dc_816_13

Trigonometrikus és Walsh-sorokkal kapcsolatos vizsgálatok

Fridli Sándor

MTA Doktori Értekezés

Tézisek

2014.

1. Bevezetés.

A dolgozat megírásakor ugyan a szerző által elért tudományos eredmények bemutatása volt az elsődleges cél, emellett azonban fontos szempont volt egy olyan koherens anyag összeállítása, amelyben az eredményeket egységes keretben, a közöttük lévő logikai kapcsolatot előtérbe helyezve lehet feldolgozni. Az egyes fejezetekben tárgyalásra kerülő témaköröket a Sidon-típusú egyenlőtlenségek, a Hardy-terek alkalmazása, valamint a trigonometrikus és a Walsh-rendszer kötik össze. Ez utóbbi azt jelenti, hogy az egyes kérdéseket eleve ebben a két modellben vizsgáljuk, illetve hogy az általános eredményeket is ezeken az eseteken illusztráljuk. Ily módon lehetőség nyílik a két rendszerre vonatkozó az eredmények, módszerek összehasonlítására is. Ennek a megközelítésnek a következménye, hogy a dolgozat elején szerepelnek olyan eredmények is, amelyek már a szerző kandidátusi értekezésében is megtalálhatók, viszont kimaradtak a kandidátusi értekezés óta született, de tartalmilag távolabb álló eredmények. Ilyenek például a racionális rendszerekre, és azoknak a jelfeldolgozásban való alkalmazásaikra vonatkozó, az elmúlt években született cikkek. Másrészt terjedelmi okokból eltekintettünk a dolgozat témájába illő [DalFri04a] és [FriManSid08] cikkekben foglalt eredmények bemutatásától. Az első, egy *James Daly*-vel írt közös cikk, ami Vilenkin-rendszerek mutiplier operátorainak Hardy-térbeli korlátosságára vonatkozik. Ebben az elégséges feltételt a magfüggvény blokkjaira fogalmazzuk meg. A másikban, *Pammy Manchanda* és *Abulhasan Siddiqi* szerzőtársakkal a Nörlund-közepek approximációs tulajdonságaira vonatkozó eredményeinket publikáltuk. A dolgozatban szerepelnek továbbá olyan eredmények is, amelyek két publikálásra leadott, de még meg nem jelent cikkben találhatók. Az értekezésben ily módon összesen 22 saját, illetve társszerzővel írt publikáció került feldolgozásra.

Az értekezés döntő részben a trigonometrikus és a Walsh-rendszerre igazolt állításokat tartalmaz. Az 1. fejezetben azokat a Walsh-rendszerrel és a Hardy-terekkel kapcsolatos főbb fogalmakat, eredményeket gyűjtöttük össze, amelyek a többi, tartalmi fejezet megértéséhez feltétlenül szükségesek. A trigonometrikus rendszer esetén, annak közismertsége miatt nem tartottuk fontosnak az ilyen jellegű bevezetést. Az új fogalmakat általában a tárgyalás közben definiáljuk ott, ahol legelőször szükség van rájuk. Ez vonatkozik például a *Bevezetésben* szereplő Hardy-terektől eltérő olyan Hardy-típusú terekre is, amelyek a tárgyalás során merülnek fel. A 2. fejezetben az úgynevezett Sidon-típusú egyenlőtlenségekkel foglalkozunk. Ezek a későbbiekben is rendre előkerülnek az itt szereplő eredeti vagy módosított formájukban. A 3. fejezet a trigonometrikus és Walsh-sorokra vonatkozó integrálhatósági feltételeket, valamint az integrálnormában való konvergenciára vonatkozó eredményeket tartalmazza. A 4. fejezet témája a Fourier-sorok erős szummációs, approximációs tulajdonságai. Végezetül az utolsó, 5. fejezetben multiplier operátorok Hardy-tereken való korlátosságát vizsgáljuk.

Az egyes fejezetek tartalmával kapcsolatosan természetesen nem lehetett cél az adott problémakör teljes körü, kimerítő feldolgozása. A részterületeken belül is csak arra szorítkoztunk, hogy a vonatkozó saját eredményeknek a hátterét, előzményeit, a többi eredményekhez való viszonyát, azaz a témakörbe való beágyazását bemutassuk. A dolgozatban a számozott tételek mindig saját, illetve szerzőtársakkal közös eredményeket tartalmaznak. A nem saját eredmények megfogalmazása nem tétel környezetben történik. Ez semmiképpen sem értékbeli megkülönböztetést takar. Az oka egyszerűen a szerző eredményeinek könnyű elkülöníthetősége volt. A matematika területén szokásos módon a többszerzős cikkek esetén a szerzők felsorolása az abc szerinti sorrendnek megfelelően történt. Terjedelmi korlátok miatt nem közölhetjük az összes tétel bizonyítását. A bizonyítások kiválogatásakor több szempontot vettünk figyelembe. Egyrészt igyekeztünk a meghatározó tételeket kiválasztani, másrészt ügyelni arra, hogy a válogatás minél szélesebb skálát lefedjen. Ez azt jelenti, hogy legyen köztük a trigonometrikus, a Walsh-Paley, a Walsh-Kaczmarz, valamint az általános ortogonális rendszerekre vonatkozó példa is, valamint legyen például többdimenziós változat. Az utolsó fejezetben mind a Walsh, mind pedig a trigonometrikus esetre közöljük a bizonyítást, ezzel bemutatva a két rendszer közötti kapcsolatot, eltérést. A fennmaradó tételek bizonyításai a jelzett publikációkban találhatók meg.

A tézisekben megtartottuk az értekezésbeli sorszámozást.

Köszönettel tartozom szerzőtársaimnak, akikkel közösen elért eredményeink a dolgozatban szerepelnek:

- *James Daly, professzor emeritus, University of Colorado, Colorado Springs, USA*
- *Pammy Manchanda, professzor, Guru Nanak Dev University, Amritsar (Punjab), India*
- *Schipp Ferenc, professzor emeritus, ELTE, IK, Numerikus Analízis Tanszék*
- *Abulhasan Siddiqi, főtitkár, ISIAM (Indiai Ipari és Alkalmazott Matematikai Társulat)*

2. Sidon-típusú egyenlőtlenségek

2.1. A trigonometrikus eset. A dolgozat érdemi részét az úgynevezett Sidon-típusú egyenlőtlenségek tárgyalásával kezdjük. Ezt elsősorban az indokolja, hogy a további fejezetek mindegyikében fontos szerepet játszanak az itt bemutatott eredmények. Kiindulásképpen tekintsük a trigonometrikus rendszer szerinti D_n^T Dirichlet-féle magfüggvényeket, majd vegyük ezeknek egy lineáris kombinációját tetszőleges $c_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0 \dots, n,\ n \in \mathbb{N})$ együtthatókkal. Sidon-típusú egyenlőtlenségnek az $1/(n+1)\left\| \sum_{k=0}^{n} c_k D_k^T \right\|_1$ $(n \in \mathbb{N},\ c_k \in \mathbb{C})$ mennyiségre adott felső becsléseket nevezzük. Az analóg feladat természetesen tetszőleges Φ ortonormált rendszer esetén is megfogalmazható. A dolgozatban többnyire a trigonometrikus és a Walsh-esetre szorítkozunk.
A korábbi eredmények egy könnyen értelmezhető egységes alakban írhatók fel. Nevezetesen, mindegyikük interpretálható oly módon, mint az együttható vektorhoz természetes módon hozzárendelhető lépcsősfüggvény valamilyen normája. Jelölje ehhez χ_A az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz karakterisztikus függvényét és vezessük be a $(c_0, \dots, c_n)$ együttható vektor által generált

$$\Gamma(c_0, \dots, c_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k \chi_{[k/(n+1),(k+1)/(n+1))} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

lépcsősfüggvényt. Ekkor az általános alak

$$\frac{1}{n+1}\left\| \sum_{k=0}^{n} c_k D_k^T \right\|_1 \le C_X \|\Gamma(c_0, \dots, c_n)\|_X . \tag{1}$$

Például a Telyakovskiĭ-féle becslés [Tel73] esetén az X norma a maximum norma, a Bojanic-Stanojević-becslésben [BojSta82] pedig az L^p $(1 < p < \infty)$ norma. *Schipp Ferenc* [Sch92] igazolta, hogy a becslés abban az esetben is fennáll, ha a trigonometrikus esetben a lépcsősfüggvény nemperiodikus Hardy-normáját, a Walsh-esetben pedig a diadikus Hardy-normáját vesszük. A Hardy-normákat véve elveszítjük az előzőeknek azt a jó tulajdonságát, hogy azok az eredeti együtthatókkal egyszerűen és közvetlenül is kifejezhetők voltak. Vizsgálataink arra irányultak, hogy egyrészt a Hardy-normán alapuló együttható becslést adjunk, másrészt próbáljuk kideríteni, hogy milyen közel jutottunk a lehető legjobb eredményhez. Az első probléma megoldásaként egy egyszerű együttható formulát igazoltunk.

2.1. Tétel ([Fri93]). *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$ együtthatók esetén*

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} c_k D_k^T \right\|_1 \le C \sum_{k=0}^{n} |c_k| \Big(1 + \log^+ \frac{|c_k|}{(n+1)^{-1} \sum_{j=0}^{n} |c_j|} \Big), \tag{2}$$

ahol $C > 0$ abszolút konstans.

Az eddigi eredményekhez hasonlóan (2) jobb oldalát normaként is karakterizálni tudtunk. Nevezetesen, az adott feltétel nem más, mint egy átrendezésre invariáns Hardy-típusú norma. Jelölje ugyanis L_0 a $[0, 1)$ intervallum önmagára való mértéktartó leképzéseit, és legyen

$$\mathcal{H}^{\star}_{[0,1)} = \left\{ f \in \mathcal{H}_{[0,1)} \,:\, f \circ \nu \in \mathcal{H}_{[0,1)},\ \nu \in L_0 \right\},$$
$$\|f\|_{\mathcal{H}^{\star}_{[0,1)}} = \sup \left\{ \|f \circ \nu\|_{\mathcal{H}_{[0,1)}} \,:\, \nu \in L_0 \right\} \qquad (f \in \mathcal{H}^{\star}_{[0,1)}).$$

$\mathcal{H}^{\star}_{[0,1)}$ a $\mathcal{H}_{[0,1)}$ legnagyobb átrendezésre invariáns altere, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\star}_{[0,1)}}$ pedig a rajta értelmezett átrendezésre invariáns Hardy-norma. Az alábbi ekvivalenciát igazoltuk.

2.2. Tétel ([Fri93]). *Egy mérhető függvény akkor és csak akkor eleme a $\mathcal{H}^{\star}_{[0,1)}$ térnek, ha $\int_0^1 |f| \log^+ |f| < \infty$. Továbbá vannak olyan C_1, C_2 pozitív konstansok, amelyekre*

$$C_1 \|f\|_{\mathcal{H}^{\star}_{[0,1)}} \le \int_0^1 |f| \Big(1 + \log^+ \frac{|f|}{\|f\|_1} \Big) \le C_2 \|f\|_{\mathcal{H}^{\star}_{[0,1)}} \qquad (f \in \mathcal{H}^{\star}_{[0,1)}).$$

Más megvilágításban pedig (2) jobb oldala egy Orlicz-típusú norma. Jelölje L_M az

$$M(x) = \begin{cases} 1/2\, |x|^2, & 0 \le |x| < 1; \\ 1/2 + |x| \log^+ |x|, & |x| \ge 1 \end{cases} \tag{3}$$

Young-függvény által generált Orlicz-teret. Ennek a térnek a normájára a *2.2. Tételhez* hasonló jellemzés áll fenn.

2.4. Tétel ([Fri93]). *Legyen M a (3)-ban definiált Young-függvény. Egy $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ mérhető függvény akkor és csak akkor eleme az L_M térnek, ha $\int_0^1 |f| \log^+ |f| < \infty$. Továbbá vannak olyan C_1, C_2 pozitív konstansok, amelyekre*

$$C_1 \|f\|_{L_M} \le \int_0^1 |f| \Big(1 + \log^+ \frac{|f|}{\|f\|_1} \Big) \le C_2 \|f\|_{L_M} \qquad (f \in L_M). \tag{4}$$

Következésképpen:

$$\frac{1}{n+1} \Big\| \sum_{k=0}^{n} c_k D_k^T \Big\|_1 \approx \|\Gamma(c_0, \dots, c_n)\|_{\mathcal{H}^{\star}_{[0,1)}} \approx \|\Gamma(c_0, \dots, c_n)\|_{L_M}.$$

Megjegyezzük, hogy a (2) logaritmikus becslés többdimenziós általánosításával *Kuznetsova* ([Kuz98], [Kuz00], [Kuz12]), valamint *Motornij, Babenko, Dovgosej, Kuznetsova* ([MoBaDoKu11]) foglalkoztak.

A másik problémára adott válaszunk az, hogy az általunk adott (2) együttható feltétel a lehető legjobb átrendezésre invariáns norma, amit egy fordított irányú Sidon-típusú egyenlőtlenség formájában igazoltunk.

2.3. Tétel ([Fri93]). *Van olyan $C > 0$ abszolút konstans, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és c_k $(k = 0, \dots, n)$ valós számok esetén*

$$\max_{p \in P_n} \Big\| \sum_{k=0}^{n} c_{p_k} D_k^T \Big\|_1 \ge C \sum_{k=0}^{n} |c_k| \Big(1 + \log^+ \frac{|c_k|}{(n+1)^{-1} \sum_{j=0}^{n} |c_j|} \Big), \tag{5}$$

ahol P_n a $0, \dots, n$ számok permutációinak halmazát jelöli.

Megjegyezzük, hogy korábban nem volt ismeretes fordított irányú Sidon-típusú egyenlőtlenség.
Hasonló eredményeket értünk el az eltolt indexű Sidon-típusú egyenlőtlenségekkel kapcsolatban is.

2.5. Tétel ([Fri93]). *Legyen* $K, N \in \mathbb{N}$, $K \leq N$. *Ekkor tetszőleges* $c_k \in \mathbb{R}$ $(k = K, \dots, N)$ *együtthatók esetén*

$$\frac{1}{N-K+1} \max_{p \in P_{N-K}} \Big\| \sum_{k=K}^{N} c_k D_k^T \Big\|_1 \approx \frac{1}{N-K+1} \log \frac{N+1}{N-K+1} \int_0^1 \Gamma(c_K, \dots, c_N) + \|\Gamma(c_K, \dots, c_N)\|_{L_M} .$$

A Sidon-típusú egyenlőtlenségek vizsgálatát számos Fourier-analízisbeli probléma kezelésében játszott szerepük indokolja. Ennek érzékeltetéséhez elég azt megemlíteni, hogy a szummációs eljárások magfüggvényei Dirichlet-magok lineáris kombinációjaként állnak elő.

2.2. A Walsh-eset. A Walsh–Paley esetet a trigonometrikussal összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a két rendszerre vonatkozó eredmények, és azok fejlődése párhuzamba állíthatók. Az (1) általános alakot tekintve például az $X = L^p$ választással adódó esetet *Móricz Ferenc* és *Schipp Ferenc* [MorSch90] igazolták. Az analógia a Hardy-norma esetén sérül, tudniillik ezt a Walsh–Paley rendszerre a valós nemperiodikus Hardy-norma helyett *Schipp Ferenc* [Sch92] az ennél nagyobb diadikus Hardy-normával igazolta:

$$\frac{1}{2^n} \Big\| \sum_{k=1}^{2^n} c_k D_k^W \Big\|_1 \leq C \|\Gamma(c_1, \dots, c_{2^n})\|_{\mathbb{H}_{[0,1)}} \tag{6}$$

$(n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, 2^n)$.
Kissé leegyszerűsítve, a különbséget a 2^n indexeknek a diadikus analízisben betöltött különleges szerepe okozza. A *2.1. Tételben* adott (2) becslés tekintetében már visszaáll az analógia, mert a *2.3. Tételbeli* ekvivalencia igaz akkor is, ha a nemperiodikus Hardy-teret kicseréljük a diadikus Hardy-térre. A *2.4. Tételbeli* inverz Sidon-típusú egyenlőtlenséget is igazoltuk a Walsh–Paley rendszerre. Ennek a bizonyítása gyökeresen különbözik a trigonometrikus esettől. Az eltolt indexű eredmény azonban eltér a trigonometrikus megfelelőjétől (ld. *2.5. Tétel*). A különbség az első tagban van. Ez lényegében abból adódik, hogy míg a trigonometrikus Lebesgue-konstansok egyenletesen logaritmikus nagyságrendűek, addig az n-edik Walsh–Paley–Lebesgue-konstanst az n bináris jegyeinek $V(n)$ variációjával lehet jellemezni, ahol

$$V(n) = \sum_{k=1}^{\infty} |n_k - n_{k-1}| + n_0 \qquad \Big(n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k,\ n_k = 0, 1,\ n \in \mathbb{N}\Big).$$

A Walsh–Paley rendszerre vonatkozó eltolt Sidon-típusú eredmény, azaz a *2.5. Tétel* megfelelője az n bináris jegyeinek $V(n)$ variációjával fogalmazható meg.

2.10. Tétel ([Fri95a]). *Legyen* $K, N \in \mathbb{N}$, $1 \le K \le N$ *és legyenek a* c_k $(k = K, \dots, N)$ *együtthatók tetszőleges valós számok. Ekkor*

$$\frac{1}{N-K+1} \max_{p \in P_{N-K}} \Big\| \sum_{k=K}^{N} c_k D_k^W \Big\|_1 \approx \frac{1}{N-K+1} \min_{K<\ell\le N} V(\ell) \int_0^1 \Gamma(c_K, \dots, c_N) + \|\Gamma(c_K, \dots, c_N)\|_{L_M} .$$

Megjegyezzük, hogy a Walsh–Paley-rendszer mellett a Walsh–Kaczmarz-rendszerre is sikerült hasonló Sidon-típusú egyenlőtlenségeket igazolni. Az eredmények a [Fri13a] cikkben találhatók.

A 2. fejezetben a szerzőtől a [Fri93], [Fri95a], [Fri13a] cikkekben található eredmények szerepelnek.

3. Integrálhatósági és L^1-konvergencia osztályok

Ebben a fejezetben ortogonális sorok integrálhatósági, valamint L^1-konvergencia feltételeivel foglalkozunk. Modellként itt is a trigonometrikus és a Walsh-esetet tekintjük, és ezekre alapozva fogalmazunk meg általánosításokat. A vizsgálatokat az integrálhatósági feltételekkel, a Sidon-típusú egyenlőtlenségeknek talán legkézenfekvőbb alkalmazásaival kezdjük. Egy rövid történeti áttekintés után ismertetjük saját eredményeinket a cosinus, sinus, Walsh-sorok és a Walsh-transzformált integrálhatóságával kapcsolatban, majd összevetjük ezeket a korábbi eredményekkel. A következő pontban áttérünk az ún. L^1-konvergencia feltételekre. Itt eleve feltesszük, hogy az adott sor valamely integrálható függvény Fourier-sora, és azt vizsgáljuk, hogy milyen kiegészít H o feltétellel biztosíthatjuk a sornak az L^1-beli konvergenciáját. Mind a trigonometrikus, mind pedig a Walsh-esetben olyan feltételt igazoltunk, ami számos korábbi eredményt magában foglal. Ezen kívül a Hardy-normában való konvergenciát biztosító feltételekkel is foglalkoztunk.

3.1. Sidon-típusú integrálhatósági és L^1-konvergencia osztályok. Legyen $\Phi = (\varphi_n)$ olyan ortonormált rendszer a $[0, 1)$ intervallumon, amelynek a tagjaira $\varphi_n \in L^\infty_{[0,1)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Véve egy valós (vagy komplex) (a_n) számsorozatot tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n \tag{7}$$

sort. Jelölje $\widehat{f}_n^\Phi$ az integrálható f függvény n-edik Φ-Fourier együtthatóját és vezessük be a Φ-Fourier-transzformáltak $\widehat{L^\Phi} = \{(\widehat{f}_n^\Phi) : f \in L^1_{[0,1)}\}$ terét. Az integrálhatósági probléma azt jelenti, hogy egy adott (7)-beli sor vajon Φ-Fourier-sor-e. Másképp fogalmazva az (a_n) sorozat

Φ-Fourier-transzformált-e, azaz igaz-e, hogy $(a_n) \in \widehat{L^\Phi}$. Négyzetesen integrálható függvényekre a probléma megoldása közismert, ugyanis abban az esetben a Fourier-transzformáltak tere éppen az ℓ^2 sorozat tér. Integrálható függvényeket véve azonban már a trigonometrikus rendszer esetén sem ismeretes a Fourier-transzformáltak terének az együtthatókkal megadott karakterizációja. Integrálhatósági feltételnek az (a_n) sorozatra vonatkozó olyan feltételt nevezünk, amelynek teljesülése esetén $(a_n) \in \widehat{L^\Phi}$. Az ilyen feltételek által generált halmazokat, amelyek tehát $\widehat{L^\Phi}$ (általában valódi) részhalmazai, Φ-re vonatkozó integrálhatósági osztályoknak nevezzük.
Az előzmények áttekintése után ismertettük a Sidon-típusú egyenlőtlenségeken alapuló konstrukciót. Az így kapott integrálhatósági osztályokat Sidon-típusú integrálhatósági osztályoknak neveztük. Emellett foglalkoztunk az integrálhatósági és L^1-konvergencia feltételekkel is. Egy Φ-re vonatkozó integrálhatósági feltételt integrálhatósági és L^1-konvergencia feltételnek nevezünk, ha egy, a feltételt teljesítő (a_n) sorozatra a (7) sor akkor és csak akkor konvergens L^1-ben, ha a sorozatra teljesül még a $\lim_{n\to\infty} |a_n| \|D_n^\Phi\|_1 = 0$ feltétel is. Itt D_n^Φ a $\sum_{k=0}^n \varphi_k$ összeget jelöli. Ekkor a kiegészítő feltétel a cosinus sorok esetén a $\lim_{n\to\infty} |a_n| \log n = 0$, a Walsh-esetben pedig a $\lim_{n\to\infty} |a_n| V(n) = 0$ alakban konkretizálódik.
Vezessük be az $\mathcal{S}$ és az $\mathcal{S}^*$ osztályokat. Jelölje $\mathcal{S}$ azoknak az (a_k) nullsorozatoknak a terét, amelyekre van olyan (N_j) indexsorozat, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\log \frac{N_{j+1}}{N_{j+1} - N_j} \left| \sum_{k=N_j}^{N_{j+1}-1} \Delta a_k \right| \right) < \infty, \tag{8}$$

és

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=N_j}^{N_{j+1}-1} |\Delta a_k| \left(1 + \log^+ \frac{|\Delta a_k|}{(N_{j+1} - N_j)^{-1} \sum_{\ell=N_j}^{N_{j+1}-1} |\Delta a_\ell|} \right) < \infty .$$

Legyen továbbá $\mathcal{S}^*$ az $\mathcal{S}$ azon elemei által alkotott részhalmaz, amelyekre a (8)-nál erősebb

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\log \frac{N_{j+1}}{N_{j+1} - N_j} \sum_{k=N_j}^{N_{j+1}-1} |\Delta a_k| \right) < \infty,$$

feltétel teljesül. Ekkor az $\mathcal{S}$ és az $\mathcal{S}^*$ osztályokra igaz az alábbi állítás.

3.1. Tétel([Fri93]).

i) *Az $\mathcal{S}$ halmaz cosinus sorokra vonatkozó integrálhatósági osztály.*
ii) *Az $\mathcal{S}^*$ halmaz cosinus sorokra vonatkozó integrálhatósági és L^1-konvergencia osztály.*

Ennek a tételnek a Walsh-sorokra vonatkozó változatát [Fri95a]-ban igazoltuk. A cosinus sorok integrálhatósági problémájához szorosan kapcsolódik a sinus sorok integrálhatósága. Ha a sinus rendszerre a cosinus rendszer deriváltjaként tekintünk, akkor erre a kapcsolatra alapozva a cosinus sorokra vonatkozó feltételekből sinus sorok integrálhatósági feltételeit generálhatjuk. Számos szerző (ld. pl. [Kan68], [Tel73], [Fom78], [Tel85b], [Mor89]) ezzel a módszerrel konstruált sinus sorokra vonatkozó integrálhatósági osztályokat. Ezekből az derült ki, hogy a cosinus sorokra adott feltételek a sinus sorok esetében nem elégségesek. A kérdés tehát úgy merült fel, hogy milyen további feltétel kell a sinus sorok integrálhatóságához. Erre rendre az (a_k)-ra vonatkozó, Hardy-egyenlőtlenség (ld. pl. [Zyg59]) néven ismert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty \tag{9}$$

feltétel adódott. Megmutattuk, hogy ez nem véletlen, hanem általános feltételek mellett is ez a helyzet. Ezt felhasználva például az alábbi Hardy-térre vonatkozó tételt igazoltuk.

3.2. Tétel([Fri93]) *Tegyük fel, hogy az (a_k) sorozatra*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} |\Delta a_k| \Big(1 + \log^+ \frac{|\Delta a_k|}{2^{-j} \sum_{\ell=2^j}^{2^{j+1}-1} |\Delta a_\ell|}\Big) < \infty\,. \tag{10}$$

Ekkor az $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx \quad (x \neq 0)$ összegfüggvény pontosan akkor van a $\mathcal{H}_{[0,1)}$ Hardy-térben, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty\,.$$

Továbbá a $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$ részletösszegek akkor és csak akkor konvergálnak f-hez a Hardy-normában, ha $\lim_{n\to\infty} a_n \log n = 0$.

Innen a sinus rendszerre a következő eredmény adódik.

3.1. Következmény Tegyük fel, hogy a (b_k) sorozatra teljesül a (10) és a (9) feltétel is. Ekkor a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ sor egy $g \in \mathcal{H}_{[0,1)}$ függvény Fourier-sora. A sor akkor és csak akkor konvergál Hardy-normában g-hez, ha $\lim_{n\to\infty} b_n \log n = 0$.

A kapott eredmények kombinációjával valós és komplex trigonometrikus sorok integrálhatóságára és L^1-konvergenciájára, sőt Hardy-térbeli konvergenciájára vonatkozó feltételt adhatunk.
Megjegyezzük, hogy a *3.1., 3.2. Tételek* megfelelői a Walsh-rendszer esetén is igazak. Ezeket az eredményeket a [Fri95a] cikkben igazoltuk. A Walsh-esetben természetesen a diadikus Hardy-térbeli konvergencia szerepel. Végezetül megemlítjük, hogy az ún. megállított diadikus maximálfüggvény segítségével bevezettünk egy Hardy-típusú teret a $[0,\infty)$ intervallumon értelmezett lokálisan integrálható függvények körében. Ezt felhasználva hasonló eredményeket [Fri99] értünk el a Walsh-transzformált integrálhatóságára vonatkozóan.

3.2. L^1-konvergencia osztályok. Az integrálható függvények Fourier-együttható sorozatainak egy $\mathcal{C}$ részhalmazát L^1-konvergencia osztálynak nevezzük, ha $\widehat{f^T} \in \mathcal{C}$ esetén f Fourier-sora akkor és csak akkor konvergál L^1-normában az f-hez, ha $\lim_{|n|\to\infty} |\widehat{f^T}(n)| \log |n| = 0$. Ilyen típusú klasszikus eredmények többek között *Kolmogorov* és *Telyakovskiĭ* nevéhez fűződnek. Azóta az L^1-konvergencia osztályokat generáló feltételeket több módon és számos lépésen keresztül enyhítették. Az egyik ilyen irányban, az úgynevezett Hardy–Karamata típusú Tauber-féle feltételekkel kapcsolatban elsősorban *Stanojevic, Bojanić, Bray, Grow* ([BojSta82],[BraSta84], [StaSta87], [Sta88], [GroSta95]), *Móricz Ferenc* [Mor91], *Fournier, Aubertin* [AubFou93] értek el eredményeket. Az említett szerzők az eredmények több lépésen keresztül történő javítása során végül a

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{n\to\infty}\sum_{|k|=n+1}^{[\lambda n]} k^{p-1}|\Delta\widehat{f^T}(k)|^p<\infty \qquad (p>1), \tag{11}$$

és a

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{n\to\infty}\sum_{|k|=n+1}^{[\lambda n]} |\Delta\widehat{f^T}(k)|\log|k|=0 \tag{12}$$

feltételekhez jutottak. Könnyű belátni, hogy $p>1$ esetén az így generált L^1-konvergencia osztályok egymásba vannak ágyazva, p csökkentésével bővülnek. Érdemes megemlíteni, hogy a viszonylag egyszerűen igazolható második, logaritmikus feltétel nem összehasonlítható a $p>1$ feltételekkel, azaz egyikből sem következik a másik. Az általam igazolt feltétel az ő kutatásaikhoz illeszkedik.

3.6. Tétel ([Fri97b]). *Tegyük fel, hogy az $f\in L^1_{[0,1)}$ függvény Fourier-együtthatóira teljesül a*

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{n\to\infty}\sum_{|k|=n+1}^{[\lambda n]} |\Delta\widehat{f^T}(k)|\log^+|k\Delta\widehat{f^T}(k)|=0 \tag{13}$$

feltétel. Ekkor

i) $\lim_{n\to\infty}\|f-S_n^Tf\|_1=0$ *pontosan abban az esetben áll fenn, ha* $\lim_{|n|\to\infty}\widehat{f^T}(n)\log|n|=0$;

ii) *az f függvényt $f(x)=g(x)/x$ $(0<|x|\le 1)$ alakba írva a g függvény $L^2_{[0,1)}$-ben van.*

A (13) feltétel a (11) feltételek határesetének tekinthető. Az általa generált konvergencia osztály valódi részhalmazként magában foglalja azok unióját, beleértve a (12) logaritmikus esetet is. Megmutattam, hogy olyan speciális sorozattípusokra, mint lakunáris sorozatok, illetve monoton csökkenő sorozatok a (13) feltétel nem javítható. A fentieken kívül azt is igazoltam, hogy a (13) feltételt teljesítő Fourier-együttható sorozatok esetén a Fourier-sor nemcsak L^1-normában, hanem majdnem mindenütt, és ha az eredeti függvény a Hardy-térben volt, akkor Hardy-normában is konvergál.
A *3.6. Tétel* Walsh változatát a [Fri97a] cikkben igazoltam. Ez a trigonometrikus esettől az ii) részben tér el.
Jelöljük $\mathfrak{L}_p$-vel $(p>1)$ a (11), $\mathfrak{M}$-lel a (12), $\mathfrak{S}$-sel a (13) feltételnek eleget tevő Fourier-transzformáltak halmazát. Legyen továbbá $\mathfrak{L}=\bigcup_{p>1}\mathfrak{L}_p$, valamint $\mathcal{V}(\mathfrak{L}\bigcup\mathfrak{M})$ az $\mathfrak{M}$ és az $\mathfrak{L}$ terek által kifeszített lineáris tér. Ezeket a jelöléseket alkalmazva az alábbi kapcsolatot igazoltuk.

3.10. Tétel ([Fri97a], [Fri97b]).

$$\mathcal{V}(\mathfrak{M}\bigcup\mathfrak{L}) \subsetneq \mathcal{S}\,.$$

A fejezet hátralévő részében kitüntett szerepet játszik az eredetileg a trigonometrikus rendszerre igazolt ún. Telyakovskiĭ-féle feltétel.

3.3. Áttérés $\mathbb{H}_{[0,1)}$-ről $\mathcal{H}_{[0,1)}$-re. Ebben a pontban a valós nemperiodikus Hardy-tér és a diadikus Hardy-tér közötti kapcsolatot vizsgáljuk elsősorban a rajtuk értelmezett szublineáris funkcionálok szempontjából. A vizsgált probléma közvtelen motivációjául a következő pontban tárgyalt Telyakovskiĭ-féle integrálhatósági feltétel szolgált. Az itt megfogalmazott eredmény azonban alkalmazható más esetekben is a trigonometrikus és a Walsh-rendszer viselkedése közötti hasonlóság, illetve eltérés vizsgálatára.
A két tér kapcsolatát az atomok segítségével írjuk le. A szakirodalomban jól ismert más jellegű jellemzést korábban *Davis* [Dav80] adott megmutatva, hogy egy nemperiodikus Hardy-térbeli függvény majdnem minden eltoltja diadikus Hardy-térbeli. Konkrét problémák, feladatok esetén azonban ennek a karakterizációnak az alkalmazása nagyon nehézkes. Tekintsük az

$$\omega_{k,n}(x) = \begin{cases} 2^{n-1}, & (2k-1)/2^n \le x < 2k/2^n; \\ -2^{n-1}, & 2k/2^n \le x < (2k+1)/2^n \end{cases}$$

$(k, n \in \mathbb{N},\ 0 < k < 2^{n-1})$ speciális $\mathcal{H}_{[0,1)}$-atomokat. Jelöljük ezek halmazát Ω-val: $\Omega = \{\omega_{k,n} : k, n \in \mathbb{N},\ 0 < k < 2^{n-1}\}$. Világos, hogy az $\omega_{k,n}$ függvények egyike sem $\mathbb{H}_{[0,1)}$-atom, mivel a csatlakozó intervallumok nem alkotnak diadikus intervallumot.
Legyen ezek után $\mathcal{F}$ egy, a $\mathcal{H}_{[0,1)}$ téren értelmezett funkcionál. Az alábbi tétel azt mutatja, hogy ha egy σ-szublineáris funkcionálnak a korlátosságát a $\mathbb{H}_{[0,1)}$ és a $\mathcal{H}_{[0,1)}$ tereken vizsgáljuk, akkor az ezek közötti kapcsolat szempontjából az Ω-beli speciális atomokon való viselkedés a meghatározó.

3.12. Tétel ([Fri00]). *Legyen $\mathfrak{F}$ egy σ-szublineáris funkcionál a $\mathcal{H}_{[0,1)}$ téren. Jelöljük ennek a $\mathbb{H}_{[0,1)}$ diadikus térre való leszűkítését $\mathbb{F}$-fel. Ekkor*

$$\max\{\|\mathbb{F}\|, \sup_{\omega\in\Omega} |\mathfrak{F}(\omega)|\} \le \|\mathcal{F}\| \le 4\|\mathbb{F}\| + 2\sup_{\omega\in\Omega} |\mathfrak{F}(\omega)|\,.$$

Következésképpen $\mathfrak{F}$ pontosan akkor korlátos, ha korlátos az Ω-n és az $\mathbb{F}$ leszűkítés korlátos a $\mathbb{H}_{[0,1)}$-n.

A tétel alkalmazására példaként két jól ismert σ-szublineáris funkcionál sorozatot tekintünk. Mindkét sorozat egyenletesen korlátos a diadikus Hardy-téren. Kiderült, hogy az egyik esetben az egyenletes korlátosság érvényben marad a valós nemperiodikus Hardy-térre való kiterjesztéskor is, míg a másikban nem. A szóban forgó két funkcionál sorozat a következő:

$$U_n^W f = \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k^W f\|_1}{k} \qquad (f \in L^1_{[0,1)},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1)\,,$$

$$T_n^W f = \frac{1}{2^n}\Big\| \sum_{k=0}^{2^n-1} S_{2^n}^W f(k2^{-n}) D_{k+1}^W \Big\|_1 \qquad (f \in L^1_{[0,1)},\ n \in \mathbb{N})\,.$$

A $\lim_{n\to\infty} U_n^T f = \|f\|_1 \quad (f \in \mathcal{H}_{[0,1)})$ konvergencia igazolása *Smith* [Smi83] nevéhez fűződik, míg a Walsh-rendszer esetén a $\lim_{n\to\infty} U_n^W f = \|f\|_1 \quad (f \in \mathbb{H}_{[0,1)})$ konvergenciát *Simon Péter* igazolta [Sim87]-ben. A Vilenkin-típusú általánosítással *Gát György* [Gat93] foglalkozott. A T_n^W funkcionáloknak a $\mathbb{H}_{[0,1)}$ téren való egyenletes korlátossága ekvivalens a *Schipp Ferenc* ([Sch92]) által igazolt (6) Sidon-típusú egyenlőtlenséggel. Az Ω-n való korlátosságot megvizsgálva a *3.12. Tételt* felhasználásával a fenti két funkcionál sorozatra az alábbi eredményeket igazoltuk.

3.13. Tétel ([Fri00]).

i) *Van olyan* $f \in \mathcal{H}_{[0,1)}$ *függvény, amelyre* $\lim_{n\to\infty} U_n^W f = \infty$.
ii) *Van olyan* $C > 0$ *konstans, hogy bármely* $f \in \mathcal{H}_{[0,1)}$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $T_n^W(f) \leq C\|f\|_{\mathcal{H}_{[0,1)}}$.

A két példa a következő általánosabb jelenségre világít rá. A klasszikus trigonometrikus eredményekben általában a klassszikus Hardy-tér, míg a Walsh-rendszerre vonatkozó megfelelőjükben a diadikus Hardy-tér szerepel. Az az általános hozzáállás, hogy a trigonometrikus rendszerhez az előbbi, míg a Walsh-rendszerhez az utóbbi Hardy-tér szerkezete illeszkedik. A diadikus Hardy-térrel kapcsolatban ehhez elég azt mejegyezni, hogy a kettő hatványú Walsh–Fourier-részletösszegek diadikus martingált alkotnak. Ezen szemlélet alapján a Walsh-rendszerre vonatkozó vizsgálatokban mintegy automatikusan a diadikus Hardy-terek szerepelnek, és így a trigonometrikus és a Walsh eredmények különböznek. A kiterjesztésre vonatkozó ii)-beli pozitív eredmény azt mutatja, hogy bizonyos esetekben ez a megkülönböztetés a két rendszer között nem szükséges, és nem természetes.

Általánosabb megközelítésből a valós nemperiodikus Hardy-térnek a diadikus Hardy-térre való visszavezetése tekinthető diszkretizációs eljárásnak, illetve egy bonyolultab térnek egyszerűbb komponensekre való felbontásának. Ebből a megközelítésből foglalkozott a kérdéssel és általánosította a *3.12. Tételbeli* eredményt a többdimenziós esetre *Torchinsky* és szerzőtársa *Abbu-Shammala* [AbuTor08].

3.4. A Telyakovskiĭ-feltétel által generált Hardy- és BMO terek. Ebben a pontban a *Telyakovskiĭ*-féle, klasszikusnak számító integrálhatósági feltétellel foglalkozunk. Fő eredményként megmutatjuk, hogy az természetes módon kapcsolatba hozható egy, a $[0,\infty)$ intervallumon értelmezett atomos Hardy-térrel. Megvizsgáljuk ennek a Hardy-térnek a természetes számok halmazán értelmezett diszkrét megfelelőjét is. Legyen (a_k) valós számoknak egy nullsorozata. 1964-es cikkében *Telyakovskiĭ* [Tel64] az alábbi, cosinus sorokra vonatkozó becslést igazolta:

$$\int_0^\pi \Big|\sum_{k=0}^\infty a_k \cos kx\Big| dx \leq C\Big(\sum_{k=0}^\infty |\Delta a_k| + \sum_{n=2}^\infty \Big|\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\Delta a_{n-k} - \Delta a_{n+k}}{k}\Big|\Big). \tag{14}$$

Ha a jobb oldal véges, akkor a $\sum_{k=0}^\infty a_k \cos kx$ cosinus sor pontonként konvergens és a határfüggvény integrálható. A Telyakovskiĭ-féle és az azóta igazolt számos integrálhatósági feltétel közötti viszonyt vizsgálva kiderült, hogy a legtöbb esetben a Telyakovskiĭ-féle eredmény a jobb, azaz a másik feltétel

teljesülése esetén (14) is teljesül. Egyes feltételek esetén azt igazolták, hogy azok és a Telyakovskiĭ-féle feltétel nem összehasonlíthatók, vagyis egyik sem következik a másikból.
A Telyakovskiĭ-féle feltételből kiindulva bevezetünk Hardy-típusú tereket a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett függvények, valamint a sorozatok körében. Ezek segítségével Hardy-normaként karakterizáljuk a Telyakovskiĭ-féle feltételt. Ez a karakterizácó lehetőséget teremt a Telyakovskiĭ-féle feltételnek más ismert feltételekkel való összehasonlítására, valamint számos más rendszerre való egyszerű kiterjesztésére.
Bevezetve a sorozatokon értelmezett

$$(\mathcal{T}_{\mathbb{N}}a)_n=\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{a_{n-k}-a_{n+k}}{k}\qquad (a_k\in\mathbb{R},\ k,n\in\mathbb{N},\ \geq 2,\ (\mathcal{T}_{\mathbb{N}}a)_0=(\mathcal{T}_{\mathbb{N}}a)_1=0)$$

úgynevezett diszkrét Telyakovskiĭ-transzformációt, a Telyakovskiĭ-féle becslés az alábbi alakba írható:

$$\int_0^{\pi}\Big|\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx\Big|dx\leq C(\|\Delta\mathbf{a}\|_{\ell^1}+\|\mathcal{T}_{\mathbb{N}}(\Delta\mathbf{a})\|_{\ell^1})\,.$$

($\Delta\mathbf{a}=(\Delta a_k)$ a differenciák sorozata.) A Telyakovskiĭ-transzformációnak nevezett folytonos változat:

$$\mathcal{T}_{[0,\infty)}f(x)=\int_0^{x/2}\frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}dt=\int_{x/2}^{3x/2}\frac{f(t)}{x-t}dt\qquad (x>0)\,,$$

ahol $f:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvény, és az integrált az úgynevezett Cauchy-féle főérték értelemben vesszük.
Első ránézésre is szembetűnő a $\mathcal{T}_{[0,\infty)}$ Telyakovskiĭ-transzformációnak a $\mathcal{H}$ klasszikus Hilbert-transzformációval való hasonlósága. Emlékeztetőül:

$$\mathcal{H}f(x)=\int_0^{\infty}\frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}dt\qquad (x\in\mathbb{R})\,.$$

(Technikai okokból elhagytuk a definícióban szokásos $1/\pi$ szorzótényezőt.)
A Telyakovskiĭ- és a Hilbert-transzformáció közötti kapcsolat felderítése előtt egy példán keresztül rámutatunk a kettőjük közötti lényeges különbségre. Tekintsük ugyanis a $\chi_{[0,\delta]}$ $(\delta>0)$ karakterisztikus függvény transzformáltjait. Ismeretes, hogy $\|\mathcal{H}\chi_{[0,\delta]}\|_{L^1_{\mathbb{R}}}=\infty$. Másrészt azonban

$$(\mathcal{T}_{[0,\infty)}\chi_{[0,\delta]})(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x\leq 2\delta/3 \text{ vagy } x>2\delta\\ \ln(x/2)-\ln|\delta-x|, & 2\delta/3\leq x\leq 2\delta.\end{cases}$$

Következésképpen, $\|\mathcal{T}_{[0,\infty)}\chi_{[0,\delta]}\|_{L^1_{[0,\infty)}}=\delta\ln 3$, azaz $\mathcal{T}_{[0,\infty)}\chi_{[0,\delta]}$ integrálható.
A fenti transzformációk segítségével vezessük be a megfelelő Hardy-típusú tereket:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathbb{R}}&=\{f\in L^1_{\mathbb{R}}:\mathcal{H}f\in L^1_{\mathbb{R}}\}, & \|f\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}&=\|f\|_{L^1_{\mathbb{R}}}+\|\mathcal{H}f\|_{L^1_{\mathbb{R}}}\,,\\
\mathcal{H}_{[0,\infty)}&=\{f\in L^1_{[0,\infty)}:\mathcal{T}_{[0,\infty)}f\in L^1_{[0,\infty)}\}, & \|f\|_{\mathcal{H}_{[0,\infty)}}&=\|f\|_{L^1_{[0,\infty)}}+\|\mathcal{T}_{[0,\infty)}f\|_{L^1_{[0,\infty)}}\,,\\
\mathcal{H}_{\mathbb{N}}&=\{\mathbf{a}\in\ell^1:\mathcal{T}_{\mathbb{N}}\mathbf{a}\in\ell^1\}, & \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{N}}}&=\|\ a\|_{\ell^1}+\|\mathcal{T}_{\mathbb{N}}\ a\|_{\ell^1}\,.
\end{aligned}$$

Az alábbi eredményünkben tisztázzuk a $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ és a $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$ terek közötti viszonyt, valamint megmutatjuk, hogy $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$ atomos szerkezetű. Azt mondjuk, hogy az $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ függvény

a) első típusú $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$-atom, ha van olyan $\delta > 0$ szám, amelyre $f = \delta^{-1}\chi_{[0,\delta]}$,
b) második típusú $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$-atom, ha van olyan $I \subset [0,\infty)$ korlátos intervallum, hogy

$$\text{i)}\quad \operatorname{supp} f \subset I\,, \qquad \text{ii)}\quad \int_I f = 0\,, \qquad \text{iii)}\quad \|f\|_\infty \le |I|^{-1}\,,$$

ahol $|I|$ az I hosszát jelöli. A $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$-atomok halmazát $A_{[0,\infty)}$-val jelöljük.

3.14. Tétel ([Fri01]).

i) $f \in \mathcal{H}_{[0,\infty)}$ *akkor és csak akkor, ha vannak olyan* $f_k \in A_{[0,\infty)}$ *atomok és* $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ *együtthatók, amelyekkel az* f *előáll* $f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k$ *sor alakban. A sor összegzésekor a konvergenciát m.m. és* $L^1_{[0,\infty)}$*-normában értjük.*
Az f *normájára továbbá teljesül, hogy*

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{[0,\infty)}} \approx \inf \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|\,,$$

ahol az infímumot az összes ilyen lehetséges felbontásra vesszük.

ii) $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$ *izomorf a* $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ *térnek a páratlan függvények által alkotott alterével.*

Megemlítjük, hogy az ii)-beli ekvivalenciát korábban *Liflyand* [Lif93] is igazolta. A továbbiakban a $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$ tér diszkretizációjával foglalkozunk. A transzformáció szempontjából természetes módon adódik, hogy $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$ diszkrét megfelelőjének a $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ diszkrét Telyakovskiĭ-transzformáció által generált $\mathcal{H}_{\mathbb{N}}$ teret tekintsük. Másrészt azonban van legalább két másik természetesen adódó diszkretizációs lehetőség is. Vegyük példának az ℓ^p és az $L^p_{[0,\infty)}$ terek közötti kapcsolatot. Tekintsük ehhez az $\mathbf{a}$ valós sorozat által generált $(\mathcal{P}\mathbf{a})(x) = a_{[x]}$ $\quad (x \in [0,\infty))$ lépcsősfüggényt, ahol $[x]$ az x egész részét jelöli. Ismeretes, hogy $\mathbf{a} \in \ell^p$ $(1 \le p \le \infty)$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{P}\mathbf{a} \in L^p_{[0,\infty)}$, és ekkor $\|\mathbf{a}\|_{\ell^p} = \|\mathcal{P}\mathbf{a}\|_{L^p_{[0,\infty)}}$. Ezzel analóg módon is bevezethetjük a $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$ Hardy-tér egy diszkrét változatát. Az atomos felbontás segítségével egy másik mód is adódik. Nevezzük az a sorozatot atomnak, ha $\mathcal{P}a \in A_{[0,\infty)}$, azaz atom $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$-ben. Jelöljük az ilyen sorozatok halmazát $A_{\mathbb{N}}$-nel. Ezek után az $A_{\mathbb{N}}$-beli atomok segítségével is definiálhatunk egy sorozat Hardy-teret. Az alábbi tétel az mutatja, hogy mind a három természetes módon adódó diszkretizálás ugyanazt a teret határozza meg.

3.15. Tétel ([Fri01]). *Legyen* $\mathbf{a}$ *valós sorozat. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

i) $\mathbf{a} \in \mathcal{H}_{\mathbb{N}}$,
ii) $\mathcal{P}\mathbf{a} \in \mathcal{H}_{[0,\infty)}$,
iii) *alkalmas* $a^{(k)} \in A_{\mathbb{N}}$ *atomok és* $(\alpha_k) \in \ell^1$ *együttható sorozat segítségével* $\mathbf{a}$ *felírható* $\mathbf{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a^{(k)}$ *sorösszegként, ahol a sor konvergenciáját* ℓ^1*-normában értjük.*

A generált normák is ekvivalensek:

$$\|\mathcal{P}\mathbf{a}\|_{\mathcal{H}_{[0,\infty)}} \approx \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{N}}} \approx \inf \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| .$$

A jobb oldalon az infímumot az **a** *összes lehetséges atomos felbontására vesszük.*

Megemlítjük még, hogy Telyakovskiĭ–Hardy-terekkel kapcsolatos dualitási tételeket (*3.16., 3.17. Tételek*) is igazoltunk, azaz karakterizáltuk a megfelelő BMO, VMO típusú tereket.

A következő pontban az integrálhatósági feltételekkel kapcsolatos alkalmazásra mutatunk példákat. Előtte egy más jellegű alkalmazást szeretnénk megemlíteni, ami azt mutatja, hogy a Telyakovskiĭ-feltétel által motivált atomos Hardy-tér más területeken is jól alkalmazható. *Betancor, Dziubánski* és *Torrea* a [BetDziTor09] cikkben Bessel-operátorok által generált Hardy-terekkel foglalkoznak. A Hardy-terek elméletében fontos kérdés az adott Hardy-térnek transzformálttal, maximálfüggvénnyel, illetve atomos felbontással való jellemzése. A jellemzést az $A_{[0,\infty)}$ atomok segítségével sikerül megadniuk. *Betancor, Dziubánski* és *Torrea* cikke azt mutatja, hogy a $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$ atomos Hardy-tér olyan fontos operátorokra, mint például Bessel, Riesz, Poisson, Hankel, vonatkozó vizsgálatok során is hasznosnak bizonyul.

3.5. A Telyakovskiĭ-féle integrálhatósági feltétel általánosítása.

Ebben a pontban a Telyakovskiĭ-féle (14) integrálhatósági feltétel kiterjesztésével foglakozunk. Mint korábban már említettük, az eredetileg a cosinus rendszerre igazolt feltétel bizonyítása nagyban kihasználja a rendszer speciális tulajdonságait. Megmutatjuk, hogy a *3.14. Tételt* felhasználva egy egységes tárgyalásmód adható, aminek a segítségével a feltétel átvihető más ortonormált rendszerekre. Ebben döntő szerepe van a $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$ tér atomos felbontásának. A szóban forgó probléma esetén az atomos felbontás alkalmazásával a (14) feltétel egy Sidon-típusú egyenlőtlenséggel hozható kapcsolatba.

Legyen $\Phi = (\varphi_k)$ egy olyan ortonormált rendszer, amelynek φ_k $(k \in \mathbb{N})$ tagjai az $L^{\infty}_{[0,1)}$ térben vannak, és alkalmazzuk a szokásos $D_k^{\Phi} = \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_j$, $D_0^{\Phi} \equiv 0$ $(k \in \mathbb{N})$ jelölést.

3.19. Tétel ([Fri01]). *Tegyük fel, hogy a* Φ *rendszerhez van olyan* C_{Φ} *pozitív konstans, hogy tetszőleges* $a \in A_{\mathbb{N}}$ *atom esetén*

$$\int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{\infty} a_k D_k^{\Phi} \Big| \leq C_{\Phi} . \tag{15}$$

Ekkor

i) *minden olyan* **a** *nullsorozat esetén, amelyre* $\Delta\mathbf{a} \in \mathcal{H}_{\mathbb{N}}$ *van olyan* $f \in L^1_{[0,1)}$ *függvény, aminek* Φ*–Fourier sora az* **a** *által generált* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k$ Φ*–sor, és az* f *normájára igaz az* $\|f\|_1 \leq C_{\Phi} \|\Delta\mathbf{a}\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{N}}}$ *becslés;*

ii) *valamint, ha a* Φ *rendszerre még a*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |D_k^{\Phi}(x)| < \infty \qquad (m.m.\ x \in [0,1]) \tag{16}$$

feltétel is teljesül, akkor f *a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k$ *sor pontonkénti összegfüggvénye.*

A mondottak alapján a *3.19. Tétel* úgy értelmezhető, hogy a Telyakovskiĭ-féle integrálhatósági eredmény egy Sidon-típusú egyenlőtlenség következménye. Könnyű megmutatni, hogy a (16) feltétel teljesülése esetén az állítás meg is fordítható, azaz ezekre a rendszerekre a (15)-beli Sidon-típusú egyenlőtlenség és a Telyakovskiĭ-féle eredmény ekvivalensek.
Az első, és második típusú $A_{[0,\infty)}$ atomok fogalmával összhangban definiáljuk az F-, és az S-tulajdonság fogalmát, amelyeket eredetileg *Schipp Ferenc* [Sch92] vezetett be. A trigonometrikus rendszert példaként szem előtt tartva azt mondjuk, hogy a Φ rendszerre teljesül az F-tulajdonság (Fejér-tulajdonság), ha

$$\frac{1}{2^n}\Big\|\sum_{k=1}^{2^n} D_k^{\Phi}\Big\|_1 \le C \qquad (n\in\mathbb{N})\,. \tag{17}$$

Azt mondjuk továbbá, hogy a Φ rendszerre teljesül az S-tulajdonság (Sidon-tulajdonság), ha a

$$\frac{1}{2^n}\Big\|\sum_{k=1}^{2^n} c_k D_{k+\ell}^{\Phi}\Big\|_1 \le C \max_{0\le k<2^n}|c_k| \qquad (n,\ell\in\mathbb{N}) \tag{18}$$

becslés fennáll minden $\ell\in\mathbb{N}$ esetén, feltéve, hogy $\sum_{k=1}^{2^n} c_k = 0$.
Könnyű ellenőrizni, hogy a (15) egyenlőtlenség ekvivalens az (1) egyenlőtlenséggel $X=\mathcal{H}_{[0,1)}$ választással, és mindkettő egyenértékű azzal, hogy a Φ rendszerre teljesülnek az F- és S-tulajdonságok. Az i)-beli $\Delta\mathbf{a}\in\mathcal{H}_{\mathbb{N}}$ pedig természetesen a Telyakovskiĭ-féle feltétel. A fenti tétel tehát azt fejezi ki, hogy azon rendszerek esetén, amelyekre teljesülnek az F- és S-tulajdonságok a Telyakovskiĭ-féle feltétel integrálhatósági feltétel. A tételbeli eredmény lehetőséget ad a Telyakovskiĭ-féle eredménynek más rendszerekre történő kiterjesztésére. Ahelyett, hogy az adott rendszerre a szóban forgó integrálhatósági feltételt közvetlenül igazolnánk, kiválthatjuk ezt azzal, hogy helyette a (15) egyenlőtlenséget mutatjuk meg. Ez több előnnyel is jár. A (15) egyenlőtlenség igazolása az atomok egyszerű szerkezete miatt számos esetben könnyebb. Részeredmények is általában ismertek, ugyanis a (15) egyenlőtlenséget első típusú atomra tekintve a bal oldalon éppen a Fejér-féle magfüggvényt kapjuk. Másrészt, amint arra több példát is mutattunk, a Sidon-típusú egyenlőtlenségek más területeken is jól alkalmazhatók.
A fent mondottakat két példával támasztottuk alá. Az egyik a Walsh–Kaczmarz rendszerre, a másik pedig a $[0,\infty)$ intervallumon értelmezett cosinus és Walsh–Paley rendszerekre vonatkozik. A Walsh–Kaczmarz -rendszer esetén az alábbi tételt láttuk be.

3.21. Tétel ([Fri13a]). *Ha* $u=(u_k)\in\mathcal{H}_{\mathbb{N}}$, *akkor az alábbi konvergencia eredmények érvényesek a Walsh–Kaczmarz–Dirichlet magokból képezett* $U=\sum_{k=1}^{\infty} u_k D_k^{\mathcal{K}}$ *sorra.*

i) *Tetszőleges* $u=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a^{(k)}$ $\left(a^{(k)}\in A_{\mathbb{N}},\ \lambda_k\in\mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|<\infty\right)$ *atomos felbontás esetén a* $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\sum_{j=1}^{\infty}a_j^{(k)}D_j^{\mathcal{K}}$ *sor normában és m.m.*

is konvergál egy $g \in L^1_{[0,1)}$ *függvényhez. A* g *határfüggvény független a különböző atomos felbontásoktól, és* $\|g\|_1 \le \|\Delta u\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{N}}}$.

ii) *Jelölje* $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k D_k^{\mathcal{K}}$ *az* U *sor* n*-edik* ($n \in \mathbb{N}, n \ge 1$) *részletösszegét. Ekkor a részletösszegek* (U_{2^n}) *részsorozata* $L^1_{[0,1)}$*-normában és m.m. is konvergál az* i)*-beli* g *függvényhez.*

A második példához jelölje Ψ az $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett cosinus és Walsh-rendszerek valamelyikét, $\widehat{g^{\Psi}}$ pedig egy $g \in L^1_{[0,\infty)}$ függvény Ψ-transzformáltját. A Ψ rendszerekre az alábbi integrálhatósági tételt igazoltuk.

3.22. Tétel ([Fri01]). *Legyen* $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ *olyan lokálisan abszolút folytonos függvény, amelyre* $f' \in \mathcal{H}_{[0,\infty)}$, *és* $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. *Ekkor van olyan* $g \in L^1_{[0,\infty)}$ *függvény, amelyre*

$$\|g\|_{L^1_{[0,\infty)}} \le C\|f'\|_{\mathcal{H}_{[0,\infty)}} \qquad \text{és} \qquad \widehat{g^{\Psi}} = f\,,$$

továbbá $g(x) = \lim_{u\to\infty} \int_0^u f(t)\psi_x(t)dt$ (*m.m.* $0 \le x < \infty$).

A cosinus transzformáltra vonatkozóan ezt az eredményt eredetileg *Liflyand* [Lif93] igazolta, amelynek során támaszkodott a trigonometrikus rendszer speciális tulajdonágaira. A *3.22. Tételre* általunk adott bizonyítás esetében a fő motiváció annak megmutatása volt, hogy az úgynevezett atomos technika segítségével a két rendszer egységesen kezelhető. Ezen az alapon lehetővé vált a tételbeli eredménynek a két modellen túli további rendszerekre való kiterjesztése is.

A 3. fejezetben a szerzőnek a [Fri93], [Fri95b], [Fri96], [Fri97a], [Fri97b], [Fri99], [Fri00],[Fri01], [Fri13a] és a James Daly-vel közös [DalFri10] cikkeiben igazolt eredményei kerültek feldolgozásra.

4. Erős szummáció, erős approximáció

A 4. fejezetben ortonormált rendszerek Fourier-sorának erős szummációs és erős approximációs tulajdonságaival foglalkozunk. A trigonometrikus Fourier-sorok erős szummációjával kapcsolatos első eredményt *Hardy* és *Littlewood* igazolták 1913-beli cikkükben. Az erős approximáció kérdésének a vizsgálata csak jóval később, 1963-ban kezdődött. A kezdeményezés *Alexits György* nevéhez fűződik. A magyar harmonikus analízis iskola azóta is számos eredménnyel gazdagította az erős approximáció elméletét. Ezzel kapcsolatban *Leindler László* [Lei85] 1985-ben írt monográfiájára utalunk, amiben a szerző az erős approximáció elméletének addigi fejlődését foglalta össze.
Az 4.1. pont egy általánosan megfogalmazott dualitási kapcsolatra vonatkozó eredményt tartalmaz. Ebből megfelelő szereposztással az adott rendszerre vonatkozó Sidon-típusú egyenlőtlenségek és a rendszer szerinti Fourier-sorok erős szummációs, illetve erős approximácós tulajdonságai közötti összefüggések adódnak. Ezt a kapcsolatot alkalmazzuk a 4.2. pontban, ahol olyan erős

szummációs tételeket igazolunk, amik speciális esetként tartalmazzák a trigonometrikus rendszerre vonatkozó klasszikus eredményeket. A fejezet 3. pontjában erős approximációs kérdésekkel foglalkozunk. A vizsgálatokban fő szerep jut az erős oszcilláció fogalmának. Ezzel egy adott index intervallumon a Fourier-részletösszegek és az index intervallumra vonatkoztatott általánosított de la Vallée Poussin közép közötti eltérést jellemezzük. Az atomos felbontás segítségével megmutatjuk, hogy alapvető szummációs eredmények, köztük a Fejér-szummáció, hogyan generálnak erősebb, sőt több esetben tovább már nem is javítható eredményeket.

4.1. Dualitási reláció. A fejezetben végig a $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ortonormált rendszerről feltesszük, hogy az elemei $L^\infty_{[0,1)}$-ben vannak. Az erős szummációval és approximációval kapcsolatos fogalmaknak a definiálásához olyan X Banach-tereket alkalmazunk, amik eleget tesznek néhány természetesen adódó kritériumnak, mint például $X \subset L^1_{[0,1)}$, és hogy a diadikus lépcsősfüggvények halmaza része X-nek. Az ily módon származtatott fogalmak lefedik azokat az eseteket, amikre az eddig ismert eredmények vonatkoznak.
A *4.1. Tételben* egy ekvivalenciát fogalmazunk meg általános formában, amelynek megfelelő szereposztással az egyik oldala erős szummációs tulajdonságoknak, a másik pedig Sidon-típusú egyenlőtlenségeknek feleltethető meg.

4.2. Erős szummáció. Jelölje $\mathcal{C}^\Phi$ a Φ lineáris burkának lezártját $L^\infty_{[0,1)}$-ben, és legyen Y egy, az előző pontban említett X Banach tér duálisa. Ekkor

$$\left\|\Gamma\left(S_1^\Phi f(x) - f(x), \dots, S_{2^n}^\Phi f(x) - f(x)\right)\right\|_Y \qquad (f \in \mathcal{C}^\Phi,\ x \in [0,1),\ n \in \mathbb{N})$$

az f függvény Φ-Fourier-sorának x pontbeli 2^n-edik erős Y-közepe.
Ha például $Y = L^p_{[0,1)}$ $(1 \le p < \infty)$, akkor az erős p-közepet kapjuk:

$$\left\|\Gamma\left(S_1^\Phi f(x) - f(x), \dots, S_{2^n}^\Phi f(x) - f(x)\right)\right\|_p = \left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} |S_k^\Phi f(x) - f(x)|^p\right)^{1/p}.$$

Azt mondjuk, hogy a Φ rendszer erős Y-szummábilis az x-ben, ha minden $f \in \mathcal{C}^\Phi$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\Gamma\left(S_1^\Phi f(x) - f(x), \dots, S_{2^n}^\Phi f(x) - f(x)\right)\right\|_Y = 0. \tag{19}$$

Jelölje $\mathfrak{D}_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x)\varphi_k(t)$ $(0 \le x, t < 1)$ a Φ Dirichlet-féle magfüggvényeit. Ekkor a következő dualitási kapcsolat áll fenn az erős szummáció és a Sidon-típusú egyenlőtlenségek között.

4.2. Tétel ([FriSch98]). *Legyen* $x \in [0,1)$. *Ekkor a* Φ *rendszerre vonatkozó alábbi két tulajdonság ekvivalens:*

i) Φ *erős* Y*-szummábilis* x*-ben;*
ii) *a* (19) *feltétel teljesül minden* Φ *polinomra és*

$$\frac{1}{2^n}\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{2^n} c_k \mathfrak{D}_k^\Phi(x,t)\right| dt \le C\|\Gamma(c_1, \dots, c_{2^n})\|_X \qquad (c_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}). \tag{20}$$

A trigonometrikus rendszert és az $X = L^p_{[0,1)}$ esetet véve i) a Hardy–Littlewood-féle [HarLit13] erős szummációs eredménynek, míg ii) a Bojanic–Stanojević-féle [BojSta82] Sidon-típusú egyenlőtlenségnek felel meg. A *4.2. Tétel* dualitási tétel következményeként az ismert Sidon-típusú egyenlőtlenségek és az erős szummációs tételek párba állíthatók, köztük ekvivalencia állítható fel. A Walsh-rendszerre korábban igazolt Sidon-típusú egyenlőtlenségekből a dualitási tétel segítségével új, addig nem bizonyított erős szummációs eredményeket kapunk. Ezek a Walsh- és a trigonometrikus eset közti, ebben a vonatkozásban fennálló analógiát mutatják.
A Φ rendszer szerinti $\mathfrak{D}_n$ Dirichlet-féle magfüggvényekre általánosítva a korábban bevezetett F- és S-tulajdonság fogalmát azt mondjuk, hogy a Φ rendszer teljesíti az $\mathfrak{F}$ tulajdonságot az x pontban, ha

$$\frac{1}{2^n}\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{2^n} \mathfrak{D}_k^{\Phi}(x,t)\right| dt \le C \qquad (n \in \mathbb{N})\,. \tag{21}$$

Továbbá azt mondjuk, hogy a Φ rendszerre teljesül az $\mathfrak{S}$-tulajdonság az x pontban, ha

$$\frac{1}{2^n}\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{2^n} c_k \mathfrak{D}_{k+\ell}^{\Phi}(x,t)\right| dt \le C \max_{0\le k<2^n} |c_k| \qquad (n,\ell \in \mathbb{N}) \tag{22}$$

minden $\ell \in \mathbb{N}$ esetén, feltéve, hogy $\sum_{k=1}^{2^n} c_k = 0$. Diadikus $\mathfrak{S}$-tulajdonságról beszélünk, ha a (22) egyenlőtlenség teljesülését csak $\ell = j2^n$ $(j \in \mathbb{N})$ típusú indexekre követeljük meg.
A $\mathfrak{F}$ és a $\mathfrak{S}$-tulajdonságok által generált Sidon-típusú egyenlőtlenségeken keresztül exponenciális közepekre vonatkozó eredményt igazoltunk.

4.4. Tétel ([FriSch98]). *Legyen $x \in [0,1)$ és tegyük fel, hogy a Φ rendszerre teljesül az $\mathfrak{F}$- és a diadikus $\mathfrak{S}$-tulajdonság az x pontban. Ekkor tetszőleges $A > 0$ és $f \in \mathcal{C}^{\Phi}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp(A|S_k^{\Phi} f(x) - f(x)|) - 1 = 0\,.$$

A fordított Sidon-típusú egyenlőtlenségek segítségével ([Fri93], [Fri95a], [Fri13a]) sikerült igazolni az exponenciális erős szummációs tétel optimális tulajdonságát a trigonometrikus, a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerekre.

4.5. Tétel ([FriSch98], [Fri13a]) *Jelölje Φ a trigonometrikus, a Walsh–Paley-, a Walsh–Kaczmarz-rendszerek valamelyikét. Legyen ψ olyan, a $[0,\infty)$ intervallumon értelmezett monoton növekedő függvény, amelyre $\lim_{u\to 0^+} \psi(u) = 0$. A ψ által generált*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi\big(\big|S_k^{\Phi} f(x) - f(x)\big|\big) = 0 \qquad (f \in \mathcal{C}^{\Phi},\ 0 \le x < 1) \tag{23}$$

erős szummációs tulajdonság akkor és csak akkor áll fenn, ha van olyan $A > 0$ *szám, amelyre* $\psi(t) \leq \exp(At)$ $(0 \leq t < \infty)$.
Ebben az esetben a konvergencia egyenletes x*-ben.*

Megjegyezzük, hogy a trigonometrikus rendszerre a *4.4., 4.5. Tételeket,* utóbbit a ψ függvény folytonossága esetén, *Totik Vilmos* [Tot80] már korábban bebizonyította. A kétdimenziós változatokat *Gogogladze* [Gog09], valamint *Goginava* és *Gogoladze* [GogGog12] igazolták a trigonometrikus, illetve a Walsh–Paley-rendszerre.

4.3. Erős approximáció. Az erős osszcillációra vonatkozó dualitási tételben az eltolt indexű Sidon-típusú egyenlőtlenségekkel való ekvivalencia tulajdonságot igazoljuk. Ennek segítségével az erős közepek konvergencia sebességére vonatkozó tételeket sikerült bizonyítani. Az alábbi tétel az említett dualitási kapcsolatot fejezi ki az erős oszcilláció és az eltolt indexű Sidon-típusú egyenlőtlenségek között.

4.6. Tétel ([FriSch98]). *Legyen* $0 \leq x < 1$. *Az alábbi két tulajdonság ekvivalens:*

i) *van olyan* C *konstans, hogy tetszőleges* $j, n \in \mathbb{N}$ *indexek és* $c_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, 2^n)$ *együtthatók esetén*

$$\frac{1}{2^n}\int_0^1 \Big|\sum_{k=1}^{2^n} c_k \mathfrak{D}^{\Phi}_{k+j2^n}(x,t)\Big|\, dt \leq C\|\Gamma(c_1, \ldots, c_{2^n})\|_X ,$$

feltéve, hogy $\sum_{k=1}^{2^n} c_k = 0$;

ii) *van olyan* C *konstans, hogy tetszőleges* $j, n \in \mathbb{N}$ *indexek és* $f \in \mathcal{C}^{\Phi}$ *függvény esetén*

$$\Big\|\Gamma\big(S^{\Phi}_{j2^n+1}f(x) - V^{\Phi}_{2^n,j2^n}f(x), \ldots, S^{\Phi}_{(j+1)2^n}f(x) - V^{\Phi}_{2^n,j2^n}f(x)\big)\Big\|_Y \leq C E^{\Phi}_{j2^n} f\,.$$

(A tétel érvényben marad akkor is, ha mind i)-ben, mind pedig ii)-ben $j2^n$*-et tetszőleges* ℓ *természetes számmal helyettesítjük.)*
$E^{\Phi}_n f$ az $f \in \mathcal{C}^{\Phi}$ függvénynek a legfeljebb n-edfokú Φ-polinomokkal való legjobb egyenletes közelítését jelöli.

A *4.6. Tétel* alkalmazására példaképpen az alábbi erős approximációs eredményt ismertetjük, amelyet a Hardy- és a BMO-terek közötti dualitási kapcsolat felhasználásával igazoltunk.

4.7. Tétel ([FriSch98]). *Az alábbi három tulajdonság egymással ekvivalens:*

i) *a* Φ *rendszerre teljesül az egyenletes* $\mathfrak{S}$*-tulajdonság;*

ii) *van olyan* C *konstans, amelyre*

$$\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} \big|S^{\Phi}_{k+\ell}f(x) - V^{\Phi}_{r,\ell}f(x)\big| \leq C E^{\Phi}_{\ell} f \qquad (0 \leq x < 1,\ \ell, r \in \mathbb{N},\ f \in \mathcal{C}^{\Phi})\,;$$

iii) *van olyan* C *konstans, amelyre*

$$\big\|\Gamma\big(S^{\Phi}_{\ell+1}f(x) - V^{\Phi}_{r,\ell}f(x), \ldots, S^{\Phi}_{\ell+r}f(x) - V^{\Phi}_{r,\ell}f(x)\big)\big\|_{\mathcal{BMO}_{[0,1)}} \leq C\, E^{\Phi}_{\ell} f$$

$$(0 \leq x < 1,\ \ell, r \in \mathbb{N},\ f \in \mathcal{C}^{\Phi}).$$

(Az egyenletes diadikus $\mathfrak{S}$-tulajdonságnak az ii) és iii)-beli $\ell = j2^n$ $(j, n \in \mathbb{N})$ *indexválasztás felel meg.)*
Az ii)-beli egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezést általánosított Fejér-oszcillációnak nevezhetjük. A tétel ii) és iii) részének ekvivalenciája azt jelenti, hogy az általánosított Fejér-oszcilláció ii)-beli approximációs tulajdonsága maga után vonja azt a látszólag erősebb eredményt, hogy a BMO oszcillációk szintén a legjobb közelítés sebességével konvergálnak.
Megjegyezzük, hogy a *4.7. Tételből* számos, a Fourier-sorok erős approximációjára vonatkozó olyan eredmény adódik következményként, amelyek többsége a trigonometrikus rendszer esetén ismert és klasszikusnak számít.

A fejezetben a *Schipp Ferenccel* közösen írt [FriSch95], [FriSch97], [FriSch98] cikkek eredményeit dolgoztuk fel abban az általánosabb megfogalmazásban, ahogy az [FriSch98]-ben szerepel.

5. Hörmander-Mihlin-multiplierek

A multiplier operátorok fontosságát alátámasztja az elméleti és gyakorlati téren, például a differenciálegyenletek elméletében és a jelfeldolgozásban is játszott szerepük. Elég csak azt megemlítenünk, hogy a jelfeldolgozás egyik fontos fogalma a szűrő nem más, mint a multipliernek az ottani szaknyelvben meghonosodott elnevezése. Egy φ komplex számsorozat esetén az általa generált T_φ multiplier transzformációt a Fourier-együtthatók terén a $\widehat{T_\varphi f}_k = \varphi_k \widehat{f}(k)$ $(k \in \mathbb{Z},\ f \in L^1_{2\pi})$ egyenlőséggel definiáljuk. A terület legismertebb klasszikus eredménye Marcinkiewicz-nek a trigonometrikus multiplier operátorok L^p-korlátosságára $(p > 1)$ adott klasszikus elégséges feltétele. Ebben azt igazolta, hogy ha egy korlátos φ sorozatra teljesül a $\sup_{n\geq 0} \sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} |\Delta\varphi_k| < \infty$ feltétel, akkor a T_φ mutiplier operátor korlátos az $L^p_{2\pi}$ $(1 < p < \infty)$ téren. A Walsh-rendszerre vonatkozó megfelelőjét *Wo-Sang Young* [WoS94] látta be. Mi a Marcinkiewicz-feltételnél erősebb ún. Hörmander-Mihlin-feltétellel foglalkozunk:

$$\sup_{n\geq 0} 2^n \left(\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} \frac{|\Delta\varphi_k|^r}{2^n} \right)^{1/r} < \infty \qquad (1 \leq r < \infty).$$

Ebből az egydimenziós esetben a Marcinkiewicz-feltétel speciális esetként adódik, ezért rövidítésként az MHM betűhármast fogjuk használni. Az erősebb feltétel is nyilvánlvalóan elégséges az operátorok L^p-korlátossságához $(p > 1)$, de természetes módon vetődik fel ebben a vonatkozásban a Hardy-tereken való korlátosság problémája. A fejezetben ismertetett eredmények ezen felvetés köré csoportosíthatók. Az egyes pontokban különböző rendszer-függvénytér modelleket tárgyalunk, úgymint trigonometrikus rendszer–valós periodikus Hardy-tér, Walsh-rendszer–diadikus Hardy-tér, Walsh-rendszer a

$[0,\infty)$ félegyenesen–diadikus Hardy-tér a félegyenesen, kétdimenziós Walsh-rendszer–kétdimenziós diadikus Hardy-tér. A bizonyítások során az egyes modellekben alkalmazott módszerekbeli, tárgyalásmódbeli eltérések meghaladták azt a mértéket, aminél még érdemes lett volna az egységesítésre való törekvés.

5.1. Trigonometrikus multiplierek a $H_{2\pi}$ téren. Ebben a pontban a trigonometrikus rendszerrel kapcsolatban először azt mutattuk meg, hogy a Marcinkiewicz-feltételnél erősebb kikötés, nevezetesen, hogy a multiplier sorozat korlátos változású sem biztosítja az operátor korlátosságát a periodikus $H_{2\pi}$ Hardy-téren.

5.1. Tétel ([DalFri05]) *Van olyan korlátos változású* φ, $\varphi_{-k} = \overline{\varphi_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ *sorozat, amelyre a* T_φ *multiplier operátor nem korlátos* $H_{2\pi}$*-ből* $L^1_{2\pi}$*-be.*

Ezek után igazoltuk, hogy tetszőleges $r > 1$ esetén az MHM-feltétel elégséges a mutipliereknek a valós periodikus Hardy-téren való korlátosságához.

5.2. Tétel ([DalFri05]) *Tegyük fel, hogy a* $\varphi_{-k} = \overline{\varphi_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ *feltételnek megfelelő* φ *sorozat korlátos. Ha valamilyen* $r > 1$ *számra*

$$\sup_{n\geq 0} 2^n \left(\sum_{2^n \leq |k| < 2^{j+1}} \frac{|\Delta\varphi_k|^r}{2^j} \right)^{1/r} < \infty ,$$

akkor T_φ *korlátos a* $H_{2\pi}$ *téren.*

5.2. Multiplierek a diadikus $\mathbb{H}^p_{[0,1)}$ és a periodikus $H^p_{2\pi}$ tereken. Először a Walsh-esetet vizsgáltuk. A fenti trigonometrikus eredmények analogonján túl az MHM-feltételnek a diadikus $\mathbb{H}^p_{[0,1)}$ $(0 < p \leq 1)$ tereken való korlátosságával is foglalkoztunk. Az erre vonatkozó eredményt fogalmaztuk meg a következő tételben.

5.4. Tétel ([DalFri03]). *Legyen* $1 < r \leq 2$ *és* $p > r/(2r-1)$. *Ha* φ *olyan korlátos sorozat, amelyre*

$$\sup_{n\geq 0} 2^n \left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{|\Delta\varphi_k|^r}{2^j} \right)^{1/r} < \infty ,$$

akkor T_φ *korlátos a* $\mathbb{H}^p_{[0,1)}$ *téren.*

Az MHM feltétellel kapcsolatban kiemmeljük, hogy az közvetlenül a multiplier sorozat tagjaira vonatkozik, míg a korábban ismert feltételek mindegyike a magfüggvény Walsh–Fourier sorának diadikus blokkjainak nagyságrendjére vonatkozott. Ezt ugyan közvetve természetesen a φ_k $(k \in \mathbb{N})$ tagok határozzák meg, de maguk a feltételbeli mennyiségek nem fejezhetők ki közvetelenül az együtthatókból. Ilyen típusú eredmények találhatók például a Daly-Phillips [DalPhi98a], [DalPhi98b], Kitada [Kit87], Onneweer-Quek [OnnQue89], és Simon [Sim85] cikkekben.
Megmutattuk azt is, hogy az *5.4. Tételbeli* eredmény éles abban az értelemben, hogy a p-re tett $p > r/(2r-1)$ feltételben a jobb oldalon lévő $r/(2r-1)$ szám nem csökkenthető.

5.6. Tétel ([DalFri03]). *Legyen* $1 \leq r \leq 2$. *Ha* $p < r/(2r-1)$, *akkor van olyan korlátos* φ *sorozat, amely kielégíti az* MHM*-feltételt, de* T_φ *nem korlátos* $\mathbb{H}^p_{[0,1)}$*-ből* $L^p_{[0,1)}$*-be.*

Ismeretes, hogy $1 < p < \infty$ esetén az $L^p_{[0,1)}$ Lebesgue- és a $\mathbb{H}^p_{[0,1)}$ diadikus Hardy-terek ekvivalensek, ezért az MHM-feltétel egyszerre tekinthető a $\mathbb{H}^p_{[0,1)}$ térre és az $L^p_{[0,1)}$ térre vonatkozó multiplier feltételnek is. A $\mathbb{H}^p_{[0,1)}$ vonatkozásában az *5.4. Tétel* azt mutatja, hogy az MHM-feltétel alkalmazásával a korlátosság kiterjeszthető a $p \leq 1$ tartományra is. Ezzel szemben az $L^p_{[0,1)}$ modellt véve azt találtuk, hogy függetlenül az MHM-feltételbeli r értékétől a korlátosság nem terjeszthető ki már az $L^1_{[0,1)}$ térre sem. Ez azt mutatja, hogy ebben a vonatkozásban valóban a Hardy-térskála a természetes választás.

5.8. Tétel ([DalFri03]). *Minden* $1 \leq r \leq \infty$ *esetén van olyan korlátos* φ *sorozat, amelyik kielégíti az* MHM*-feltételt, illetve* $r = \infty$ *esetben annak a szokásos módon vett megfelelőjét, de* T_φ *nem korlátos az* $L^1_{[0,1)}$ *téren.*

5.3. Hörmander-multiplierek a Walsh-transzformáltakra. A 3. pontban az *5.4., 5.6. Tételeknek* a Walsh-transzformáltra vonatkozó analóg eredményeit igazoltuk.

5.4. Kétdimenziós diadikus Hörmander-multiplierek. A fejezet utolsó, 4. pontjában a kétdimenziós problémával foglalkozunk. A MHM-feltétel természetes módon általánosítható erre az esetre. Az MHM-feltételnek eleget tevő φ kettős sorozatoknak megfelelő T_φ Walsh–Paley multiplier operátornak a $\mathbb{H}^{p,r}_{[0,1)^2}$ térből az $L^{p,r}_{[0,1)^2}$ Lorentz térbe való korlátosságát vizsgáltuk, ahol $\mathbb{H}^{p,r}_{[0,1)^2}$ a diadikus $\mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$ martingál Hardy-térből származtatott Hardy–Lorentz teret jelöli. A kétdimenziós MHM-feltételre vonatkozó eredményünk a következő.

5.14. Tétel ([DalFri08]). *Legyen* $1 < q \leq 2$ *és* $p > q/(2q-1)$. *Tegyük fel, hogy a korlátos* φ *sorozat teljesíti a* q*-kitevős kétdimenziós* MHM*-feltételt. Ekkor*

i) T_φ *korlátos* $\mathbb{H}^{p,r}_{[0,1)^2}$*-ből* $L^{p,r}_{[0,1)^2}$*-be* $(0 < r \leq \infty)$;

ii) *a* T_φ *operátor gyengén* $(\mathbb{H}^\sharp_{[0,1)^2}, L^1_{[0,1)^2})$ *típusú.*

A $\mathbb{H}^\sharp_{[0,1)^2}$ teret az úgynevezett hibrid maximálfüggvény segítségével értelmezzük:

$$f^\sharp(x,y) = \sup_n |S_{2^n} f_y(x)| \qquad (f \in L^1_{[0,1)^2},\ 0 \leq x,\ y < 1),$$

ahol $f_y : [0,1) \mapsto \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x,y)$. Ekkor

$$\mathbb{H}^\sharp_{[0,1)^2} = \{f \in L^1_{[0,1)^2} : f^\sharp \in L^1_{[0,1)^2}\}, \quad \|f\|_{H^\sharp_{[0,1)^2}} = \|f^\sharp\|_1 .$$

Mivel $\mathbb{H}^{p,p}_{[0,1)^2} = \mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$ és $L^{p,p}_{[0,1)^2} = L^p_{[0,1)^2}$, ezért az *5.14. Tétel* speciális eseteként adódik, hogy T_φ korlátos $\mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$-ből $L^p_{[0,1)^2}$-be $(q/(2q-1) < p \leq 1)$. *Simon Péter* [Sim98b] megmutatta, hogy ha egy multiplier korlátos $\mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$-ből $L^p_{[0,1)^2}$-be, akkor korlátos a $\mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$ téren is. Igaz tehát az egydimenziós *5.4. Tételnek* az alábbi kétdimenziós megfelelője.

5.15. Tétel ([DalFri08]). *Ha a korlátos* φ *sorozat valamilyen* $1 < q \leq 2$ *esetén kielégíti a kétdimenziós* MHM*-feltételt és* $p > q/(2q-1)$*, akkor* T_φ *korlátos a* $\mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$ *Hardy-téren.*

A feltétel élességével kapcsolatban megjegyezzük, hogy az könnyen levezethető az egydimenziós esetre a [DalFri03] cikkben adott konstrukciónkból.
Megemlítjük, hogy az *5.14. Tétel* bizonyítása nem származtatható az egydimenziós eset duplikált alkalmazásával. Az *5.4. Tétel*, azaz az egydimenziós változat bizonyításában azt igazoltuk, hogy teljesül *Kitada*-nak [Kit87] egy, a korlátosságra vonatkozó elégséges feltétele. A kétdimenziós *5. Tétel* bizonyításakor egészen más megközelítést alkalmazunk. Nevezetesen, azt mutatjuk meg, hogy T_φ úgynevezett $\mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$-kvázi-lokális operátor. Ebből már *Weisz Ferenc* [Wei94] általános meggondolásai alapján következik a tétel. Kicsit leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a Hardy-terekre vonatkozó eredmények bizonyítása többnyire a tér atomos struktúráján alapul. A kétdimenziós esetben a $\mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$ atomos struktúrája lényegesen bonyolultabb az egydimenziós esetnél, mert a tér elemeit általában nem lehet előállítani olyan atomok összegeként, amelyeknek a tartója téglalap. Nevezzük a továbbiakban az ilyen atomokat téglalap atomoknak. Kvázi-lokális operátorok esetén azonban a helyzet egyszerűsödik. Ekkor ugyanis a korlátosságot elég csak a téglalap atomokon ellenőrizni. A p-kvázi-lokális tulajdonság (ld. pl. [Wei94]) definíciójához tegyük fel, hogy T_φ egy, az $L^2_{[0,1)^2}$ téren korlátos szublineáris operátor. Továbbá adott $I = I_1 \times I_2$ diadikus téglalap esetén vezessük be az I^r $(r \in \mathbb{N})$ diadikus téglalapot a következőképpen: $I^r = I_1^r \times I_2^r$, ahol I_j^r az a diadikus intervallum, amelyre $I_j \subset I_j^r$ és $\left|I_j^r\right| / |I_j| = 2^r$ $(j = 1, 2)$. Ekkor azt mondjuk, hogy a T_φ operátor $\mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$-kvázi-lokális, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden olyan $\mathbb{H}^p_{[0,1)^2}$-beli a téglalapra atomra, amelyre $\operatorname{supp} a \subset I$ teljesül az alábbi becslés

$$\int_{[0,1)^2 \setminus I^r} |T_\varphi a|^p \leq C_p 2^{-\delta r} \qquad (r \in \mathbb{N})\,. \tag{24}$$

Ebben a fejezetben a szerzőnek *James Daly*-vel közösen elért, a [DalFri03], [DalFri04a], [DalFri04b], [DalFri05], [DalFri08] cikkekben, valamint az önálló, [Fri13b] cikkben publikált eredményei szerepelnek.

Hivatkozások

[AbuTor08] Abu-Shammala, W.; Torchinsky, A. *From dyadic* Λ_α *to* Λ_α, Illinois J. Math. **52** (2008), 681–689.

[AubFou93] Aubertin, B.; Fournier, J. *Integrability theorems for trigonometric series,* Studia Math. **107** (1993), 33–59.

[BetDziTor09] Betancor, J.J.; Dziubánski, J.; Torrea, J.L. *On Hardy spaces associated with Bessel operators,* Journal d'Analyse Mathématique **107** (2009), 195–219.

[BojSta82] Bojanic, R.; Stanojević, Č. *A class of* L^1*-convergence,* Trans. Amer. Math. Soc. **269** (1982), 677–683.

[BraSta84] Bray, W.O.; Stanojević, Č. *Tauberian L_1-convergence classes of Fourier series II,* Math. Ann. **269** (1984), 469–486.

[DalFri03] Daly, J.; Fridli, S. *Walsh multipliers for dyadic Hardy spaces,* Appl. Anal. **82** (2003), 689–700.

[DalFri04a] Daly, J.; Fridli, S. *Translation invariant operators on Hardy spaces over Vilenkin groups,* Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhzi. (N.S.) **20** (2004), 131–140.

[DalFri04b] Daly, J.; Fridli, S. H^p *multipliers on the dyadic field,* Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Comput. **24** (2004), 275–284.

[DalFri05] Daly, J.; Fridli, S. *Trigonometric multipliers on* $H_{2\pi}$*,* Can. Math. Bull. **48** (2005), 370–381.

[DalFri08] Daly, J.; Fridli, S. *Hörmander multipliers on two-dimensional dyadic Hardy spaces,* J. Math. Anal. Appl. **348** (2008), 977–989.

[DalFri10] Daly, J.; Fridli, S. *The dual spaces of certain Hardy spaces,* Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Comput. **33** (2010), 123–136.

[DalPhi98a] Daly, J.; Phillips, K. *Walsh multipliers and square functions for the Hardy space* H^1, Acta Math. Hungar., **79** (4) (1998), 311–327.

[DalPhi98b] Daly, J.; Phillips, K. *A note on* H^1 *multipliers for locally compact Vilenkin groups*, Canad. Math. Bull., **41** (4) (1998), 392–397.

[Dav80] Davis, B.J. *Hardy spaces and rearrangements,* Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 211–233.

[Fom78] Fomin, G.A. *A class of trigonometric series,* Mat. Zametki **23** (1978), 213–222. (oroszul)

[Fri93] Fridli, S. *An inverse Sidon type inequality,* Studia Math. **105** (1993), 283–308.

[Fri95a] Fridli, S. *An inverse Sidon type inequaliy for the Walsh system,* J. Math. Anal. Appl. **193** (1995), 715–736.

[Fri95b] Fridli, S. *Mean convergence of Walsh-Fourier series,* Indian J. Math. **37** (1995), 95–101.

[Fri96] Fridli, S. *Integrability and* L^1*-convergence of trigonometric and Walsh series,* Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **16** (1996), 149–172.

[Fri97a] Fridli, S. *Coefficient condition for* L^1*-convergence of Walsh-Fourier series,* J. Math. Anal. Appl. **210** (1997), 731–741.

[Fri97b] Fridli, S. *On the* L^1*-convergence of Fourier series,* Studia Math. **125** (1997), 161–174.

[Fri99] Fridli, S. *On he integrability of Walsh-Fourier transform,* Math. Pannon. **10** (1999), no. 1, 93–102.

[Fri00] Fridli, S. *Transition from the dyadic to the real nonperiodic Hardy space,* Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhzi. (N.S.) **16** (2000), 1–8. (electronic)

[Fri01] Fridli, S. *Hardy spaces generated by an integrability condition,* J. Approx. Theory **113** (2001), no. 1, 91–109.

[Fri08] Fridli, S. *Applications of Sidon type inequalities,* Chapter 8, in Walsh and Dyadic Analysis, Proceedings of the Workshop, October 18-19, 2007, Niš, Serbia, ISBN 978-86-85195-47-1, Publisher Elektronski fakultet, Niš, 2007, 95–107.

[Fri13a] Fridli, S. *On integrability and strong summability of Walsh–Kaczmarz series,* Analysis Mathematica, (közlésre benyújtva).

[Fri13b] Fridli, S. *Trigonometric Hörmander–Mihlin multipliers in Hardy spaces,* J. Appr. Th. (közlésre benyújtva).

[FriManSid08] Fridli, S.; Manchanda, P.; Siddiqi, A. H. *Approximation by Walsh-Nörlund means,* Acta Sci. Math. (Szeged) **74** (2008), 593–608.

[FriSch95] Fridli, S.; Schipp, F. *Strong summability and Sidon type inequalities,* Acta Sci. Math. (Szeged) **60** (1995), 277–289.

[FriSch97] Fridli, S.; Schipp, F. *Strong summability, approximation and* L^1*-convergence,* Fourier analysis, approximation theory and applications (Aligarh, 1993), New Age, New Delhi (1997), 77–90.

[FriSch98] Fridli, S.; Schipp, F. *Strong approximation via Sidon type inequalities,* J. Approx. Theory **94** (1998), 263–284.

[Gat93] Gát, Gy. *Investigations of certain operators with respect to the Vilenkin system,* Acta Math. Hung. **61** (1993), 131–149.

[Gog09] Gogoladze, L. *On the exponential uniform strong summability of multiple trigonometric Fourier series,* Georgian Math. J. **16** (2009), 517–532.

[GogGog12] Goginava, U.; Gogoladze, L. *Strong approximation of two-dimensional Walsh Fourier series,* Studia Sci. Math. Hungar. **49** (2012), 170–188.

[GroSta95] Grow, D.E.; Stanojević, Č.V. *Convergence and the Fourier character of trigonometric transforms with slowly varying convergence moduli,* Math. Ann. **302** (1995), 433–472.

[HarLit13] Hardy, G.H.; Littlewood, J. E. *Sur la série de Fourier d'une fonction á carré sommable,* Comptes Rendus (Paris) **156** (1913), 1307–1309.

[Kan68] Kano, T. *Coefficients of some trigonometric series,* J. Fac. Sci. Shinshu Univ. **3** (1968), 153–162.

[Kit87] Kitada, K. H^p *multiplier theorems on certain totally disconnected groups*, Sci. Rep. Hirosaki Univ. **34** (1987), 1–7.

[Kuz98] Kuznetsova, O.I. *Strong summability of multiple Fourier series and Sidon-type inequalities,* Ukrainian Mathematical Journal **50** (1998), 1860–1866.

[Kuz00] Kuznetsova, O. I. *On the integrability of a class of* N*-dimensional trigonometric series,* Ukrainian Math. J. **52** (2000), 960–963.

[Kuz12] Kuznetsova, O. I. *Strong summability and convergence of multiple trigonometric series over polyhedrons,* J. Cont. Math. Anal. **47** (2012), 240–250.

[Lei85] Leindler, L. *"Strong Approximation by Fourier Series",* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985.

[Lif93] Liflyand, E. *On asymptotics of Fourier transform for functions of certain classes*, Anal. Math. **19** (1993), 151–168.

[Mor89] Móricz, F. *On the integrability and* L^1*-convergence of sine series,* Studia Math. **92** (1989), 187–200.

[Mor91] Móricz, F. *Lebesgue integrability and* L^1*-convergence of trigonometric series with special coefficients,* "Approximation Theory " Coll. Math. Soc. J anos Bolyai, North-Holland (eds. J. Szabados, K. Tandori) **68** (1991), 513–536.

[MorSch90] Móricz, F.; Schipp, F. *On the integrability and* L^1*-convergence of Walsh series with coefficients of bounded variation,* J. Math. Anal. Appl. **146** (1990), 99–109.

[MoBaDoKu11] Motornij, V.P.; Babenko, V.F.; Dovgosej, A.A.; Kuznetsova, O.I. *Az approximáció és a harmonikus analízis elmélete,* monográfia, "Feladatok és módszerek: matematika, fizika, kibernetika", Naukova Dumka, Kijev, 2011. (oroszul), http://www.iamm.ac.donetsk.ua/upload/iblock/00a/ monogr_07-12-11.pdf

[OnnQue89] Onneweer, C.W. ; Quek, T.S. H^p *multiplier results on locally compact Vilenkin groups*, Quart. J. Math Oxford(2), **40** (1989), 313–323.

[Sch92] Schipp, F. *Sidon-type inequalities,* Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Approx. Theory, Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong **138** (1992), 421–436.

[Sim85] Simon, P. (L^1, H)*-type estimations for some operators with respect to the Walsh-Paley system*, Acta Math. Hung. **46** (1985), 307–310.

[Sim87] Simon, P. *Strong convergence of certain means with respect to the Walsh–Fourier series,* Acta Math. Hungar. **49** (1987), 425–431.

[Sim98b] Simon, P. *Two-parameter multipliers on Hardy spaces,* Coll. Math. **77** (1998), 9–31.

[Smi83] Smith, B. *A strong convergence theorem for* $H^1(T)$*,* Lecture Notes in Math., Springer, Berlin-New York **995** (1983), 169–173.

[Sta88] Stanojević, Č.V. *Structure of Fourier and Fourier-Stieltjes coefficients of series with slowly varying convergence moduli,* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **19** (1988), 283–286.

[StaSta87] Stanojević, Č.V.; Stanojević, V.B. *Generalizations of the Sidon–Telyakovskii theorem,* Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 679–684.

[Tel64] Telyakovskiĭ, S.A. *Integrability conditions of trigonometric series and their applications to the study of linear methods of summing Fourier series*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. **28** (1964), 1209–1236. (oroszul)

[Tel73] Telyakovskiĭ, S.A. *On a sufficient condition of Sidon for the integrability of trigonometric series,* Mat. Zametki **14** (1973), 317–328. (oroszul)

[Tel85b] Telyakovskiĭ, S.A. *On conditions for integrability of multiple trigonometric series,* Proc. Steklov Inst. Mat. **2** (1985), 205–215.

[Tot80] Totik, V. *On the strong approximation of Fourier series,* Acta Sci. Math. (Szeged) **35** (1980), 151–172.

[Tot85] Totik, V. *Notes on Fourier series: Strong approximation,* J. Appr. Theory **43** (1985), 105–111.

[Wei94] Weisz, F. *"Martingale Hardy Spaces and their Applications in Fourier Analysis",* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.

[WoS94] Wo-Sang Young *Littlewood-Paley and multiplier theorems for Vilenkin-Fourier series*, Can. J. Math. **46** (1994), 662–672.

[Zyg59] Zygmund, A. *"Trigonometric series",* University Press, Cambridge, 1959.