dc_821_13

Kvázicsoportok előállítása csoportokban és a projektív síkon

(Representations of loops in groups and projective planes)

MTA doktori értekezés tézisfüzete

Nagy Gábor Péter
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

2014

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés

A disszertációm több különböző matematikai területet foglal magába, ezek között a közös vezérvonalat a *kvázicsoportok* alkotják. A kvázicsoportok a csoportok nem-asszociatív általánosításai. Jóllehet magyarul furcsán hangzik, az egységelemes kvázicsoportokat az angol szaknevén loopnak fogom hívni. A loopok és kvázicsoportok elmélete önmagában is érdekes, a mi tárgyalásunkban mégis a csoportok elméletébe ágyazva fogjuk vizsgálni a témát. Vizsgálatainkban különösen fontos szerep jut a *Bol-loopok* osztályának, ezeket az

$$((xy)z)y = x((yz)y)$$

azonosság definiálja.

Az értekezés főbb részei a következők:

1) Absztrakt csoportok dekompozícióit használva bemutatjuk az egyszerű Bol-loopok elméletét.

2) Foglalkozunk véges többszörösen tranzitív halmazokkal; az eredményeink a véges permutációcsoportok elméletének kombinatorikai és algebrai fundamentumaira épülnek.

3) Vizsgáljuk véges 3-hálózatok projektív beágyazásait. Itt kombinatorikus jellegű leszámlálási módszerek mellett a kúpszeletek és köbös görbék elemi algebrai geometriáját használjuk, valamint mély eredményekre támaszkodunk a projektív lineáris csoportok elméletéből.

1.1. Történeti áttekintés

Közel kétezer éven keresztül egzakt matematika alatt azt az axiómatikus geometriát értették, amit Euklidész és tanítványai már a Kr. e. 3. században szigorú rendbe foglaltak. Ebbek a matematikában a számfogalom és a számokkal történő számolás viszonylag periférikus szerepet kapott. Az ókori görögök számfogalma nem igazán terjedt túl a pozitív racionális számok osztályán. Ez a helyzet a 12. században kezdett változni, amikor végre arab közvetítéssel Európába is megérkeztek hindu-arab számok, pontosabban az általuk megadható számábrázolási módszer és az alapműveleti eljárások. További közel 300 év kellett ahhoz, hogy a hindu-arab számok legalábbis a római számokhoz hasonló elismertséget szerezzenek maguknak az európai kultúrában. Innentől azonban a fejlődés robbanásszerű volt.

A 16. században Descartes és Fermat megalkotta a koordinátarendszer fogalmát, amivel összekapcsolták a geometria és a számolás világát. Hamarosan kialakult a tizedestörtek ábrázolása, és a negatív számok is „fel lettek találva”. A sikersztori folytatódott a komplex számok, a lineáris algebra és a függvénykalkulus kifejlődésével, a „számolási tudományunkat" pedig újabb és újabb területekre terjesztettük ki. ABEL és GALOIS a 19. század elején megalkották az absztrakt testelméletet és csoportelméletet, aminek a segítségével számos évezredes problémát tudtak megoldani. A 19. század végén FELIX KLEIN *Erlangeni Programjában* már azt tűzte ki célul, hogy a geometriai struktúrákat az őket megőrző transzformációcsoport absztrakt tulajdonságaival jellemezzük. A csoportelmélet azóta is vezető szerepet játszik az algebrában, valamint szinte minden matematikai diszciplína *algebraizálásában.*

A geometriai struktúrák algebraizálásában a két alapvető eszköz a *transzformációcsoport* és a *koordináta-struktúra.* Absztrakt szempontból az utóbbi az egzotikusabb. Egyrészt a műveletek „invertálhatósága" a legtöbb esetben geometriailag triviális, másrészt viszont a műveletek asszociativitása és disztributivitása a geometriai rendszer speciális, szabályos viselkedésének felel meg. Például minden Desargues-féle projektív sík ferdetesttel koordinátázható, és a koordinátázó ferdetest szorzásműveletének kommutativitása a sík Papposz-féle tulajdonságával ekvivalens. Ebben a példában megfigyelhetünk még egy tipikus jelenséget: mind a Papposz-, mind pedig a Desargues-féle tulajdonság megfeleltethető a projektív sík egy bizonyos szimmetriatulajdonságának.

A jelen dolgozatban *kvázicsoportokról* lesz szó, olyan algebrai struktúrákról, melyek a csoportok nem-asszociatív általánosításainak tekinthetők. Ezen struktúra névadója RUTH MOUFANG volt, akit nem-Desargues-féle projektív síkok vizsgálatai motiváltak. Nagyjából ebben az időben, az 1930-as években BLASCHKE és BOL differenciálgeometriai kutatásokból indulva kerültek kapcsolatba az absztrakt (lokális és globális) kvázicsoportokkal. Az elmélet alapfogalmait ALBERT és BRUCK dolgozták ki az 1940-es években, a csoportelméleti és geometriai vonatkozásokat pedig REINHOLD BAER nevéhez szokás kapcsolni.

1.2. Az értekezés tézisei

A Magyar Tudományos Akadémia szabályzata megkívánja, hogy a jelölt a tudományos eredményeit tézisekben foglalja össze. Az volt a szándékom, hogy a téziseim megfogalmazása szélesebb hallgatóság számára is érthető legyen, még akkor is, ha ez a matematikai precizitás rovására ment. Természetesen a disszertációban minden eredmény pontosan kimondásra került. Továbbá, a téziseket egyes szám első személyben fogalmaztam meg, jóllehet az eredmények nagy része a szerzőtársaimmal való közös munka eredménye.

1. Tézis: Csoport egzakt faktorizációján alapuló konstrukciókat adok valódi Bol-féle kvázicsoportokra. A módszer erejét mutatja, hogy segítségével egyszerű valódi Bol-loopokat tudok alkotni különböző kategóriákban: véges, páratlan rendű, differenciálható, illetve algebrai.

2. Tézis: Az indekompozábilis $\mathbb{F}_2 S_5$-modulusok geometriáját használva megadom 2-exponensű véges egyszerű Bol-loopok egy végtelen osztályát. Ezen osztály Bol-loopjai rendelkeznek egy olyan prímrendű automorfizmussal, ami tranzitívan hat a nemtriviális elemek halmazán.

3. Tézis: Egy nagyon egyszerű kombinatorikus lemmát használva meg tudom mutatni élesen 2-tranzitív halmazok nemlétezését az n-edfokú alternáló csoportban, ha $n \equiv 2, 3 \pmod 4$, valamint két másik 2-tranzitív véges egyszerű csoportban: a 23-adfokú Mathieu-csoportban és a 276-odfokú Conway-féle véges egyszerű csoportban. Következményként belátom, hogy egy véges nem-Desargues-féle projektív sík projektivitásainak csoportja az alternáló vagy a szimmetrikus csoport.

4. Tézis: A kombinatorikus lemmámat komputeres módszerekkel és geometriai érveléssel kombinálva osztályozom a véges kvázitestek jobb oldali multiplikációcsoportját. Következményként megkapom azon véges tranzitív lineáris csoportok osztályozását, melyek tartalmazhatnak élesen tranzitív halmazt. Ekvivalens megfogalmazással, osztályozom azon affin típusú véges 2-tranzitív csoportokat, melyek tartalmazhatnak élesen 2-tranzitív halmazt.

5. Tézis: Bebizonyítom, hogy bármely véges féligtest multiplikációcsoportja a projektív speciális csoport és a projektív általános lineáris csoport közé esik. Továbbá, bármely olyan loop, melynek multiplikációcsoportja része a projektív általános lineáris csoportnak, előáll, mint egy féligtest multiplikatív loopja. Ez megválaszolja A. Drápal egy nyitott problémáját.

6. Tézis: Teljes osztályozást adok azon véges csoportokról, melyek 3-hálózata realizálható egy 0 karakterisztikájú test feletti projektív síkon. Ezek a csoportok a ciklikus csoportok, a két ciklikus csoport direkt szorzatai, a diédercsoportok és a 8-adrendű kvaterniócsoport. Ezen realizálások geometriáját is leírom.

2 Bol-loopok és elemfelbontások csoportokban

Ebben a fejezetben számos véges és végtelen Bol-loopot konstruálunk. Ezen konstrukciók fontosságát az adja, hogy megfelelő input esetén kaphatunk (véges vagy végtelen) nem-Moufang nem-Bruck egyszerű Bol-loopot, amivel megválaszoljuk az ilyenek létezésére vonatkozó régi nyitott kérdést. A loopok megalkotásakor a Bol-mappák fogalmát használjuk. Ez az eszköz M. Aschbacher [Asc05] nevéhez fűződik, és lehetővé teszi csoportelméleti módszerek hatékony alkalmazását loopelméleti kérdések vizsgálatában. A fejezet eredményei az [Nag08a; Nag09; Nag08b; GN11] cikkekben kerültek publikálásra.

2.1. Definíció. *Legyen G csoport, $H \leq G$ részcsoport és $K \subseteq G$ részhalmaz, melyre $1 \in K$. A (G, H, K) hármast loop-mappának nevezzük, ha bármely $x, y \in G$ elemekhez vannak egyértelmű $h \in H$, $k \in K$ elemek úgy, hogy $x = h^y k$. A loop-mappa Bol-féle, ha bármely $k, \ell \in K$ elemre $k\ell^{-1}k \in K$ teljesül.*

2.1. Véges egyszerű Bol-loopok

Ebben az alfejezetben csoportok egzakt faktorizációján alapuló Bol-loop mappa konstrukciót ismertetünk. Csoportok egzakt faktorizációit a matematikai több ágában is tanulmányozzák. Ezt a módszert alkalmazva, több különböző végtelen osztályt tudunk konstruálni véges vagy végtelen egyszerű nem-Moufang, nem-Bruck Bol-féle loopokból.

Maga a konstrukció teljesen elemi, de meglehetősen fáradságos a kapott Bol-loop egyszerűségének bizonyítása. Ezen alfejezet tételei és példái támasztják alá az értekezés **1. Tézisét.**

2.1.1. Csoportok egzakt faktorizációja

2.2. Definíció. *A (G, A, B) hármast egzakt csoport-faktorizációnak nevezzük, ha G csoport, A, B részcsoportok, melyekre $A \cap B = 1$ és $AB = G$ teljesül. A (G, A, B) egzakt csoport-faktorizáció hű, ha A, B nem tartalmaznak valódi G-beli normálosztókat.*

Ha B nem tartalmaz valódi G-beli normálosztót, akkor az, hogy (G, A, B) egzakt csoport-faktorizáció, ekvivalens azzal, hogy A regulárisan ható részcsoport G-nek a B-mellékosztályokon vett permutáció hatásában. A szakirodalomban G-t az A, B csoportok *Zappa-Szép–szorzatának* is nevezik.

Számunkra az a tény játszik fontos szerepet, hogy ha (G, A, B) egzakt csoport-faktorizáció, akkor bármely $x \in G$ elemnek van egyértelmű $x = ab$ felbontása, ahol $a \in A$, $b \in B$.

A következő tétel megmutatja, hogyan tudunk egzakt csoport-faktorizációból Bol-féle mappát előállítani.

2.1. Tétel. *Legyen $\tau = (G, A, B)$ hű egzakt csoport-faktorizáció. Definiáljuk a $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, K)$ hármast az alábbi módon:*

$$\mathcal{G} = G \times G, \quad \mathcal{H} = A \times B \leq \mathcal{G}, \quad K = \{(x, x^{-1}) \mid x \in G\}.$$

Ekkor $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, K)$ Bol-loop mappa. A hozzá tartozó $(S, \circ)$ Bol-loop G-loop.

2.3. Definíció. *Legyen $\tau = (G, A, B)$ hű egzakt csoport-faktorizáció és definiáljuk a $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, K)$ hármast mint a 2.1 Tételben. A $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, K)$ loop-mappához tartozó Bol-loopot $\beta(\tau)$ fogja jelölni.*

2.1.2. Egyszerűségi feltételek Bol-loop mappákra

2.2. Tétel. *Legyen (G, A, B) egzakt csoport-faktorizáció az alábbi tulajdonságokkal:*

(1) $\operatorname{core}_G(A) = \operatorname{core}_G(B) = C_G(G') = 1$.

(2) A maximális G-ben és A' maximális G'-ben.

(3) Az $AG' \cap B$ részcsoport G-beli normális lezártja G.

Ekkor $\beta(G, A, B)$ egyszerű nem-Moufang Bol-loop.

A G csoportot *majdnem egyszerűnek* nevezzük, ha $T \leq G \leq \operatorname{Aut}(T)$ valamely T nem-Abel-féle egyszerű csoportra; T-t a G *talpának* mondjuk.

2.3. Tétel. *Legyen G majdnem egyszerű csoport T talppal. Legyen $\tau = (G, A, B)$ hű egzakt csoport-faktorizáció, és tegyük fel, $G = TA = TB$. Ekkor a $\beta(\tau)$ loop nem-Moufang egyszerű Bol-loop.*

2.1.3. Egyszerű valódi Bol-loopok osztályok

Ebben az alfejezetben a 2.1 Tételbeli konstrukciót használva példákat ismertetünk véges és végtelen egyszerű valódi Bol-loopokra.

2.4. Példa. *Legyen $G = \mathsf{PSL}(n, 2)$, A a Singer-ciklus, B pedig egy projektív pont stabilizátora. Ekkor $\beta(G, A, B)$ valódi véges egyszerű Bol-loop a 2.3 Tétel szerint.*

Megjegyezzük, hogy számos véges egyszerű csoportnak van egzakt faktorizációja; ezeket intenzíven kutatják, ld. [LPS00], [Giu06] és a bennük szereplő további hivatkozásokat.

2.5. Példa. *Legyen $n \geq 4$ páros szám, $G = S_n$, $A = \langle (1, 2, \ldots, n) \rangle$ ciklikus csoport és $B = S_{n-1}$ stabilizátor részcsoport. Definiáljuk a $Q_n = \beta(G, A, B)$ Bol-loopot. Ha $n \geq 6$, akkor Q_n véges egyszerű Bol-loop a 2.3 Tétel szerint.*

Az $n = 4$ esetben a Q_4 Bol-loop rendje 24. Ez a loop a 2.8 Példa alapján is előállítható. Az derül ki, hogy Q_4 is egyszerű.

2.6. Példa. *Legyen $G = \mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ és definiáljuk a G alábbi részcsoportjait:*

$$A = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad B = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

A 2.3 Tétel szerint $\beta(G, A, B)$ egyszerű nem-Moufang Bol-loop.

A $\beta(G, A, B)$ loop jobb oldali multiplikációcsoportja izomorf $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$-hez. Továbbá a loop izomorf az összes izotópjához, azaz nem izotóp egy Bruck-loophoz sem. Emlékeztetünk, hogy definíció szerint *Bruck-loopok* azok a Bol-loopok, melyek rendelkeznek az $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ *automorf inverz tulajdonsággal.* Ez volt az első olyan egyszerű nem-Moufang Bol-loop, mely nem izotópja egy egyszerű Bruck-loopnak, ld. [KK04].

Legyen k tetszőleges test. A $v \in k^n$ vektor alatt *sorvektort* értünk. Ha a $n \times n$-es mátrix, akkor a és v szorzatát va-nak írjuk. Az $[a, v]$ kommutátor a $va - v$ vektor. Legyen $A \leq \mathsf{GL}_n(k)$ lineáris csoport. Az $A \ltimes k^n$ *szemidirekt szorzat* az (a, v) párokból áll ($a \in A$, $v \in k^n$). Ilyenek szorzata definíció szerint

$$(a, v)(b, w) = (ab, vb + w).$$

2.7. Állítás. *Legyen k test és $A \leq \mathsf{GL}_n(k)$ lineáris csoport. Legyen $\gamma : k^n \to A$ homomorfizmus, melyre $T = \mathrm{Im}(\gamma)$ esetén teljesül $[T, k^n] \leq \ker \gamma$. Legyen $G = A \ltimes k^n$ és definiáljuk a G*

$$B = \{(\gamma(-v), v) \mid v \in k^n\}$$

részhalmazát.

(i) $B \leq G$ és $\tau = (G, A, B)$ egzakt csoport-faktorizáció.

(ii) Ha A irreducibilis és γ nem-triviális, akkor τ hű.

(iii) Ha A, A' irreducibilisek és γ képének A-beli normális lezártja A, akkor $\beta(\tau)$ egyszerű nem-Moufang Bol-loop.

Legyen A és γ mint a 2.7 Állításban. A megfelelő egyszerű Bol-loopot $\beta^*(A, \gamma)$ fogja jelölni.

2.8. Példa. *Legyen k test, $A = \mathsf{SL}_2(k)$ és adott $\gamma : k^2 \to A$ leképezés:*

$$\gamma(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor γ homomorfizmus és

$$[\gamma(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = (0, x_1 y_1) \in \ker \gamma.$$

Továbbá, az $\mathrm{Im}(\gamma)$ unipotens mátrixok normális lezártja $\mathsf{SL}_2(k)$. Ha $|k| \leq 3$, akkor ezt kézzel is ellenőrizhetjük. Ha $|k| > 3$, akkor $\mathsf{SL}_2(k)$ egyszerű modulo a centruma, amiből következik a kijelentésünk, mivel a $\gamma(x_1, x_2)$ elemek nem centrálisak. Tehát az A, γ pár kielégíti a 2.7 Állítás feltételeit, és a fenti eljárás egy egyszerű nem-Moufang Bol-loopot eredményez.

Ha $k = \mathbb{F}_2$, akkor a 2.8 Példa Q loopjának rendje 24 és a jobb oldali $\mathrm{RMlt}(Q)$ multiplikációcsoport feloldható. Valójában Q izomorf a 2.5 Példa Q_4 loopjával ($n = 4$). G. E. Moorhouse [Moo07] komputeres eredménye azt mutatta, hogy a 24-nél kisebb rendű Bol-loopok feloldhatóak, tehát Q a lehető legkisebb rendű egyszerű Bol-loop.

Az utolsó példánk olyan egyszerű Bol-loopot szolgáltat, melynek rendje $3^4 \cdot 13 = 1053$. Ez a konstrukció azt mutatja, hogy a páratlan rendű csoportok feloldhatóságát kimondó híres „Odd Order Theorem” nem teljesül Bol-loopokra. (Ld. [FKP06].)

2.9. Példa. *Legyen $k = \mathbb{F}_3$ és azonosítsuk k^3-t $\mathbb{F}_{27}$-el. Legyen g primitív elem $\mathbb{F}_{27}$-ben és definiáljuk a 13-adrendű $\sigma : x \mapsto g^2 x$ leképezést. Legyen Φ az $\mathbb{F}_{27}$ test $x \mapsto x^3$ Frobenius-automorfizmusa. Ekkor $\sigma\Phi = \Phi\sigma^3$ és $A = \langle \Phi, \sigma \rangle$ egy nem-Abel lineáris csoport úgy, hogy $A' = \langle \sigma \rangle$. Az $x \in \mathbb{F}_{27}$ elem nyoma $\mathrm{Tr}(x) = x^9 + x^3 + x$. Megjegyezzük, hogy minden $y \in \mathbb{F}_{27}$ esetén*

$$\mathrm{Tr}([\Phi^i, y]) = \mathrm{Tr}(y^{\Phi^i} - y) = 0. \tag{2.1}$$

Értelmezzük a $\gamma : \mathbb{F}_{27} \to A$ leképezést, $\gamma(x) = \Phi^{\mathrm{Tr}(x)}$. A (2.1) szerint $[\gamma(x), y] \in \ker \gamma$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{F}_{27}$ esetén. Ez azt jelenti, hogy A, γ kielégíti a 2.7 Állítás feltételeit, így $\beta^*(A, \gamma)$ egy $3^4 \cdot 13$ rendű egyszerű Bol-loop.

2.2. 2-exponensű véges egyszerű Bol-loopok

Hosszú idő óta ismertek példák olyan 2-exponensű Bol-loopokra, amik nem elemi Abel 2-csoportok, az első konstrukciók R. P. Burn [Bur78] nevéhez kapcsolhatók. Később több végtelen osztályt adtak meg, ld. [Kie02; KN02; KK95; Nag06]. Az összes példa feloldható loop volt; vagy ami ezzel ekvivalens, a jobb oldali G multiplikációcsoportja 2-csoport. A 2-exponensű nem-feloldható véges Bol-loopok létezésének kérdését a loopok és kvázicsoportok elméletének egyik legfontosabb nyitott kérdésének tekintették. Mivel a legkisebb példa ilyenre szükségszerűen egyszerű, a kérdés természetes módon kapcsolódott a véges egyszerű valódi Bol-loopok létezésének problémájához. Itt „valódi” Bol-loop alatt nem-Moufangot értünk, azaz olyat, amiben nem teljesül az $x(yx) = (xy)x$ azonosság.

[Nag98] szerint a 2-hatvány exponensű Bol-loop feloldhatósága ekvivalens azzal, hogy a loop rendje 2-hatvány. Később [Hei96] megmutatta, hogy a (G, H, K) minimális loopmappához tartozó loop feloldhatósága megfelel a G csoport feloldhatóságának. A következő nagyobb lépés M. Aschbacher [Asc05] cikke volt, melyben részletes leírás adott a minimális nem-feloldható 2-exponensű Bol-loop jobb oldali multiplikációcsoportjának struktúrájáról.

Ebben az alfejezetben az Aschbacher-féle receptet alkalmazzuk arra, hogy megkonstruáljuk 2-exponensű véges egyszerű Bol-loopoknak egy végtelen osztályát. Ezzel nemleges választ adunk az [Asc05] és [AKP06] cikkek 2. és 3. kérdésére. Az osztályunk legkisebb tagja 96-odrendű. Hangsúlyozzuk, hogy ez a példa olyan kicsi és az [Asc05] és [AKP06] cikkekben a struktúra leírása olyan precíz, hogy csak idő kérdése volt, hogy valaki megtalálja valamilyen formájú komputeres kereséssel. Ez meg is magyarázza azt, hogy ezt a 96-odrendű loopot 10 nappal később, tőlem függetlenül a B. Baumeister és A. Stein szerzőpáros is megtalálták. Baumeister, Stein és Stroth folytatta a véges 2-hatvány exponensű Bol-loopok vizsgálatait: [BS10; BSS11; BS11; Bau12]. Sikerült megmutatniuk, hogy ha T egy majdnem egyszerű csoport, melyhez egy (G, H, K) 2-exponensű Bol-loop mappa létezik úgy, hogy $T \cong G/O_2(G)$, akkor T izomorf $\mathsf{PGL}(2, q)$-val, ahol $q = 9$ vagy $q \geq 5$ Fermat-prím, ld. [BS11, Theorem 1].

Megemlítjük még Johnson és Smith [JS10] cikkét, melynek az a szándéka, hogy közvetlenebb kombinatorikus jellemzést adjon a 2.12 Tételben megadott legkisebb egyszerű 2-exponensű Bol-loopra, felhasználva a projektív geometria és kvázicsoportok elméletének csoportelméleti háttérrel kiegészített fogalmait.

Ennek az alfejezetnek az eredményei a **2. Tézist** támasztják alá.

A következőkben a G csoportot definiáljuk, mint a 32 rendű elemi Abel-csoportnak S_5-el vett nem-felhasadó bővítését, amiben a transzpozíciók másodrendű elemekké, a páros involuciók pedig 4-edrendű elemekké emelkednek fel G-ben. A G viszonylagosan kicsi rendje ellenére eddig nem igazán sikerült egyszerű leírást adni erre a csoportra, ezért a mi definíciónk is meglehetősen esetleges. Két technikai lemmával kezdünk.

2.10. Lemma. *A* 40 *ponton ható*

$$\begin{aligned} c &= (1,4)(2,9)(3,10)(6,11)(7,12)(13,21)(14,22)(15,24)(16,23)(17,30) \\ &\quad (18,29)(19,31)(20,32)(33,35)(38,40), \\ d &= (1,2,4,6,8,7,5,3)(9,13,25,18,10,14,26,17)(11,15,27,20,12,16, \\ &\quad 28,19)(21,30,38,34,23,31,40,35)(22,32,39,36,24,29,37,33) \end{aligned}$$

permutációk kielégítik az alábbi relációkat:

$$c^2 = d^8 = (cd)^5 = [c, d]^3 = [d^4, c]^2 = [d^4, cdcd^{-2}c] = 1. \tag{2.2}$$

Továbbá, az $u_1 = d^4$, $u_2 = u_1^c$, $u_3 = u_1^{cd}$, $u_4 = u_1^{cdc}$, $u_5 = u_1^{cdcd}$, $u_6 = u_1^{cdcdc}$ jelölésekkel teljesül az $u_1u_2u_3u_4u_5u_6 = 1$ egyenlőség.

2.11. Lemma. *A 2.10 Lemma szerinti $G = \langle c, d \rangle$ csoportra teljesül:*

(#) *G-nek van egy 32 rendű elemi Abel-féle J normálosztója úgy, hogy $G/J \cong \mathsf{PGL}(2, 5)$ és J az $\mathbb{F}_2$-permutáció modulus modulo a centruma. Továbbá,*

$$[G, G]/[G, J] \cong \mathsf{SL}(2, 5)$$

és G felhasad $[G, G]J$ felett.

A fejezet hátralévő részében G az $(\#)$-nak eleget tevő csoportot fog jelölni. Világossá szeretnénk tenni, hogy a GAP [Gap] komputeralgebra rendszer segítségével megmutatható, hogy izomorfia erejéig a 2.10 Lemmában adott csoport az egyetlen ezzel a tulajdonsággal. Mindazonáltal reméljük, hogy a jövőben találunk majd egy általánosabb megközelítést, ami az idekapcsolódó fogalmak továbbfejlesztését is lehetővé teszi.

A G tulajdonságai közül kiemeljük, hogy $G' = [G, G]$ perfekt csoport. Igazából G'-t a GAP [Gap] komputeralgebra rendszerben található, a kis perfekt csoportokat tartalmazó könyvtár segítségével találtuk meg; G-t pedig G'-ből szemidirekt szorzatként állítottuk elő.

2.12. Tétel. *Legyen G a 2.11 Lemma (#)-t kielégítő csoport. Legyen J_0 G minimális normálosztója és $K = J_0 \cup c^G$. Definiáljuk a $H = N_G(P)$ részcsoportot, ahol P a G egy 5-Sylow részcsoportja. Ekkor (G, H, K) Bol-loop mappa, ami egy 96 rendű 2-exponensű egyszerű Bol-loopot határoz meg. Fordítva, ha (G, H^*, K^*) egy 2-exponensű egyszerű Bol-loop mappa, akkor H^* konjugált H-hoz és $K^* = K$.*

Mivel a 2.10 Lemmában adott csoport teljesíti (#)-ot, kapjuk, hogy:

2.13. Következmény. *Létezik egy 96 rendű 2-exponensű egyszerű Bol-loop.*

Ezen túlmenően tudunk konstruálni 2-exponensű véges egyszerű Bol-loopból egy végtelen osztályt. Az alapötlet a következő: Először a 96 rendű példánk szemidirekt szorzatait alkotjuk meg elemi Abel 2-csoportokkal. Legyen (G_1, H_1, K_1) egy ilyenhez tartozó Bol-loop mappa. Mivel G_1-nek nincs túl sok normálosztója, módosíthatjuk H_1-et egy H_1^* részcsoporttá, és K_1-et egy K_1^* részhalmazzá oly módon, hogy a $(G_1, H_1^*, K_1*^)$ hármas 2-exponensű egyszerű Bol-loop mappa.

Valójában ez a modifikáció nem szokatlan a 2-exponensű Bol-loopok körében. A [KN02, Section 5] és [Nag06, Theorem 5.5] cikkeinkben 2-exponensű Bol-loopok széles osztályait alkottuk meg, melyekhez ugyanaz a csoport tartozik, nevezetesen $C_2^n \wr C_2$ koszorúszorzat, illetve az $E^+_{2^{2n+1}}$ extraspeciális 2-csoport. Ezekben az esetekben az involuciók konjugáltsági osztályainak egy egyszerű paraméterezése lehetővé tette a társított loop leírását. Sajnos a G_1 csoportnak sok konjugáltsági osztálya van involúciókból, és ezeknek nincs elegáns algebrai paraméterezése. Ezért nem látjuk annak a lehetőségét, hogy osztályozni lehessen az összes G_1-hez tartozó 2-exponensű Bol-loopot.

Az utóbbi megjegyzés egy további észrevételre sarkall bennünket. Amíg a 2-exponensű véges egyszerű Bol-loopok osztálya láthatólag igen gazdag, a hozzátartozó G csoport struktúrája meglehetősen kötött. Azaz, míg a loopok osztályozása reménytelennek tűnik, azt gondoljuk, hogy az őket megjelenítő csoportok osztályozása és értelmes kutatási projekt lehet.

3 Többszörösen élesen tranzitív halmazok

Legyen Ω rögzített n-elemű halmaz. Az Ω permutációiból álló S halmazt n hosszúságú és d távolságú *permutáció kódnak* vagy *permutáció tömbnek* nevezzük, ha bármely $x, y \in S$ különböző elem *Hamming-távolsága* legalább d, ld. [FD77]. Elemi leszámolással adódik az $|S| \leq n(n-1)\cdots d$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha bármely különböző elemekből álló $(x_1, \ldots, x_{n-d+1})$, $(y_1, \ldots, y_{n-d+1})$ $(n-d+1)$-eshez létezik egy egyértelmű $s \in S$ elem, melyre $x_1^s = y_1, \ldots, x_{n-d+1}^s = y_{n-d+1}$. Ilyen permutáció halmazokat *élesen t-tranzitív halmaznak* mondunk, ahol $t = n-d+1$. Jól ismert tény, hogy az élesen 1- és 2-tranzitív halmazok megfelelnek a latin négyzetek, illetve a véges affin síkok osztályainak. (Ld. [Dem68].)

Általánosságban elmondható, hogy kevés eredmény ismert permutáció kódokra és nagy hézag tátong a méretükre vonatkozó alsó és felső becslések között; ld. [Tar99; Qui06]. Az ismert konstrukciók nagy része többszörösen tranzitív permutációcsoportokhoz kapcsolódik. Az 1970-es években P. Lorimer elkezdte a véges 2-tranzitív csoportokban fellelhető élesen 2-tranzitív halmazok szisztematikus kutatását. Ezt a programot Th. Grundhöfer, M. E. O'Nan és P. Müller folytatták, ld. a [GM09] cikket és a benne lévő hivatkozásokat. A 2-tranzitív permutációcsoportok némelyike igencsak gondosan kidolgozott karakterelméleti módszereket igényelt annak bizonyítására, hogy nem tartalmaznak élesen 2-tranzitív halmazt.

Ennek a fejezetnek az eredményei a [MN07; MN11; Nag10; Nag13] cikkekben kerültek publikálásra. A 3.1 alfejezet eredményeiből kapjuk a **3. Tézist.** A 3.8 Tétel a **4. Tézis** első felét támasztja alá, a tézis második fele a $\mathsf{GL}(n,p)$-beli élesen tranzitív halmazok és az $\mathsf{AGL}(n,p)$-beli élesen 2-tranzitív halmazok ekvivalenciájából következik.

3.1. Élesen tranzitív halmazok nemlézetéséről

Ebben az alfejezetben rögzített véges permutációcsoportokban mutatjuk ki élesen 1- és 2-tranzitív permutáció halmazok nem-lézetését. Ez az igen hatékony módszer egy egyszerű kombinatorikus lemmán alapszik.

Legyen $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ részcsoport és k pozitív egész szám. Jelölje $\Omega^{(k)}$ a különböző Ω-beli elemekből álló k-asok halmazát. Azt mondjuk, hogy G *k-tranzitíven* hat, ha $(x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k) \in \Omega^{(k)}$ k-asokra létezik $g \in G$ elem úgy, hogy

$$x_1^g = y_1, \cdots, x_k^g = y_k.$$

Ha a g elem egyértelmű, akkor *élesen k-tranzitív* hatásról beszélünk.

Hasonló módon vezethetjük be az *élesen k-tranzitív halmaz* fogalmát. Azt mondjuk, hogy a $S \subseteq \mathrm{Sym}(\Omega)$ permutáció halmaz élesen k-tranzitív, ha bármely $(x_1, \ldots, x_k)$, $(y_1, \ldots, y_k) \in \Omega^{(k)}$ esetén létezik egyértelmű $s \in S$ elem, melyre $x_1^s = y_1, \cdots, x_k^s = y_k$. Ha $k = 1$, akkor egyszerűen csak *élesen tranzitív halmazról* beszélünk. Az élesen tranzitív halmazok osztálya lényegében ekvivalens a kvázicsoportok osztályával, mivel a $(Q, \cdot)$ binér rendszer akkor és csak akkor kvázicsoport, ha a jobb oldali multiplikáció leképezések élesen tranzitív halmazt alkotnak Q-n. A véges élesen 2-tranzitív halmazok a véges affin síkok osztályának felelnek meg.

Ha S élesen t-tranzitív permutáció halmaz az Ω-n, akkor egyben élesen 1-tranzitív halmaz is az $\Omega^{(t)}$ halmazon. Más szóval, a t-tranzitív G permutációcsoport akkor és csak akkor tartalmaz élesen t-tranzitív halmazt, ha az $\Omega^{(t)}$-n indukált hatásában tartalmaz élesen 1-tranzitív halmazt.

Legyen G permutációcsoport az $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ halmazon és a $g \in G$ elemre jelölje $\pi(g)$ a megfelelő permutációmátrixot. Legyen J a csupa 1-esekből álló $n \times n$-es mátrix. A G-beli élesen tranzitív halmazok létezése ekvivalens azzal, hogy a

$$\sum_{g \in G} x_g \pi(g) = J \tag{3.1}$$

egyenletnek van nem-negatív egész megoldása az x_g $(g \in G)$ változókban.

Az alapvető észrevételünk az alábbi egyszerű lemma:

3.1. Lemma. *Legyen G a véges Ω halmazon ható permutációcsoport. Tegyük fel, hogy léteznek a $B, C \subseteq \Omega$ részhalmazok és a p prímszám oly módon, hogy $p \nmid |B|, |C|$ és $p \mid |B \cap C^g|$ minden $g \in G$ esetén. Ekkor G nem tartalmaz élesen tranzitív részhalmazt.*

Ezen lemmának több alkalmazását adjuk meg.

3.2. Tétel. *Legyenek n, m pozitív egészek, $n \geq 2$, $q = 2^m$. Legyenek $G_1 = \mathsf{PSp}(2n, q) \rtimes \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ és $G_2 = \mathsf{Sp}(2n, q) \rtimes \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ permutációcsoportok a természetes hatásukkal az $\Omega_1 = \mathsf{PG}(2n-1, q)$, illetve $\Omega_2 = \mathbb{F}_q^{2n} \setminus \{0\}$ halmazokon. Ekkor sem G_1, sem pedig G_2 nem tartalmaznak élesen tranzitív halmazokat.*

Hosszú időn keresztül nyitott kérdés volt, hogy az M_{22} Mathieu-csoport tartalmazhat-e élesen tranzitív halmazt, ld. [Gru83]. A következő tétel negatív választ ad erre, ami maga után vonja élesen 2-tranzitív halmazok nemlétezését az M_{23} Mathieu-csoportban. A bizonyításban a $\mathcal{W}_{23}$ Witt-dizájnt használjuk, ami egy $S(4, 7, 23)$ Steiner-rendszer. Ebben bármely két blokk 1, 3 vagy 7 pontban metszi egymást.

3.3. Tétel. *A 22 fokú természetes permutáció reprezentációjában, az M_{22} Mathieu-csoport nem tartalmaz élesen tranzitív halmazt.*

A módszerünket bizonyos alternáló csoportokra is alkalmazni tudjuk. A következő eredmény azért is meglepő, mert eleddig a szimmetrikus és az alternáló csoportok elérhetetlennek tűntek élesen 2-tranzitív halmazok létezése szempontjából.

3.4. Tétel. *Ha $n \equiv 2,3 \pmod 4$, akkor A_n nem tartalmaz élesen 2-tranzitív részhalmazt.*

Mind a 3.3 Tételből, mind pedig a 3.4 Tételből levezethető az élesen 2-tranzitív halmaz nem-létezése az M_{23} Mathieu-csoportban.

3.5. Következmény. *A 23 fokú természetes permutáció reprezentációjában, az M_{23} Mathieu-csoport nem tartalmaz élesen 2-tranzitív halmazt.*

Ezen eredményekből következik a Dembowski-probléma megoldása. A kérdés az, hogy mely csoportok állhatnak elő egy nem-Desargues-féle projektív sík projektivitáscsoportjaként. A kérdést lényegében már Grundhöfer [Gru88] megválaszolta, nyitva hagyva azt az esetet, amikor a sík rendje 23 és a projektivitáscsoport M_{24}. Ezt viszont a fenti eredmények kizárják.

3.6. Következmény. *Egy n rendű nem-Desargues-féle projektív sík projektivitáscsoportja tartalmazza az A_{n+1} alternáló csoportot.*

A lemmánk utolsó alkalmazásaként a Co_3 sporadikus egyszerű csoportot vizsgáljuk a 276 ponton ható 2-tranzitív hatásával. Ennek a pontstabilizátora a McL sporadikus csoport egy bővítése. A lemmánk segítségével tisztán kombinatorikus bizonyítást kapunk a nem-létezést kimondó Grundhöfer-Müller-tételre [GM09]; a tétel eredeti bizonyítása a Brauer-karakterek Atlaszát használta.

3.7. Tétel. *Legyen $G = McL : 2$ csoport a 275 ponton vett primitív permutáció hatásával. G nem tartalmaz élesen tranzitív halmazt. Következésképpen Co_3 nem tartalmaz élesen 2-tranzitív halmazt.*

3.2. Véges kvázitestek jobb oldali multiplikációcsoportjáról

Ebben az alfejezetben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy mely véges tranzitív lineáris csoport állhat elő egy véges kvázitest jobb oldali multiplikációcsoportjaként. Az derül ki, hogy jópár kivételes tranzitív lineáris csoport esetén ez megtörténik. Mivel ezek a kivételes példák viszonylag kicsik, számítógépes, kombinatorikai és geometriai érveléseket ötvözve teljesen leírhatjuk ezeket a kvázitesteket, illetve a hozzájuk tartozó transzlációsíkokat. A komputeres eredményeket a GAP4 [Gap] komputeralgebra rendszer és a CLIQUER [NÖ03] program segítségével értük el. Véges tranzitív lineáris csoportoknak van három végtelen osztálya is, ezeket elméleti módszerekkel vizsgáltuk.

Kvázitest jobb oldali multiplikációcsoportját nem vizsgálták különösebben intenzíven. A legfontosabb idevágó cikk M. J. Kallaheré [Kal87]. Ez olyan véges kvázitestekről tartalmaz információkat, melyek jobb oldali multiplikációcsoportja feloldható.

Végezetül megjegyezzük, hogy az eredményeink értelmezhetők a véges loopok nyelvén is. Egyrészről a kvázicsoportok multiplikatív rendszere loopot alkot. Másrészről bármely loop, melynek jobb oldali multiplikációcsoportja $\mathsf{GL}(n,q)$ része, egy véges kvázitestet eredményez, ahol a lineáris csoportot a nemnulla vektorokon vett permutáció hatásában tekintjük. Egy harmadik megfogalmazással, a véges kvázitestek osztálya lényegében ekvivalens a véges lineáris csoportokban előforduló élesen tranzitív halmazok osztályával.

Eredményeinket az alábbi tételben foglalhatjuk össze.

3.8. Tétel. *Legyen* $(Q, +, \cdot)$ *véges jobb oldali kvázitest, rendjét jelölje* p^d*, ahol* p *prím. Ekkor a* $G = \mathrm{RMlt}(Q^*)$ *csoportra az alábbi lehetőségek állnak fenn:*

1. $G \leq \mathsf{\Gamma L}(1, p^d)$ *és a hozzá tartozó transzlációsík az általánosított André-sík.*
2. $G \triangleright \mathsf{SL}(d/e, p^e)$*, ahol* $e < d$ *osztója* d*-nek.*
3. p *páratlan és* $G \triangleright \mathsf{Sp}(d/e, p^e)$*, ahol* e *osztója* d*-nek.*
4. $p^d \in \{5^2, 7^2, 11^2, 17^2, 23^2, 29^2, 59^2\}$ *és* G *a hét Zassenhaus-féle véges tranzitív lineáris csoport [Zas35] valamelyike. A hozzá tartozó transzlációsíkok Zassenhaus-féle közeltest síknak nevezik.*
5. $p^d \in \{5^2, 7^2, 11^2\}$ *és* G *feloldható kivételes véges tranzitív lineáris csoport. Ezen kvázicsoportok és a hozzájuk tartozó tranzitív lineáris csoportok leírását megadta M. J. Kallaher [Kal87].*
6. $p^d = 3^4, 19^2$ *vagy* 29^2 *és a megfelelő transzlációsíkok száma* 21, 3, *illetve* 8.
7. $p^d = 16$ *és* $G = A_7$*. A hozzájuk tartozó transzlációsíkok a Lorimer-Rahilly és a Johnson-Walker síkok.*

3.3. Véges féligtestek multiplikációcsoportjáról

Ebben az alfejezetben a következő problémát vizsgáljuk. Legyen G véges permutációcsoport a Q halmazon. Tudunk-e Q-n két változós loopműveletet értelmezni úgy, hogy a jobb és bal oldali multiplikációs leképezések által generált $\mathrm{Mlt}(Q)$ csoport része G-nek? Különösen érdekes számunkra az az eset, amikor G a projektív lineáris csoport. Ezen kérdés kapcsán a legáltalánosabb eredmények A. Vesanen [Ves95] és A. Drápal [Drá02] nevéhez fűződnek, akik megmutatták, hogy (a) ha $\mathrm{Mlt}(Q) \leq \mathsf{P\Gamma L}(2, q)$ ($q \geq 5$), akkor Q ciklikus csoport, valamint (b) a válasz negatív az alábbi csoportok esetén: $\mathsf{PSp}(2n, q)$ ($n \geq 2$), $\mathsf{PU}(n, q^2)$ ($n \geq 6$), $\mathsf{PO}(n, q)$ ($n \geq 7$ páratlan), és $\mathsf{PO}^\varepsilon(n, q)$ ($n \geq 7 - \varepsilon$ páros). Emlékeztetünk arra, hogy a felhasadó oktávok $\mathbb{O}(\mathbb{F}_q)$ egységei, modulo a centrum, egy olyan Q loopot alkotnak, melyre $\mathrm{Mlt}(Q) = \mathsf{P\Omega}^+(8, q)$.

[Cam03, Problem 398]-ban A. Drápal a fenti kérdést tette fel az alábbi megfogalmazásban: Adott $n \geq 3$ egész és q prímhatvány esetén létezik-e olyan normalizált latin négyzet, melynek sorai és oszlopai által generált G permutációcsoportra fennáll $\mathsf{PSL}(n, q) \leq G \leq \mathsf{P\Gamma L}(n, q)$? Mi igenlően megválaszoltuk a kérdést az $(n, q) \neq (3, 2)$ esetre. A konstrukciónk féligtestek multiplikációcsoportját használja és egyértelmű a következő értelemben. Legyen Q véges loop, melyre $\mathsf{PSL}(n, q) \leq \mathrm{Mlt}(Q) \leq \mathsf{PGL}(n, q)$. Ekkor létezik egy $\mathbb{S}$ féligtest $\mathbb{F}_q$ centrummal és n dimenzióval $\mathbb{F}_q$ felett úgy, hogy $Q \cong \mathbb{S}^*/Z(\mathbb{S}^*)$.

Megemlítjük, hogy [Ves13]-ben A. Vesanen tovább élesítette a 3.9 Tételt, amennyiben megmutatta, hogy $\mathsf{PSL}(n, q)$ akkor és csak akkor lesz loop multiplikációcsoportja, ha $n \geq 3$, $(n, q) \neq (3, 2)$ és $\gcd(n, q-1) = 1$.

A 3.9 Tétel támasztja alá az **5. Tézist.** A tétel első része igenlő választ ad a Drápal-féle problémára; a második rész az első részbeni megfordítása. A második rész bizonyításának alapötlete a [Ves95, Theorem S] bizonyításából jön.

3.9. Tétel. *(i) Bármely $n \geq 3$ egészhez és q prímhatványhoz, melyre $q^n > 8$, létezik egy Q loop úgy, hogy $\mathsf{PSL}(n, q) \leq \mathrm{Mlt}(Q) \leq \mathsf{PGL}(n, q)$.*

(ii) Legyen Q olyan loop, melyre az $n \geq 3$ egész számmal és q prímhatvánnyal teljesül $\mathrm{Mlt}(Q) \leq \mathsf{PGL}(n, q)$. Ekkor $Q \cong \mathbb{S}^*/Z(\mathbb{S}^*)$, ahol az $\mathbb{S}$ féligtest n-dimenziós az $\mathbb{F}_q$ centruma fölött.

4 Duális hálózatok projektív síkokban

A projektív síkon egy 3-*hálózat* három páronként diszjunkt egyenes osztályból áll úgy, hogy bármely két különböző osztálybeli egyenes metszéspontja pontosan egy egyenesre illeszkedik a harmadik osztályból. Ha az osztályok valamelyike véges n méretű, akkor a másik két osztály is n méretű és ezt az n számot a 3-hálózat *rendjének* hívjuk.

Az affin síkokkal, latin négyzetekkel, loopokkal és élesen tranzitív halmazokkal kapcsolatos kombinatorikai és algebrai kutatásokban a véges 3-hálózatoknak hosszú időre visszanyúló történetük van. Ebben a fejezetben olyan 3-hálózatokkal foglalkozunk, melyek az algebrailag zárt $\mathbb{K}$ test feletti projektív síkba vannak ágyazva, és amiket csoporttal lehet koordinátázni. Ilyen 3-hálózat, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ egyenesosztályokkal és $G = (G, \cdot)$ koordináta csoporttal ekvivalens módon megadható G-ből $\mathcal{A}$-ba, $\mathcal{B}$-be és $\mathcal{C}$-be menő (α, β, γ) bijekció hármassal,

$$\alpha : G \to \mathcal{A}, \quad \beta : G \to \mathcal{B}, \quad \gamma : G \to \mathcal{C},$$

ahol $a \cdot b = c$ akkor és csak akkor teljesül, ha az $\alpha(a), \beta(b), \gamma(c)$ egyenesek egy ponton mennek át $\mathsf{PG}(2, \mathbb{K})$-ban, tetszőleges $a, b, c \in G$ esetén. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a 3-hálózat *realizálja* a G csoportot. Az utóbbi években csoportot realizáló komplex síkbeli véges 3-hálózatokat más, algebrai geometriai megközelítésben (komplex egyenes-konfigurációk és rezonanciaelmélet) is intenzíven vizsgáltak, ld. [Yuz09]-t és a benne található hivatkozásokat.

Mi kombinatorikai módszerekkel vizsgáljuk a csoportokat realizáló véges 3-hálózatokat. Mivel az olyan kulcsfontosságú példák, mint az algebrai vagy a tetraéder típusú 3-hálózat, a $\mathsf{PG}(2, \mathbb{K})$ duális síkjában fordul elő természetes módon, ezért indokolt a 3-hálózat duális fogalmával dolgozni.

Ezen fejezet eredményeit a [KNP13b] cikkben publikáltuk. Az alacsony rendű duális 3-hálózatok osztályozásával kapcsolatos részletek a [NP13] cikkben találhatóak. Magasabb k-ra vonatkozóan, a k-hálózatok projektív síkba való beágyazásainak tanulmányozását a [KNP13a]-ben folytattuk. 4.1 Tétel támasztja alá a **6. Tézist.**

Formálisan, egy n rendű *duális* 3-*hálózat* a $\mathsf{PG}(2, \mathbb{K})$ síkban nem más, mint egy $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ hármas, ahol a $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ *komponensek* páronként diszjunkt n elemű ponthalmazok azzal a tulajdonsággal, hogy bármely egyenes, ami két különböző ponthalmazt metsz, pontosan egy pontban metszi a harmadikat. A csoportot realizáló $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ duális 3-hálózatot *algebrainak* nevezzük, ha pontjait egy harmadfokú síkgörbe tartalmazza. Ugyanezt *tetraéder típusúnak* mondjuk, ha a komponenseit egy négyszög hat oldala (átlója) tartalmazza olyan módon, hogy $\Lambda_i = \Delta_i \cup \Gamma_i$, ahol Δ_i és Γ_i szemközti oldalakon van ($i = 1, 2, 3$).

4.1. Tétel. *Legyen $\mathbb{K}$ algebrailag zárt test $p \geq 0$ karakterisztikával. Legyen $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ duális 3-hálózat $\mathsf{PG}(2, \mathbb{K})$-ben, ami az n rendű G csoportot realizálja. Ha $p = 0$ vagy $p > n$, akkor az alábbiak valamelyike teljesül:*

(I) *G ciklikus vagy két ciklikus csoport direkt szorzata, a $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ pedig algebrai.*

(II) *G diédercsoport és $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ tetraéder típusú.*

(III) *G a 8 rendű kvaterniócsoport.*

(IV) *G rendje 12 és izomorf Alt_4-el.*

(V) *G rendje 24 és izomorf Sym_4-el.*

(VI) *G rendje 60 és izomorf Alt_5-el.*

Számítógépes kimerítő keresés módszerével megmutattuk [NP13]-ban, hogy ha $p = 0$, akkor (IV) nem (és így (V), (VI) sem) fordulhat elő.

A 4.1 Tétel azt mutatja, hogy bármely realizálható csoportnak van $\mathsf{PG}(2, \mathbb{K})$-n hatása mint projektív lineáris kollineációcsoport. Ez pozitív választ ad Yuzvinsky sejtésére a $p = 0$ esetben. A 4.1 Tétel bizonyítása felhasználja Yuzvinsky [Yuz09], Urzúa [Urz10], valamint Blokhuis, Korchmáros és Mazzocca [BKM11] korábbi eredményeit.

Hivatkozások

[Asc05] M. Aschbacher. “On Bol loops of exponent 2”. In: *Journal of Algebra* 288.1 (2005), 99–136.

[AKP06] M. Aschbacher, M. K. Kinyon, and J. D. Phillips. “Finite Bruck loops”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 358.7 (2006), 3061–3075.

[Bau12] B. Baumeister. “Do finite Bruck loops behave like groups?” In: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 53.3 (2012), 337–346.

[BS11] B. Baumeister and A. Stein. “The finite Bruck loops”. In: *Journal of Algebra* 330 (2011), 206–220.

[BSS11] B. Baumeister, G. Stroth, and A. Stein. “On Bruck loops of 2-power exponent”. In: *Journal of Algebra* 327.1 (Feb. 2011), pp. 316–336.

[BS10] B. Baumeister and A. Stein. “Self-invariant 1-factorizations of complete graphs and finite Bol loops of exponent 2”. In: *Beiträge zur Algebra und Geometrie. Contributions to Algebra and Geometry* 51.1 (2010), 117–135.

[BKM11] A. Blokhuis, G. Korchmáros, and F. Mazzocca. “On the structure of 3-nets embedded in a projective plane”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 118.4 (May 2011), pp. 1228–1238.

[Bur78] R. P. Burn. “Finite Bol loops”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 84.3 (1978), 377–385.

[Cam03] P. J. Cameron. “Research problems from the 18th British Combinatorial Conference”. In: *Discrete Mathematics* 266.1-3 (2003). The 18th British Combinatorial Conference (Brighton, 2001), 441–451.

[Dem68] P. Dembowski. *Finite geometries*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44. Berlin: Springer-Verlag, 1968.

[Drá02] A. Drápal. “Multiplication groups of loops and projective semilinear transformations in dimension two”. In: *Journal of Algebra* 251.1 (2002), 256–278.

[FKP06] T. Foguel, M. K. Kinyon, and J. D. Phillips. “On twisted subgroups and Bol loops of odd order”. In: *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* 36.1 (2006), 183–212.

[FD77] P. Frankl and M. Deza. “On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance”. In: *Journal of Combinatorial Theory. Series A* 22.3 (1977), 352–360.

[Gap] *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*. The GAP Group. 2008.

[Giu06] M. Giudici. “Factorisations of sporadic simple groups”. In: *Journal of Algebra* 304.1 (2006), 311–323.

[Gru83] T. Grundhöfer. “Projektivitätengruppen von Translationsebenen”. In: *Results in Mathematics. Resultate der Mathematik* 6.2 (1983), 163–182.

[Gru88] T. Grundhöfer. “The groups of projectivities of finite projective and affine planes”. In: *Ars Combinatoria* 25.A (1988). Eleventh British Combinatorial Conference (London, 1987), 269–275.

[GM09] T. Grundhöfer and P. Müller. “Sharply 2-transitive sets of permutations and groups of affine projectivities”. In: *Beiträge zur Algebra und Geometrie. Contributions to Algebra and Geometry* 50.1 (2009), 143–154.

[Hei96] S. Heiss. “Invariant 1-factorization of complete graphs”. Unpublished manuscript. 1996.

[JS10] K. W. Johnson and J. D. H. Smith. “On the smallest simple, unipotent Bol loop”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 117.6 (Aug. 2010), pp. 790–798.

[Kal87] M. J. Kallaher. “The multiplicative groups of quasifields”. In: *Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques* 39.4 (1987), 784–793.

[Kie02] H. Kiechle. *Theory of K-loops*. Vol. 1778. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

[KK04] H. Kiechle and M. K. Kinyon. “Infinite simple Bol loops”. In: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 45.2 (2004), 275–278.

[KK95] E. Kolb and A. Kreuzer. “Geometry of kinematic K-loops”. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 65 (1995), 189–197.

[LPS00] M. W. Liebeck, C. E. Praeger, and J. Saxl. “Transitive subgroups of primitive permutation groups”. In: *Journal of Algebra* 234.2 (2000). Special issue in honor of Helmut Wielandt, 291–361.

[Moo07] G. E. Moorhouse. *Bol loops of small order*. 2007. URL: http://www.uwyo.edu/moorhouse/pub/bol/.

[NÖ03] S. Niskanen and P. R. J. Östergård. *Cliquer User's Guide: Version 1.0*. Helsinki University of Technology, 2003.

[Qui06] J. Quistorff. “A survey on packing and covering problems in the Hamming permutation space”. In: *Electronic Journal of Combinatorics* 13.1 (2006), Article 1, 13 pp. (electronic).

[Tar99] H. Tarnanen. “Upper bounds on permutation codes via linear programming”. In: *European Journal of Combinatorics* 20.1 (1999), 101–114.

[Urz10] G. Urzúa. “On line arrangements with applications to 3-nets”. In: *Advances in Geometry* 10.2 (2010), 287–310.

[Ves95] A. Vesanen. “Finite classical groups and multiplication groups of loops”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 117.3 (1995), 425–429.

[Ves13] A. Vesanen. “On the group $PSL(n, q)$ as the multiplication group of a loop”. In: *European Journal of Combinatorics* 34.7 (2013), 1078–1080.

[Yuz09] S. Yuzvinsky. "A new bound on the number of special fibers in a pencil of curves". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 137.5 (2009), 1641–1648.

[Zas35] H. Zassenhaus. "Über endliche Fastkörper". In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 11.1 (1935), 187–220.

Nagy Gábor publikációi

[GN11] A. Grishkov and G. P. Nagy. "Algebraic Bol loops". In: *Forum Mathematicum* 23.3 (2011), 655–668.

[KN02] H. Kiechle and G. P. Nagy. "On the extension of involutorial Bol loops". In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 72 (2002), 235–250.

[KNP13a] G. Korchmáros, G. P. Nagy, and N. Pace. *k-nets embedded in a projective plane over a field*. 2013. eprint: `arXiv:1306.5779`.

[KNP13b] G. Korchmáros, G. P. Nagy, and N. Pace. "3-Nets realizing a group in a projective plane". In: *Journal of Algebraic Combinatorics* (2013), pp. 1–28.

[MN07] P. Müller and G. P. Nagy. "A note on the group of projectivities of finite projective planes". In: *Innovations in Incidence Geometry* 6/7 (Aug. 2007), 291–294.

[MN11] P. Müller and G. P. Nagy. "On the non-existence of sharply transitive sets of permutations in certain finite permutation groups". In: *Advances in Mathematics of Communications* 5.2 (2011), 303–308.

[NP13] G. P. Nagy and N. Pace. "On small 3-nets embedded in a projective plane over a field". In: *Journal of Combinatorial Theory. Series A* 120.7 (2013), 1632–1641.

[Nag98] G. P. Nagy. "Solvability of universal Bol 2-loops". In: *Communications in Algebra* 26.2 (1998), 549–555.

[Nag06] G. P. Nagy. "On the structure and number of small Frattini Bol 2-loops". In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 141.3 (2006), 409–419.

[Nag08a] G. P. Nagy. "A class of simple proper Bol loops". In: *Manuscripta Mathematica* 127.1 (2008), 81–88.

[Nag08b] G. P. Nagy. "Some remarks on simple Bol loops". In: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 49.2 (2008), 259–270.

[Nag09] G. P. Nagy. "A class of finite simple Bol loops of exponent 2". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 361.10 (2009), 5331–5343.

[Nag10] G. P. Nagy. "On the multiplication groups of semifields". In: *European Journal of Combinatorics* 31.1 (2010), 18–24.

[Nag13] G. P. Nagy. "Linear groups as right multiplication groups of quasifields". In: *Designs, Codes and Cryptography* (2013), pp. 1–12.