BÍRÁLÓI VÉLEMÉNY

FRIDLI SÁNDOR „TRIGONOMETRIKUS ÉS WALSH-SOROKKAL KAPCSOLATOS VIZSGÁLATOK"

CÍMÛ MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉSÉRÕL

A dolgozatban a szerzõ vizsgálja az ortonormált rendszerek integrálhatósági, konvergencia és szummáció tulajdonságait különbözõ Banach terekben, különös tekintettel a trigonometrikus és Walsh rendszerekre a klasszikus Lp illetve Hardy terekben. A dolgozat témája szorosan kapcsolódik a mély hagyományokkal rendelkezõ hazai Fourier analízis iskolához.A dolgozat egységes keretben foglalja össze a szerzõ elmúlt 20 év alatti munkásságát jól megvilágítva a különbözõ eredmények közötti logikai kapcsolatot.

A bevezetést követõen a dolgozat 2.-ik fejezetében a szerzõ Sidon-típusú egyenlõtlenségek tárgyalásával foglalkozik, ezek az egyenlõtlenségek fontos szerepet játszanak a további fejezetekben. A Sidon-típusú egyenlõtlenségek vizsgálják a Dirichlet-féle magfüggvények tetszõleges együtthatókkal vett lineáris kombinációi átlagait és ezek integrál normájára felsõ becsléseket adnak az együtthatók egy diszkrét normájának segítségével. A Sidon típusú egyenlõtlenségek fontos szerepet játszanak számos Fourier-analízisbeli probléma vizsgálatában. Ez a kérdés megfogalmazható tetszõleges ortonormált rendszerekre, a dolgozatban elsõsorban a trigonometrikus és Walsh esetet vizsgálja a szerzõ. Itt a fõ feladat úgy fogalmazható meg, hogy a Dirichlet-féle magfüggvények együtthatókkal vett lineáris kombinációi integrál normájára minél pontosabb n-ben egyenletes felsõ becslést kell adni valamilyen együttható normákkal. Az elsõ fontos eredményeket Telyakovskii (1973, együtthatók supremum normája) és Bojanic-Stanojevic (1982, együtthatók L^p-normája) érték el trigonometrikus esetben. A dolgozat 2-ik fejezetének elsõ eredménye a 2.1 Tétel amely egy új együttható becslést ad a trigonometrikusDirichlet-féle magfüggvények súlyozott lineáris kombinációi integrál normájára. Ezek után kiindulva abból a felismerésbõl, hogy az együttható normák függetlenek az együtthatók sorrendjétõl, a szerzõ megvizsgálja a súlyozott Dirichlet-féle magfüggvények permutációinak maximális normáját és belátja, hogy a 2.1 Tételben szerepelõegyüttható becslés egyben a lehetséges legjobb az együtthatók sorrendjére nézve invariáns Sidon típusú egyenlõtlenség. Ezt az eredményt fogalmazza meg a 2.3 Tétel, amely a 2. fejezet fõ eredményének tekinthetõ. Ezen kívül a 2.5 Tételben a szerzõ hasonló eredményeket bizonyít az úgynevezett *eltolt alsó indexû* súlyozott Dirichlet-féle magfüggvények összegére. Ezeknek az eredményeknek fontos szerepe van a Fourier sorok konvergencia vizsgálatában. A 2.10 Tétel egy analog állítást fogalmaz meg a Walsh-Paley rendszerre nézve, ebben megint szerep jut a szerzõ által korábban bevezetettlogaritmikus együttható normának és természetes módon a trigonometrikus Lebesgue konstans helyett a Walsh-PaleyLebesgue konstans megfelelõje szerepel a becslésben.

A 3.-ik fejezetfoglalkozik a Sidon-típusú integrálhatósági és L^1-konvergencia osztályokkal. Egy adott ortonormált rendszerre vonatkozó integrálhatósági probléma azt vizsgálja, hogy milyen feltételek mellett lesz egy adott számsorozat valamilyen integrálható függvény Fourier együtthatóinak sorozata. Ez a problémakör szorosan kapcsolódik a 2. fejezetben tárgyalt Sidon-típusú egyenlõtlenségekhez. A szerzõ 3.1 Tétele alkalmazza a logaritmikus Sidon típusú egyenlõtlenségeket új trigonometrikus és Walsh integrálhatósági osztályok megadására. Ezek után a szerzõ rátér az úgynevezett L^1-konvergencia osztályok vizsgálatára. Ezen osztályok olyan Fourier együttható sorozatokból állnak, melyekre teljesül a sor integrál normában való konvergenciája. Erre vonatkozóan a dolgozat 3.6 Tétele egy elegáns Hardy-Karamata típusú L^1-konvergencia osztályt ad meg. Ezen kívül a dolgozat 3.10 Tétele bemutatja, hogy a 3.6 Tételben szerepelõ L^1-konvergencia osztály bõvebb, mint a korábban ismert osztályok. A fenti eredményeket a szerzõ kiterjeszti a Walsh rendszerre is.

A 3.fejezet fennmaradó része a ma már klasszikusnak számító Telyakovskii –féle integrálhatósági feltétel általánosításával foglalkozik. Az eredeti bizonyítás erõsen támaszkodik a cosinus rendszer speciális tulajdonságaira. A szerzõ Hardy-típusú normákat vezet be a nemnegativ valós számok halmazán értelmezett függvények terében és ezek segítségével a 3.19 Tételben egységesen közelíti meg a Telyakovskii –féle integrálhatósági feltétel tárgyalását általános ortonormált rendszerek esetében. Ez a tétel megmutatja, hogy a Telyakovskii –féle integrálhatósági eredmény egy Sidon-típusú egyenlõtlenség következménye.

A 4. fejezet tárgya az erõs szummáció és erõs approximáció. Ebben a fejezetben a szerzõ egy Schipp Ferenccel közös cikksorozatot dolgozott fel. Itt egy újszerû megközelítés található az erõs szummációval és approximációval kapcsolatos problémák kezelésére. A módszer lényege egy dualitás kimutatása a Sidon-típusú egyenlõtlenségek és erõs szummációs és approximációs tulajdonságok között. Ennek megfelelõen a 4.1 és 4.2 Tételek egy ekvivalencia tulajdonságot adnak az adott ortonormált rendszer erõs szummációs tulajdonsága és a Dirichlet-magokra vonatkozó Sidon-típusú egyenlõtlenségek között. Itt fontos megemlíteni, hogy a fenti tulajdonságok megfogalmazása egy viszonylag általános Banach térben történik, így speciális esetként egy sor korábban ismert eredmény is levezethetõ. Ezen kívül a 2. fejezetben igazolt fordított Sidon-típusú egyenlõtlenségek alkalmazásával a szerzõ megvizsgálja az erõs szummációra vonatkozó eredmények élességét is. Hasonló dualitási elv kerül megfogalmazásra az erõs approximáció tekintetében is. Itt a Fourier részletösszegek erõs oszcillációja az általánosítottde la ValléePoussin közepek segítségével van definiálva és a szerzõ egy dualitást mutat ki az erõs oszcilláció és az eltolt indexû Sidon-típusú egyenlõtlenségek között. Ez a dualitás megint általános Banach térbeli normákra van igazolva, és a normák speciális választásával visszanyerhetõ egy sor ismert klasszikus eredmény a Fourier-sorok erõs approximációjára vonatkozóan.

Az 5.-ik fejezetbe a szerzõ vizsgálja a Hörmander-Mihlinmultipliereket. Az analízisben fontos szerepet játszó multiplier operátorok a Fourier-együtthatók egy adott számsorozattal való szorzással adódnak. Itt a kiindulási pont Marcinkiewicz egy klasszikus eredménye, amely egy feltételt ad a trigonometrikus multiplier operátor korlátosságára az L^p-térben. Az 5.-ik fejezetben a szerzõ egy James Daly-velközös cikksorozatot feldolgozva kiterjeszti a multiplier operátorok korlátosságának vizsgálatát periodikus Hardy terekre illetve Walsh rendszerekre diadikus Hardy terekben. Így például a szerzõ bemutatja, hogy a számsorozat korlátos változása nem elegendõ a trigonometrikus multiplier operátorok korlátosságához a periodikus Hardy terekben (5.1 Tétel), viszont az erõsebb Marcinkiewicz-Hörmander-Mihlin feltétel már elegendõ ehhez (5.2 Tétel). Hasonló eredményeket tartalmaz ez a fejezet a Walsh rendszerre és a diadikus Hardy terekre nézve. A bizonyítás egy fontos új eszköze az úgynevezett csonkolt Sidon-típusú egyenlõtlenségek.

Összegezve elmondható, hogy a szerzõ által feldolgozott témakör a Fourier analízis jelenleg is aktivan vizsgált nemzetközileg is széles érdeklõdésre számító területe. Az szerzõ által bemutatott új eredmények jelentõsen általánosítják és kiterjesztik a korábban ismerteket, ezek bizonyításához számos új módszer, ötlet bevezetésére került sor. A fentiekre való tekintettel a bíráló érdemesnek tartja az értekezést az MTA doktori cím megszerzésére.

Budapest, 2015. január 11. Kroó András