Opponensi vélemény Nagy Gábor Péter
"Representations of loops in groups and projective spaces"
című akadémiai doktori értekezéséről

Az értekezés témája. A loopok vizsgálatát a múlt század 30-as éveiben kezdeményezte Moufang, Blaschke, Bol és Baer, elsősorban véges-, illetve differenciálgeometriai indíttatásból, az elmúlt évtizedekben pedig részben Liebeck, majd Aschbacher meghatározó munkái nyomán nyert a téma kutatása új lendületet. Ezekhez kapcsolódnak szervesen Nagy Gábor Péter disszertációjában bemutatott vizsgálatai.

A loopok olyan kétváltozós művelettel ellátott algebrai struktúrák, melyekben a szorzásra nézve létezik egységelem, és az osztás mind a jobb-, mind a bal oldalról egyértelműen elvégezhető. Az egységelem létezésének kritériumát elvetve a kvázicsoportok osztályához jutunk, melyek között a véges struktúrák az ún. latin négyzetekkel azonosíthatók, és pusztán kombinatorikai szempontból is érdekesek. Az értekezés elsősorban a Bol-loopok varietására fókuszál, melyeket egy további azonosság definiál. Ezek között kiemelt szerep jut a Bruck-loopok részvarietásának; ide tartozik minden 2-exponensű Bol-loop, vagyis amelyben minden elem négyzete az egységelem. Bizonyos Bruck-loopok a Poincaré-modell, illetve a speciális relativitás tanulmányozásában játszanak fontos szerepet. Egy másik nevezetes, talán a legtöbbet vizsgált részvarietás a Moufang-loopoké, ide tartoznak például az egység normájú Cayley-számok, melyek felelősek a 7-dimenziós gömbfelület parallelizálhatóságáért, vagy a Parker által felfedezett 2^{13}-elemű loop, melyet Conway használt a legnagyobb sporadikus egyszerű csoport leegyszerűsített konstrukciójához.

Az értekezés felépítése. A 138 oldalas disszertáció elején az új eredményeket 6 tézisben foglalja össze a szerző. Ezt követi a szükséges alapfogalmak összefoglalása és egy általános referenciákat felsoroló rövid fejezet. Az érdemi rész 8 számozott fejezetből áll, melyek többé-kevésbé a szerző egy-egy cikkének felelnek meg; ezek nagy része önálló munka. Az egyszerű Bol-loopokkal foglalkozó első négy fejezetben foglaltak támasztják alá az első két tézist, a fennmaradó négyet pedig rendre a további négy fejezet. Mindegyik tézist elfogadom, mint a jelölt által elért új tudományos eredményt. Mivel az utóbb említettek nem konkrétan loopokról szólnak, inkább azokhoz kapcsolódó struktúrákról, részletesen inkább csak az előbbiekről írok.

Egyszerű Bol-loopok. Számos csoportelméleti, tágabb értelemben univerzális algebrai fogalom kézenfekvő módon értelmezhető a loopok körében. Az izomorfizmusnak a loopok, sőt általánosabban a kvázicsoportok körében azonban többféle általánosítása is használatos, ezek közül az egyik az izotopizmus. Egy loop egyszerű, ha nincsen valódi normális részloopja (ami tehát egy alkalmas loop-homomorfizmusnak a magja lenne). A Jordan–Hölder-tétel értelmében ezekre gondolhatunk úgy, mint a loopok építőköveire. A 3.–6. fejezetek legfőbb érdeme olyan egyszerű Bol-loopokat létrehozó konstrukciók bemutatása, melyek már számos új kutatást is inspiráltak.

A loopok csoportelméleti eszközökkel történő vizsgálatának kiindulópontja a Baer-kapcsolat, mely funktoriális megfeleltetés a loopok kategóriája és az ún. loop mappák kategóriája között, melyek a loopok jobbszorzásai által generált permutációcsoportokon belül az egységelem stabilizátorának tulajdonságait absztrahálják. Az egyik fő problémát az jelenti, hogy egyes loopok különböző loop mappákból is megkaphatók.

Hosszú ideig a véges Bol-loopok körében csak olyan egyszerű loopok voltak ismeretesek, melyek eleget tettek a Moufang-féle azonosságnak is, és az elmélet egyik fontos kérdése volt, hogy egyáltalán léteznek-e másmilyenek, melyeket nevezzünk valódinak. Ezt a kérdést dönti el a szerző a 3. fejezetben. A G csoport A, B részcsoportjai G-nek hűséges egzakt faktorizációját adják, ha G minden eleme egyértelműen felírható egy A és egy B-beli elem szorzataként, de egyikük sem tartalmazza G egy valódi normálosztóját. Első lépésként egy ilyen faktorizációból kiindulva olyan loop mappát konstruál, melyhez tartozó loop izomorf minden izotópjával. Ezután több receptet is ad arra, hogy milyen további feltételek garantálják azt, hogy a kapott loop valódi egyszerű Bol-loop legyen. A 3.8 Tétel szerint például ilyen helyzet áll elő, ha G majdnem egyszerű, vagyis beszorítható egy T nemkommutatív egyszerű csoport és annak automorfizmuscsoportja közé, melyre most ráadásul még a $G = TA = TB$ feltétel is teljesül. Az ezt követő két példa ennek alkalmazását adja a $PSL(n, 2)$ és az S_n csoportok esetén, alkalmas faktorizáció megadásával. A technikaibb megfogalmazású 3.5 Tétel áttételes következményeként pedig egy $3^4 \cdot 13$ elemű egyszerű Bol-loopot is sikerül találnia, ami mutatja, hogy Bol-loopokra nem teljesül a Feit–Thompson-tétel megfelelője.

A 4. fejezet eredményei közvetlenül kapcsolódnak Aschbachernek és szerzőtársainak 2-exponensű Bol-loopokra vonatkozó nagyívű munkáihoz. Erős volt a várakozás, mely szerint minden véges 2-exponensű Bol-loop feloldható, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy elemszáma 2-hatvány. A fejezet első részében Nagy Gábor Péter ezt cáfolja meg, megadván a legkisebb, 96-elemű ellenpéldát, ami egyben egyszerű valódi Bol-loop. Ez is a Baer-kapcsolaton keresztül történik, egy olyan két elemmel generálható csoport megadásával, mely előáll egy 32-elemű elemi Abel-féle 2-csoportnak az ötödfokú szimmetrikus csoporttal történő alkalmas bővítéseként. Ennek a csoportnak a finomszerkezetéről Aschbacherék nyomán már sok ismeret rendelkezésre állt, megtalálásához segítséget nyújtott a GAP programcsomag. A 4.7 Tétel bizonyításához természetesen a csoport további tulajdonságainak finom elemzésére is szükség volt. Ez egy igen figyelemreméltó eredmény, már csak azért is, mert eléréséhez a várakozással szembe menve komoly pszichológiai akadályt is le kellett küzdeni. Az eredményt továbbfejlesztve, a 4.14 Tételben 2-exponensű egyszerű Bol-loopok egy végtelen sorozatát is megkonstruálja a szerző az S_5 moduláris reprezentációira támszkodva.

Az 5. fejezetben három további Bol-loopokra vonatkozó nyitott probléma megoldását találjuk. Noha az egyikben Aschbacher megelőzte Nagy Gábor Pétert, a disszertációban közölt bizonyítás, mely teljes gráfok kétszeresen tranzitív automorfizmuscsoporttal rendelkező 1-faktorizációinak Camerontól és Korchmárostól származó osztályozására épít, az előbbinél jóval áttekinthetőbb. Az ide vonatkozó 5.13 Tétel szerint, ha egy véges Bol-loop automorfizmuscsoportja az egységelemen kívül tranzitív hatású, akkor a loop szükségképpen egy elemi Abel-csoport.

Kritikai észrevételek. A disszertációt némileg hosszúnak találom. Tekintettel arra, hogy a jelölt számottevő és jelentős önálló eredményeket is felvonultat, elegendő lett volna egy átlagos terjedelmű pályamunkát beadni. Könnyen elhagyható lett volna például az algebrai Bol loopokat érintő 6. fejezet, melyet kellő hozzáértés és idő hiányában nem is tudtam érdemben értékelni. Az angol nyelv használata megfelelő, bár sok helyen találni figyelmetlenségből eredő apróbb hibákat. Az értekezés cikkeket feldolgozó érdemi része gondosan megírt munka, az előkészületeket tartalmazó 1. fejezetben azonban számos zavaró elírás maradt, például rögtön a csoporthatás és a kvázicsoport, majd később az elő-féltest definíciója is sajtóhibás. Lehet, hogy elkerülte a figyelmemet, de a 'Bol envelop' definícióját sehol nem találtam. Az 1.3 alfejezetben jó lett volna legalább megemlíteni a Bol loopok hatvány-asszociatív tulajdonságát, hiszen anélkül a hatványozás és az exponens fogalma nehezen értelmezhető. A történeti áttekintést érdemes lett volna magukra a loopokra kihegyezni.

Összegzés. Összefoglalva, az elbírálásra benyújtott értekezésben foglalt eredményeket érdekesnek és értékesnek tartom. A pályázó szűkebb szakterületén túl kiterjedt ismeretekkel rendelkezik a véges csoportok, az algebrai csoportok, a reprezentációelmélet és a kombinatorika területén, ezek módszereit nagy szakértelemmel használja, a kutatásokhoz szükséges számítógépes módszerek fejlesztéséhez is érdemben hozzájárult. Rendelkezik az MTA doktoraitól elvárható önálló kutatási elképzelésekkel és eredményekkel. Kiemelendő bizonyításainak ötletessége, új konstrukciók megtalálására való képessége. Egyértelműen megállapítható, hogy a korábbi fokozat megszerzése óta Nagy Gábor Péter jelentős eredeti tudományos eredményekkel gyarapította szakterületét, meghatározó módon járult hozzá annak további fejlődéséhez. A nyilvános vita kitűzését indokoltnak tartom, a fokozat odaítélését javasolom.

Kérdések. *1) Kérném a jelöltet, hogy részletesebben fejtse ki az [Asc05] cikkben megfogalmazott kérdések és a 4. fejezetben foglalt eredmények pontos kapcsolatát. (Az [AKP06] cikkben számozott kérdést nem találtam.)*

2) A 7.6 Tétel szerint, ha az n szám 2 vagy 3 maradékot ad 4-gyel osztva, akkor az A_n *alternáló csoport nem tartalmaz élesen 2-tranzitív részhalmazt. Ha* $n = 4$*, akkor persze maga a teljes csoport ilyen. Mit lehet tudni a fennmaradó esetekről?*

Budapest, 2015. május 6.

Tisztelettel:

Károlyi Gyula