VÁLASZ KÁROLYI GYULA BÍRÁLATÁRA

Nagy Gábor Péter

Mindenekelőtt szeretném megköszönni a bírálónak a disszertációmmal kapcsolatos alapos munkáját és fáradozásait. A kritikai megjegyzésekért is hálás vagyok, azokat elfogadom. Az értekezés terjedelmének kérdését más bíráló is szóvá tette. Mivel az MTA szabályzataiban semmilyen támpontot nem találtam az ideális terjedelemre vonatkozólag, ezért munkám tartalmi kereteit az eredmények alapos bemutatása szabta meg.

A *Bol envelop* definíciójának hiányát a bíráló joggal tette szóvá. A *loop envelop* (loop burkoló) fogalma M. Aschbacher szóhasználatában a Q loopot meghatározó azon speciális (G, H, K) loop-mappát jelöli, ahol K a jobb oldali $R_a : x \mapsto xa$ szorzatleképezések halmaza, $G = \langle K \rangle$ és H a loop egységelemének stabilizátora G-ben.

A bíráló által feltett kérdésekre az alábbi válaszokat adom.

1) Kérném a jelöltet, hogy részletesebben fejtse ki az [Asc05] cikkben megfogalmazott kérdések és a 4. fejezetben foglalt eredmények pontos kapcsolatát. (Az [AKP06] cikkben számozott kérdést nem találtam.)

Az [Asc05] cikkben az alábbi 4 kérdést fogalmazza meg M. Aschbacher.

1. kérdés: Feloldhatóak-e a páratlan rendű Bol-loopok?

Erre a kérdésre a 3. fejezet 3.15 példája ad nemleges választ, ami egy $1053 = 3^4 \cdot 13$ rendű egyszerű Bol-loopot konstruál meg. Ebből még az is következik, hogy a $p^a q^b$-rendű Bol-loopok is lehetnek egyszerűek.

2. kérdés: Igaz-e, hogy a Bol-loopok kompozíciófaktorai akkor és csak akkor csoportok, ha a loop izotóp egy A_r-loophoz?

A konkrét definíció kifejtése előtt megjegyzem, hogy az A_r-loopok osztálya tartalmazza a 2-exponensű Bol-loopok osztályát, annál jóval bővebb. Az általánosítás az absztrakt loopok elmélete szempontjából kissé erőltetettnek tűnhet, csoportelméleti szempontból viszont nagyon természetes.

Legyen Q loop és legyen (G, H, K) a Q burkolója a fenti definíció értelmében, azaz K a jobb oldali szorzatleképezések halmaza, $G = \langle K \rangle$ és H a loop egységelemének stabilizátora G-ben. Azt mondjuk, hogy Q *A_r-loop,* ha $K^h = K$ minden $h \in H$ esetén. 2-exponensű Bol-loopnál ennél több, $K^g = K$ teljesül minden $g \in G$ esetén.

Az értekezésem 4. fejezetében konstruált véges egyszerű 2-exponensű Bol-loopok egyrészt maguk A_r-loopok, másrészt a kompozíciófaktoruk nem csoport. Ebből adódóan a 2. kérdésre a válasz szintén nemleges.

3. kérdés: Igaz-e, hogy minden Bol-loop burkolócsoportja 2-csoport?

Itt burkolócsoport alatt Aschbacher megint a jobb oldali multiplikációcsoportot érti. Az értekezésem 4. fejezetében megadott véges egyszerű 2-exponensű Bol-loopok burkolócsoportjainak kompozíciófaktorai között megtalálható $\mathrm{PSL}(2,5) \cong A_5$, tehát a burkolócsoportok nem 2-csoportok. A kérdésre a válasz: nem.

4. kérdés: Léteznek-e nem Moufang-féle véges egyszerű Bol-loopok?

A válasz: igen. Az értekezésem 4. fejezetében megadott véges egyszerű 2-exponensű Bol-loopok ilyenek, valamint a 3. fejezetben is számos példát adok nem Moufang-féle véges egyszerű Bol-loopokra.

Aschbacher, Kinyon és Phillips [AKP06] cikkében csakugyan nincs számozott kérdés, csak a cikk absztraktjában van egy ilyen megfogalmazva. Mielőtt idézném az absztraktot, megjegyzem, hogy az $x \in Q$ elemet *2-elemnek* nevezzük, ha rendje 2-hatvány, és a Q loopot 2-loopnak mondjuk, ha a rendje 2-hatvány. Az absztraktban szereplő angol mondat („We identify the minimal obstructions to the conjecture that all finite 2-element Bruck loops are 2-loops, leaving open the question of whether such obstructions actually exist.") jelentése a következő:

„Azonosítjuk annak a sejtésnek a minimális obstrukcióit, mely szerint minden 2-hatvány rendű elemekből álló véges Bruck-loop rendje 2-hatvány, nyitva hagyván az ilyen obstrukciók tényleges létezésének kérdését."

Ezt a nyitva hagyott kérdést válaszolják meg az értekezés 4. fejezetében megkonstruált véges egyszerű 2-exponensű Bol-loopok. Ezekben egyrészt minden elem 2 rendű, de a loopok rendje 96 többszöröse, azaz nem 2-hatvány.

2) A 7.6 Tétel szerint, ha az n szám 2 vagy 3 maradékot ad 4-gyel osztva, akkor az A_n alternáló csoport nem tartalmaz élesen 2-tranzitív részhalmazt. Ha $n = 4$, akkor persze maga a teljes csoport ilyen. Mit lehet tudni a fennmaradó esetekről?

Először emlékeztetek rá, hogy az n-fokú permutációkból álló élesen 2-tranzitív halmazok osztálya lényegében ekvivalens az n rendű projektív síkok osztályával. Ez azt jelenti, hogy a mai napig csak prímhatvány n esetén tudunk n fokú permutációkból álló élesen 2-tranzitív halmazt konstruálni. A klasszikus esetet, a q elemű testre épített $\mathrm{PG}(2,q)$ Galois-síkot az élesen 2-tranzitív $\mathrm{AGL}(1,q)$ affin lineáris csoport adja meg.

Ha az n szám osztható 4-el, azaz ha $n = 2^m$, $m \geq 2$, akkor $\mathrm{AGL}(1,2^m)$ élesen 2-tranzitív csoport része A_n-nek. Csakugyan, ha az $x \in \mathrm{AGL}(1,2^m)$ elemnek van fixpontja, akkor rendje osztja $\mathbb{F}_{2^m}$ multiplikatív csoportjának rendjét, tehát páratlan. Ekkor x páratlan hosszú ciklusokból áll, tehát páros permutáció. Ha pedig az x elem fixpontmentes, akkor rendje 2, és 2^{m-1} darab transzpozícióból áll, tehát szintén páros permutáció.

Ha az n szám 1 maradékot ad 4-el osztva, akkor $\mathrm{AGL}(1,n)$ nem részcsoportja A_n-nek. Ugyanis a 0 stabilizátora az n elemű test multiplikatív részcsoportja, ami ciklikus, így $\mathrm{AGL}(1,n)$ tartalmaz egyetlen $n-1$ hosszú ciklusból álló permutációt, ami páratlan. Ez azt jelenti, hogy egy A_n-beli élesen 2-tranzitív halmaz szükségképpen nem Desargues-féle projektív síkot határoz meg.

Most két esetet különböztethetünk meg. Ha $n = p^{2m}$ négyzetszám, akkor a Marshall Hall Jr. nevéhez fűződő kvázitest konstrukció paraméterei választhatók úgy, hogy a megfelelő élesen 2-tranzitív halmaz elemei páros permutációk legyenek. A [Hughes, Piper; Projective Planes, Springer, 1973] monográfia IX.2 fejezetének jelöléseit használva definláljuk az $\mathbb{F}_{p^m}$ feletti $f(s) = s^2 - as - b$ polinom együtthatóit, mint

$$a = \frac{\varepsilon + 1}{2}, \qquad b = -\left(\frac{\varepsilon - 1}{4}\right)^2,$$

ahol $\varepsilon \in \mathbb{F}_{p^m}$ nem négyzet. Ekkor f diszkriminánsa ε, azaz f irreducibilis. Definíció szerint a Hall-féle kvázitestben az $x + \lambda y$ illetve x elemhez tartozó (bal oldali) szorzatleképezés mátrixa

$$L_{x+\lambda y} = \begin{pmatrix} x & -y^{-1}f(x) \\ y & -x + a \end{pmatrix}, \qquad L_x = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Ezek determinánsai rendre $-b = \left(\frac{\varepsilon-1}{4}\right)^2$, illetve x^2, azaz négyzetek. Így a szorzásleképezések mátrixai a $\mathrm{GL}(2, p^m)$ csoport egy 2-indexű részcsoportjában vannak. Mivel $\mathrm{GL}(2, p^m)/\mathrm{GL}(2, p^m)'$ ciklikus, így $\mathrm{GL}(2, p^m)$-nek egyetlen 2-indexű részcsoportja van. Ennek elemei szükségképpen páros permutációk. Az $\mathrm{AGL}(2, p^m)$ elemi Abel p-normálosztójának elemei szintén páros permutációk, tehát a megadott élesen 2-tranzitív halmaz része A_{p^m}-nek.

A másik esetünk az, amikor $n = p^{2m+1}$ páratlan kitevős prímhatvány. Itt a kérdés tudomásom szerint teljesen nyitott. Megjegyezzük, hogy más prímrendű projektív sík nem ismert, mint a Galois-sík. Nem Desargues-féle prímrendű síkok létezése a véges geometria több évtizedes nyitott problémája. Ezt a problémát oldaná meg $n = p$ prímszám esetén A_n-beli élesen 2-tranzitív halmaz előállítása. Ha pedig n magasabb prímhatvány, akkor a legkisebb szóba jöhető érték az $n = 125$, ami már kellően nagy ahhoz, hogy ne legyen direkt számításokkal megválaszolható. A felvetés mindenképpen érdemes további alapos vizsgálatokra.

Szeged, 2015. május 9.

Nagy Gábor Péter