BÍRÁLAT
NAGY GÁBOR REPRESENTATIONS OF LOOPS IN GROUPS AND PROJECTIVE PLANES

CÍMŰ AKADÉMIAI DOKTORI ÉRTEKEZÉSÉRŐL.

Ha a csoportaxiómák közül elhagyjuk az egységelem (és az inverz) létezését, akkor félcsoportot, ha pedig az asszociativitást, akkor *loop*-ot kapunk. Magyarországon a csoport- és félcsoportelméletnek számos nemzetközileg elismert kutatója, tudósa van, a *loop*-elméletnek kettő: Csörgő Piroska és a jelölt, Nagy Gábor.

Nagy Gábor doktori disszertációja a *loop*-elmélet témakörében íródott és a *loop*-okat különböző irányokból közelíti meg. *Loop*-okról a legtöbbünk valószínűleg csak axióma-szinten hallott eddig, pedig ezek a struktúrák szerepet játszanak az algebrában, a kombinatorikában és a geometriában is. Szisztematikusabb vizsgálatukat azonban sokáig elnyomta a csoportelmélet. Nagy Gábor lényegében a kezdetektől részt vesz a *loop*-elméleti vizsgálatokban.

A dolgozat 4 fejezetre és 10(!) alfejezetre tagolódik. Több, mint 11 nemzetközi folyóiratban megjelent cikket dolgoz fel, foglal össze a *loop*-elmélet égisze alatt. Az első és a második alfejezet – az elvárásoknak megfelelően – rövid beveztő a *loop*-ok világába és a szakirodalomba. A 3, 4, 5, 6, 8, 9. fejezetek a *loop*-ok struktúra-tételeihez kapcsolódnak, különböző *loop*-osztályok karakterizációit, példákat, ellenpéldákat tartalmaznak. A 7. és 10. fejezetek kilógnak ebből a sorból.

A 7. fejezet egy kevéssé ideillő – bár érdekes – témáról, élesen tranzitív permutációcsoprtokról szól. A *loop* szó egyedül a 7.10-es tétel bizonyításában szerepel:

7.10. Tétel. Egy n-edrendű nem-desaurgesi projektív sík projektivitásainak csoportja tartalmazza az A_{n+1} alternáló csoportot.

A tétel Dembowski egy 1968-ban megjelent véges geometriákról szóló sejtésének az igazolása. A bizonyítás meghivatkozza az [MN07] cikk egy háromsoros lemmájának a bizonyítását, ami kényelmesen elfért volna a 138 oldalon.

A doktori disszertáció sava-borsa mindenképpen a különböző feltételeknek eleget tevő egyszerű *loop*-ok létezésének igazolása, sőt konstrukciója. Egy *loop*-ot egyszerűnek nevezünk, ha nincs valódi homomorf képe. Szerencsére, szemben a félcsoportokkal, a *loop*-ok kongruencia-uniformok, ahogy a csoportok is, és az egységelem osztálya meghatározza a kongruenciát. Mindemellet pikáns dolgok történhetnek a *loop*-ok között. Míg csoportoknál a 2-exponensű csoportok mind Abel-félék, a 2-hatványrendű csoportokról mind tudjuk, hogy feloldhatóak, itt ez a kérdés sokáig várt megválaszolásra. Michael Aschbacher – végezvén az egyszerű csoportok karakterizálásával – nekiállt az egyszerű *loop*-ok osztályozásának (is). Egy 2003-as cikkében Aschbacher meghirdeti a 2-exponensű *loop*-ok feloldhatóságának bizonyítását, és egy bizonyos határig el is jut. A cikk tételek és bizonyítások tömény magyarázat nélküli sora, ami végül eljut egy pontig, hogy ha lenne egy egyszerű 2-exponensű *loop*, akkor annak milyen szokatlan feltétleket kéne teljesítenie. Például, az elemszáma nem lehet 2-hatvány. Nagy Gábor a 4. alfejeztben – minden várakozással szemben – elkészít egy 96-elemű egyszerű 2-exponesű *loop*-ot. Ezt a korszakaltó eredményt egy általános konstrukcióval tetézi meg, amely 2-exponensű egyszerű *loop*-ok egy végtelen sorozatát állítja elő.

A fenti eredmény, mint a legtöbb *loop*-leírás az úgynevezett *loop*-mappákon alapul. Még Baer fedezte fel 1939-ben, hogy minden *loop* előáll mint egy csoport H részcsoportjának egy speciális tulajdonságokkal rendelkező K reprzentánsrendszere, egy viszonylag természetes szorzással. Ha ez a K halmaz zárt az inverzképzésre és $x, y \in K$ esetén $xyx \in K$ akkor (és csak akkor) a *loop* kielégíti az $((ax)y)x = a((xy)x)$ azonosságot. Ezeket a *loop*-okat hívjuk Bol-*loop*-oknak. A Bol-*loop*-ok egy részosztálya a Moufang-*loop*-ok. Ez utóbbiak könnyű kezelhetőségük miatt nagy népszerűségnek örvendtek, és az egyik alapkérdés az volt, hogy a két osztály egyszerű algebrái megegyeznek-e. Nagy Gábor dolgozatának legmélyebb eredménye az, hogy amennyiben a K reprezentánsrendszer egy kiegészítő részcsoportja H-nak, azaz $HK = G$ és $H \cap K = 1$, akkor egészen kézenfekvő feltevések mellett az így kapott *loop* egy egyszerű Bol-*loop*, amelyik nem Moufang-*loop*. Utána a jelölt a tétel alkalmazásaként számos konkrét példát is ad egyszerű és egyszerű csoportokhoz közel álló csoportok segítségével ilyen *loop*-okra. A dolgozatban az idevágó bizonyítások annyira szépen és folyamtatosan követhetőek, mintha egy bevezető jegyzetben olvasnánk az elmélet alapjait.

Kevésbé mondható ez el a tézisekről. A tézisek magyar nyelven íródtak, ám inkább csak a benne lévő szavak magyarok. A mondatszerkezetek legtöbbször magyartalanok, a mondatok közti kapcsolat nehezen követhető. Van, amikor a mondat alanya és állítmánya közti egyeztetés is hiányzik, nehéz feladatot adva ezzel az olvasónak. Az embernek az az érzése támad, hogy ezeket a mondatokat sebtében válogatták össze és fordították angolról. A névelők hiánya és a ragok betűhibái csak tetézik ezt az érzést.

Az 5. alfejezet továbbra is az egyszerű Bol-*loop*-okról szól, három rájuk vonatkozó kérdést válaszol meg. Mindhárom kérdés *loop*-elmélészektől származik. A harmadik kérdés a következő: van-e olyan egyszerű, nem-asszociatív Bol-*loop*, amely automorfizmuscsoportja tranzitív. A kérdés megválaszolásához a szerző Cameron és Korchmáros két kombinatorikus ízű, az élesen 2-tranzitív csoportok leírását is használó eredményét használja. A kérdés megválaszolása nehezen képzelhető el mély csoportelméleti tudás nélkül, itt egy lehető legegyszerűbbnek tűnő algebrai-gráfelméleti tételt használ a szerző. Nem ez az egyetlen olyan része a dolgozatnak, ahol a jelölt számot ad szélesebb, kitekintő jellegű tudásáról is.

Hasonló átekintő tudásról adnak számot a 8. és 9. fejezetek, ahol bár csoportelméleti eszköztárral dolgozik a szerző, ezt geometriai indíttatással és erős számítógépes támogatással teszi. Ha csak az algebrai megfogalmazását nézzük az eredményeknek, akkor a majdnem-testek és félig-testek multiplikatív struktúráinak automorfizmus csoportjait határozza meg. Ezek a csoportok szoros kapcsolatban állnak a transzlációs síkokkal is: ezek épp egy háromszög stabilizátorai a sík automorfizmuscsoportjában. A véges sok esetre való redukálás után a jelölt nem rest, és számítógépes programcsomagok segítségével, sőt a GAP programcsomag önálló fejlesztésével ellenőrzi a hátralévő eseteket. A két fejezet fő eredménye közül természetesen frappánsabb a félig-testekről szóló tétel: 8-nál nagyobb prímhtaványok esetén a félig-testek multiplikációs csoportjai épp a speciális és általános lineáris csoportok közé eső csoportok.

Ezen a ponton úgy érzi az ember, hogy egy teljes mű végére ért, és a méltatások mennyisége és minősége is mefelel egy kiváló munkáénak. Ránézve az oldalszámra pont a 100. oldalon tartunk. Ez épp az osztály által javasolt maximum körüli érték.

Itt kezdődik a 10. fejezet, amely úgynevezett 3-hálózatokról szól. Ezek a hálózatok többféle kombinatorikus jelentéssel bírnak. A lemmák és állítások hosszas sorozata végül egy kompakt eredményben áll össze: Egy algebrailag zárt test fölötti 3-hálózat mindig megadható egy csoport segítségével. A fejezet főtétele ezen csoportokat osztályozza. Megmutatja, hogy két végtelen sorozat mellet 4 kivételes ilyen csoport van.

A fentiek alapján a szakértőknek nyilvánvaló, a laikusoknak kicsit magyarázni kell, miért értékes ez a munka, miért viszi tovább az elméletet, a tudományt. A *loop*-ok természetes módon felmerülő kísérőstuktúrái számos más obejktumnak, mint geometriák, kombinatorikus- és algebrai stuktúrák. Ezért a *loop*-ok önálló elmélete elősegíti a máshonnan felbukkanó egyedi példák osztályozását, tulajdonságainak feltérképezését. A tágyalt dolgozat a *loop*-ok elméletét fejleszti. Egy ilyen elméletben az egyik legnehezebb és kezdetekben legfontosabb dolog a vezérelvek megtalálása, és ezen belül a vezérelvekhez tartozó példák keresése – nemlétezésének igazolása. Ez a dolgozat fő erőssége.

A disszertáció értékes munka, a doktori mű megfelel az MTA Matematikai Tudományok Osztálya követelményrendszerének. A dolgozat csupa új eredményt tartalmaz. A doktori mű nyilvános vitára alkalmas.

A jelölthöz egy kérdést fogalmazok meg: A hallgatóság nem hallhatta, hogy a véleményemben a *loop* szó végig dőlt betűvel van szedve. Ennek az az oka, hogy ez a szó nem áll a számra: nem magyar, és még nincs magyar megfelelője. Ahogy Bessenyei György Magyarság című röpirata óta mindenki számára nyilvánvaló kell, hogy legyen: „Minden nemzet a maga nyelvén lett tudós, de idegenen sohasem." Milyen magyar szavakat, kifejezéseket javasolna Nagy Gábor a dolgozatában és a *loop*-elméletben előjövő, de magyarul még nem létező kifejezésekre, mint például: loop, commutator-associator, automorph-inverse identity, folder, envelope, translation plane, isotopy, parastrophy — catastrophy?

2015. február 6. Szabó Csaba