

# VÁLASZ CSÖRGŐ PIROSKA BÍRÁLATÁRA

NAGY GÁBOR PÉTER

Mindenekelőtt szeretném megköszönni a bírálónak a disszertációmmal kapcsolatos alapos munkáját és fáradozásait. A kritikai megjegyzésekért is hálás vagyok, azokat elfogadom. A bíráló a következő kérdést fogalmazta meg.

*A 2-exponensű véges egyszerű Bol-loopokkal kapcsolatosan a jelölt említi, hogy a hozzájuk tartozó jobb oldali multiplikációcsoport osztályozása reménytelibbnek tűnik a loopok osztályozásánál. Mit gondol a teljes multiplikációcsoport vizsgálatáról, majd az osztályozásáról.*

Először röviden utalnék arra, hogy a jobb oldali multiplikációcsoport struktúrája Baumeister, Stroth és Stein munkái (J. Algebra 330 (2011), 206–220 és J. Algebra 327 (2011), 316–336.) alapján egész általánosan ki van fejtve. Azt tudjuk ugyanis, hogy tetszőleges véges 2-hatvány exponensű Bruck-loop esetén a jobb oldali multiplikációcsoport egyszerű kompozíciófaktorai vagy 2-rendűek, vagy pedig  $PSL_2(q)$ , ahol  $q = 9$  vagy  $q$  Fermat-prím. Tehát a minimális 2-exponensű Bol-loopokra vonatkozó Aschbacher-tétel jóval általánosabban is teljesül. Amit még nem tudunk, hogy a  $C_2$  és a  $PSL(2, 5) \cong A_5$  eseteken kívül előfordul-e más egyszerű kompozíciófaktor. Jómagam, és tudomásom szerint A. Stein is kiterjedt számítógépes kereséseket végeztünk olyan csoportokra vonatkozólag, melyek a  $PSL(2, 9) \cong A_6$  csoport bővítései véges 2-csoportokkal, de nem sikerült megfelelő egyszerű Bol-loopot konstruálni. Ennek ellenére a magam részéről nem mernék sejtést megfogalmazni a nem-létezésüket illetően.

A kérdés érdemi része az egyszerű Bol-loopok teljes (kétoldali) multiplikációcsoportjára vonatkozik. Erről sajnos nagyon keveset tudunk. A helyzet az, hogy a Baer és Aschbacher nevéhez fűződő eszköz, a Bol-mappa, amivel hatékonyan tudjuk kezelni a valódi (azaz nem Moufang-féle) Bol-loopok osztályát, nem alkalmas a teljes multiplikációcsoport vizsgálatára. A számítógépes kísérletek azt mutatják, hogy pár ezres nagyságrendig **az ismert valódi egyszerű Bol-loopok multiplikációcsoportja tartalmazza a teljes alternáló csoportot.**

Azt, hogy a kérdés mennyire természetes, mutatja az a tény, hogy a 2009-es denveri *2nd Mile High Conference on Nonassociative Mathematics* konferencián Kenneth Johnson és Jonathan Smith lényeges nyílt kérdésként tette fel a következőt:

*Létezik-e véges egyszerű nemasszociatív Bol-loop nemtriviális konjugált osztállyal?*

Kvázikcsoport konjugált osztálya alatt a belső leképezések csoportjának pályáit értjük. Tehát a Johnson-Smith kérdést átfogalmazhatjuk úgy, hogy létezik-e véges egyszerű nemasszociatív Bol-loop, melynek multiplikációcsoportja nem 2-tranzitív. Még ez a kérdés is nyitott a mai napig, és ebben az esetben sem vállalkoznék sejtés megfogalmazására.

Szeged, 2015. május 8.

Nagy Gábor Péter