétel). Ennek bizonyítása a geometriailag definiált Bollobás-Erdős gráfok új típusú szorzatán alapuló konstrukció.

2. Megjegyzések

A disszertáció szerkesztése A disszertáció szerencsére nem összefűzött cikkekből áll. A szerző jelentős erőfeszítéseket tett, hogy a jelöléseket, tétel hivatkozásokat, stb. egységesítse, de teljesen nem sikerült.

Így például a 6. oldalon kétszer is hivatkozik (3.1) formulára, de olyan nincs csak (3) van.

A disszertáció bevezetésének és az 1. Fejezet bevezetésének részei szó szerint megegyeznek.

Az első fejezet fő tétele (4. Tétel) bizonyításának a végén kijelenti, hogy a 44. Tétel bizonyításának vége. Még kétszer hivatkozik a 4. Tétel helyett a 44. Tételre.

A *max degree order* kétszer van definiálva, először az 1.3 alfejezet elején, majd 46. Definícióban a 2. fejezet fő tételének bizonyítása előtt.

Bevezeti a $\rho\tau_r(H)$ jelölést, de néhány helyen, például a 94. oldal első bekezdésében megjelenik a régebben használt $\theta_r(K_t)$ jelölés is.

Két 2. Tétel van a dolgozatban, egy a bevezetőben, egy pedig a 3.4 alfejezetben.

Az $\mathbf{RT}_r(n, H, f(n))$ típusú kifejezéseknél többször lemarad az n^2 szorzó a disszertáció bevezetésében.

Egyéb észrevételek Erdős, Hajnal, Simonovits, Sós és Szemerédi $\mathbf{RT}_r(n, K_{r+s}, o(n))$ -re vonatkozó eredményénél kétszer is említi, hogy „részleges eredményt értek el $s \leq \min\{5, r\}$ esetben”, azonban mindkét helyen hiányzik s definíciója, az csak később derül ki, hogy $s = t - r$.

A [71] és [72] hivatkozások ugyanazok.

A 45. Állítás bizonyításának vázlatos leírásában említett S halmaz nincs definiálva, így a leírás nehezen érthető.

Turán tétele nem $\mathbf{RT}(n, K_{2r+1}, o(n)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2r}\right) n^2 + o(n^2)$, hanem $\mathbf{RT}(n, K_{2r+1}, n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2r}\right) n^2 + o(n^2)$ (92. oldal).

A 79. Tételben „ ℓ a legnagyobb olyan pozitív egész, melyre $\lceil r \cdot 2^{-\ell} \rceil < s$ ” helyett „ ℓ a legkisebb olyan pozitív egész, melyre $\lceil r \cdot 2^{-\ell} \rceil < s$ ” kell.

A dolgozat megírása gondos, az angolsága jó. Apróbb elírások vannak csak, például a 95. oldalon a kiterjesztett Erdős-Sós konstrukcióban $H_{k,t+1}$ helyett $H_{k,s+1}$ kellene. Talán nyelvtanilag a 3.2 alfejezet második mondata a legszembeötlőbb, ha jól emlékszem az egyetemi angol nyelvóráimra, akkor a mondat magyarra fordítva úgy hangzik, hogy „Ha Erdős és Sós ismerné Ajtai, Komlós és Szemerédi eredményét ... akkor be tudnák látni hogy ...”

3. A dolgozat értékelése

Balogh disszertációjában az extrémális gráfelmélet központi kérdéseit vizsgálja. Sokak által kutatott területeken ér el jelentős új eredményeket. Különösen kiemelendő az első és második fejezetek fő tételeire adott bizonyítások újszerű algoritmikus gondolatmenete. Az első fejezet esetében a legelső lépés végtelenül egyszerű: minden gráf előállítható az egyetlen csúcsból álló gráf-ból indulva, hogy egy $d + 1$ -fokú csúcsot adunk egy olyan gráfhoz, aminek a minimális foka legalább d . A kritikus lépés az, hogy az algoritmus segítségével ezeket az egy pontú kiterjesztéseket $K_{s,t}$ -mentes gráfok esetén sikerül egyértelműen, megfelelően rövid bitsorozatokkal kódolni.

A második fejezet egyik fő érdeme, hogy Conlon és Gowers, illetve Schacht analitikus illetve valószínűségszámítási módszerekkel elért kombinatorikus eredményeire ad tisztán kombinatorikus bizonyítást, továbbá még a Szemerédi Regularitási Lemmát sem használja. Új érdekes eredmények a leszámhlási változatok, a KLR-sejtés bizonyítása 2-kiegyensúlyozott gráfokra. Láthatóan a fejezet fő tételének sok érdekes alkalmazása várható, a már a disszertációban leírtak mellett. Úgy gondolom, hogy rendkívüli lényeglátás szükséges ahhoz, hogy valaki egy ilyen általános tételt kimondjon.

A harmadik fejezet a legrövidebb, és egy kicsit úgy is mondhatjuk leírásában a legelkapkodottabb. Itt az újdonság a geometriai konstrukció kiterjesztésében van. Módszereiben alapjában különbözik az első két fejezettől. Véleményem szerint nem is lett volna szükséges, az első két fejezet anyaga bőven elegendő lenne az MTA Doktora cím odaítéléséhez.

Konklúzió Balogh József disszertációja igen értékes hozzájárulás az extrémális gráfelmélet témaköréhez. Kiemelkedően jelentős eredményei a 4. Tétel a $K_{s,t}$ -mentes gráfok számáról, a 32. Tétel a k -tagú számtani sorozatot nem tartalmazó m elemű halmazok számáról, a 39. Tétel a KLR-sejtésről, a 44. Tétel uniform hipergráfok független csúcshalmazainak szerkezetéről, valamint a 76. és 79. Tételek a Ramsey-Turán témakörből.

Az értekezés nyilvános vitára tűzését és az MTA Doktora cím megadását javaslom.

Budapest, 2015 január 30.

Sali Attila