BÍRÁLAT

NAGY GÁBOR PÉTER

Kvázicsoportok előállítása csoportokban és a projektív síkon

című doktori értekezéséről

Nagy Gábor tudományos tevékenysége elsősorban a geometriára, ill. annak algebraizálásában használt kvázicsoportokra és loopokra terjed ki.

A jelölt disszertációjában 14 cikkben közölt eredményeit mutatja be angol nyelven. Kutatási eredményeinek mélységét mutatja, hogy a dolgozatok többsége magas szintű, vezető nemzetközi folyóiratban jelent meg, pl. Communications in Algebra, European Journal of Combinatorics, Forum Mathematicum, Transactions of American Mathematical Society.

A dolgozat rövid történeti áttekintés után a szükséges alapfogalmakat és az ezekhez kapcsolódó összefüggéseket tárgyalja.

Az ezt követő fejezetekből a kompetenciámnak megfelelő részeket taglalnám részletesebben.

A dolgozat első felében a Bol-loopokkal kapcsolatos nevezetes problémákat, ill az azokkal összefüggő kutatási eredményeit mutatja be a jelölt.

A nem-Descartes-féle projektív síkok vizsgálatánál jelentek meg kvázicsoportok, ill. loopok (a loop egységelemes kvázicsoport) speciális osztálya a Bol-loopok, amelynek részosztálya a Moufang-loopok.

A véges egyszerű csoportok klasszifikációjának felhasználása a véges egyszerű Moufang-loopok teljes klasszifikációjához vezetett. Ezek után a figyelem a véges egyszerű nem-Moufang Bol-loopokra irányult. Ezen loopok létezése az utolsó 30–40 évben a loopelmélet egyik fő problémájának számított. Liebeck, Glauberman, Strambach, valamint Nagy Gábor ezzel kapcsolatos korábbi eredményei inkább azt erősítették, hogy ilyen Bol-loop nem létezik.

Nagy Gábor volt az, aki végül megoldotta a problémát. Az egzakt faktorizáció és a Bool-loop mappa segítségével olyan módszert dolgozott ki, amellyel ilyen típusú Bol-loopok tágas osztálya konstruálható – ahogy ezt Foguel és Kinyon is írják cikkükben.

A Bol-loop mappa fogalmát Aschbacher vezette be – akinek a véges egyszerű csoportok klasszifikációjában igen jelentős szerepe volt. A Bol-loop mappa segítségével bizonyos loopelméleti problémákat csoportelméleti eszközök felhasználásával vizsgálhatnak.

Nagy Gábor problémalátásának és ismereteinek mélységét mutatja, hogy kutatásaiban a csoportok egzakt faktorizációját felhasználva egy olyan Bol-loop mappát definiált, amelyhez tartozó Bol-loop (Baer-megfeleltetéssel) G-loop. Majd az egzakt faktorizációt felruházta bizonyos tulajdonságokkal, ekkor ez olyan Bol-loop mappát eredményezett, amely már egyszerű nem-Moufang Bol-loop.

Nagy Gábor az általa kidolgozott elméletet felhasználva, konkrét csoportok esetén pl. $PSL(2,n)$-ben S_n-ben, $PSL_2(\mathbb{R})$-ben olyan egzakt faktorizációt ad meg, ami rendelkezik a tételbeli követelményekkel, így egyszerű nem-Moufang Bol-loopok egy széloes osztályát adja meg. Közöttük páratlan rendű egyszerű nem-Moufang-loop is megjelenik, ami azért meglepő, mert minden véges, páratlan rendű Bruck-loop, ill. Moufang-loop feloldható.

Nagy Gábornak ezt a konstrukcióját Strambach és Figula is erős és hatékony eszköznek találja és használja is speciális csoport-faktorizációknál.

A jelölt csoportelméleti eszközökkel nyert konstrukciói után, K. Johnson és J. D. Smith a fogalmi megértés érdekében a csoportok egzakt faktorizációjára vonatkozó kérdéseket közvetlen kvázicsoport-elméleti eszközökkel közelítette meg.

Régóta ismeretesek olyan 2 exponensű Bol-loopok, amelyek nem elemi Abel 2-csoportok, ezek mindegyike feloldható. Folklór problémának számított nem feloldható 2-exponensű Bol-loop létezése. Számos kutató próbálta igazolni, hogy nem létezik ilyen típusú Bol-loop. Aschbacher is bekapcsolódott ennek a kérdésnek a vizsgálatába. Felhasználva az egyszerű csoportok klasszifikációját ő konstruálta meg egy minimális nem feloldható 2-exponensű Bol-loop jobb oldali multiplikációcsoportját. Aschbacher esetleges további kutatásainak nincs írásos nyoma.

Végül Nagy Gábor oldotta meg elsőnek ezt a nevezetes problémát, tíz nappal később pedig tőle függetlenül Baumeister és Stein is. Aschbacher fenti eredményének felhasználásával a GAP programcsomag segítségével Nagy Gábor talált egy 3840 elemű G-csoportot egy 32 elemű elemi Abel J normálosztóval, amelyre a G/J faktorcsoport izomorf $PGL(2, 5)$-tel, továbbá $[G, G]/[G, J] \cong SL(2, 5)$, J F_2-permutáció modulus és G felhasad $[G, G]J$ felett. Bebizonyította, hogy ebben a G-ben kiválasztható olyan részcsoport és részhalmaz, amely olyan Bol-loop mappát eredményez, hogy a hozzá tartozó egyszerű Bol-loop 96 elemű 2 exponensű.

A fenti G csoport szemidirekt szorzatát véve elemi Abel 2-csoporttal és ügyesen megválasztva a Bol-loop mappát, a szerző további egyszerű 2-exponensű Bol-loopokat kapott. Ilyen módon a kívánt loopoknak széles osztályát konstruálta meg. A jelölt eredményének nagy jelentőségét igazolja többek között, hogy K. Johnson és J. Smith projektív geometriát és kvázi-csoportelméletet alkalmazva elemezték a Nagy Gábor által megadott 96 elemű 2-exponensű egyszerű Bol-loopot.

A feloldható algebrai Bol-loopok és a hozzájuk tartozó Bol-loop mappák közötti kapcsolat vizsgálatával Nagy Gábor megadta egy feloldható algebrai Bol-loop konstrukcióját is.

A következő fejezet élesen tranzitív permutatációhalmazokkal foglalkozik. Az élesen 1-, ill. 2-tranzitív halmazok a Latin négyzeteknek, amik lényegében kvázicsoportok, ill. az affin síkok osztályainak felelnek meg. A vizsgálat tárgya, hogy milyen véges 2-tranzitív permutációcsoportok tartalmaznak élesen 2-tranzitív halmazt.

A korábbi kutatásokat karakterelméleti eszközökkel folytatták. A jelölt azonban ügyes kombinatorikai lemmát dolgozott ki, amelynek segítségével bizonyos csoportosztályokban kizárta az élesen 2-tranzitív halmaz létezését.

Kiemelném még ezt a problémát az M_{22} Mathieu csoportban, ami hosszú ideje nyitott kérdés volt. Ebben az esetben Nagy Gábor egy Steiner-rendszer segítségével adott választ.

A CO_3 Conway-csoporttal kapcsolatban korábban Grundhöfer és Müller Bauer karakterek felhasználásával adott negatív választ. A jelölt kombinatorikus eszközökkel adott új bizonyítást erre a problémára.

Tehát ezen a területen is nyitott problémákat zárt le Nagy Gábor.

A következő fejezet a kvázitestek jobb oldali multiplikációcsoportjával kapcsolatos.

Kvázitestek a transzlációsíkok koordinátázásánál jelennek meg. A kvázitestek a szorzásra kvázicsoportot, ill. véges esetben loopot alkotnak. A jobb oldali szorzás-leképezések (a jobb transzlációk) által generált csoport a jobb oldali multiplikációcsoport tranzitív lesz a kvázitest additív csoportjának automorfizmus csoportjában. Véges esetben ez tranzitív részcsoportja lesz az általános lineáris csoportnak.

A disszertációnak ebben a részében a jelölt azt vizsgálja, hogy milyen tranzitív lineáris csoportok állnak elő valamely véges jobb oldali kvázitest jobb oldali multiplikációcsoportjaként.

A tranzitív lineáris csoportok teljes klasszifikációja C. Heringnek és

M. W. Liebecknek köszönhetően ismeretes. A jobb oldali multiplikáció leképezések ,,spread" halmazt alkotnak. A mátrixok spread halmazainak vizsgálatával és az előbb említett klasszifikáció felhasználásával, komputeranalízis segítségével a jelöltnek sikerült leírni a kívánt csoportokat (Theorem 8.17).

A következő résznek a a tárgya a véges féligtestek multiplikációcsoportjának vizsgálata. A kérdés: Milyen G véges permutáció csoportokhoz létezik olyan loop, amelynek a multiplikációcsoportja része G-nek?

A. Drápal és Vesanen bebizonyították, hogy ha Mlt $Q \leqslant P\Gamma L(2,q)$, akkor Q ciklikus csoport, ill. negatív választ adtak bizonyos projektív csoportok esetén is. A későbbiekben A. Drápal a normalizált Latin négyzetekre vonatkozóan tett fel egy kérdést, ami a loopok nyelvén a következőt jelenti: adott $n \geqslant 3$ és egy q prímhatvány esetén létezik-e olyan loop, amelynek a G multiplikációcsoportjára: $PSL(n,q) \leqslant G \leqslant P\Gamma L(n,q)$?

Nagy Gábor ezt a problémát is megoldotta $q^n > 8$ esetén a féligtestek és a komputer segítségével. Eközben felhasználta Vesanen korábbi ötletét is (Theorem 9.4). A későbbiekben Vesanen élesítette Nagy Gábor ezen eredményét.

A jelölt a GAP-csomag felhasználásával a Mathieu-csoportok mindegyikével kapcsolatosan is eredményeket ért el (Proposition 9.6).

Az utolsó fejezet tárgya az algebrailag zárt test feletti projektív síkban levő duális 3-hálózatok vizsgálata. A fő cél ezek klasszifikációja lenne, de mivel ez túlságosan általános kérdés, így ez a fejezet a véges csoportokat realizáló duális 3-hálózatokkal foglalkozik.

Korábban Uzvinsky és Pereira két olyan végtelen osztályt találtak, amelyek ciklikus, illetve két darab ciklikus direkt szorzata típusú csoportokat realizálnak.

A fenti eredményeket és számítógépes keresést felhasználva a jelölt Korchmárossal és Pace-val a közös munkájukban leírták azon véges csoportokat, amelyek projektív síkon duális 3-hálózattal realizálhatók 0, ill $p > n$ karakterisztika esetén, ahol $n \geqslant 4$ a duális 3-hálózat rendje (Theorem 10.1). Az igen terjedelmes bizonyításban a szerzők mély, az egyszerű csoportokra kiterjedő csoportelméleti eszközöket és geometriát használnak.

Nagy Gábor eredményei magas tudományos értékűek. Ezek közül elsősorban az egyszerú Bol-loopokkal kapcsolatos eredményeit emelném ki, illetve a féligtestekkel kapcsolatos kutatásait Drápal kérdése nyomán.

Tézisei mindegyike új tudományos eredmény.

Tudományos tevékenysége nemzetközi környezetben nagy elismerést vált ki. Ezt igazolja, hogy nemasszociatív struktúrák, kvázicsoportok, loopok témájú nagy nemzetközi konferenciák szinte állandó meghívott előadója (Denver, Prága, Trest), ill. a konferenciákhoz kapcsolódó workshopokon is nagy sikerű előadássorozatokat tartott. (Mindezeknek magam is résztvevője voltam.)

Kutatásainak egy részében társszerzőkkel működik együtt a világ különböző részeiről, akik között számos vezető kutató is található. Nagy Gábort eredményei alapján kutatási területén szintén vezető kutatóként tartják számon.

A dolgozat szépen felépített és tagolt. Az eredmények motivációja, a téma fejlődésének bemutatása világos.

Mindezek alapján úgy vélem, hogy Nagy Gábor minden szempontból megfelel az MTA doktori cím követelményeinek. Így javasolom a nyilvános védés lefolytatását és a jelölt számára az MTA doktora cím odaítélését.

Meg kell említenem, hogy a disszertációban kis számban vannak elütések, a jelölés néhány helyen nem egységes. A jelölt a dolgozatban néhány sejtésre csak utalást tesz, talán szerencsésebb lett volna, legalábbis számomra, ha pontosan kimondja ezeket.

Kérdés: A 2-exponensű véges egyszerű Bol-loopokkal kapcsolatban a jelölt említi, hogy a hozzájuk tartozó jobb oldali multiplikációcsoport osztályozása reménytelibbnek tűnik a loopok osztályozásánál. Mit gondol a teljes multiplikációcsoport vizsgálatáról, majd az osztályozásáról?

Csörgő Piroska