

Bírálat Fridli Sándor 2014-ben benyújtott
"Trigonometrikus és Walsh-sorokkal kapcsolatos vizsgálatok"
című MTA doktori értekezéséről

A pályázó értekezésében 23 tudományos dolgozatának legfontosabb eredményeit ismerteti egységes terminológiát és jelölésrendszert használva, amelyek közül 12 saját, míg a további 11 társszerzőkkel közösen írt dolgozat. Ezek nagy része olyan jelentős matematikai folyóiratokban került közlésre, mint az Acta Math. Hungar. (1), Acta Sci. Math. (2), Analysis Math. (1), Appl. Analysis (1), Can. Math. Bull. (1), J. Approx. Theory (3), J. Math. Anal. Appl. (3) és Studia Math. (2).

Az értekezés Előszóból, 5 Fejezetből, továbbá a Jelöléseket és az Irodalomjegyzéket tartalmazó részből áll. Külön kiemelem, hogy az Irodalomjegyzék az utóbbi évtizedekben megélénkült kutatások eredményeinek gazdag tárháza, amely 144 tudományos cikk és könyv koordinátáit tartalmazza.

Az értekezés 1. fejezetében a pályázó tömören összefoglalja a Walsh-Paley és Walsh-Kaczmarz rendszerekre, a diadikus Hardy térre, a valós 2π szerint periodikus, illetve nemperiodikus Hardy terekre vonatkozó azon alapfogalmakat, amelyek az értekezés 2-5 fejezeteiben lévő saját eredményeinek ismertetéséhez feltétlenül szükségesek.

Az értekezés érdemi részét a pályázó az ún. Szidon típusú egyenlőtlenségek tárgyalásával kezdi. Megjegyezzük, hogy Szidon Simon magyar matematikus volt, akinek a [Sid39] cikke a J. London Math. Soc., 14 (1939) számában jelent meg az S. Sidon szerzői név megjelölésével (lásd [Sid39]). A problémakör későbbi kiinduló pontjának pedig S. A. Telyakovskij orosz matematikusnak 1973-ban közölt

$$\frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=0}^n c_k D_k(x) \right\|_{L^1} \leq \max_{0 \leq k \leq n} |c_k|$$

egyenlőtlensége tekinthető, amelyhez a Szidon Simontól származó integrálhatósági feltétel ekvivalens átfogalmazásával jutott el; ahol $c_0, c_1, \dots, c_n$ valós számok, a $D_k(x)$ pedig a Fourier sorok elméletében jól ismert Dirichlet magfüggvény. Megjegyezzük, hogy a fenti egyenlőtlenség a Fejér közepek L^1 -normájának korlátosságát is speciális esetként tartalmazza.

A fenti és az azóta talált újabb Szidon típusú egyenlőtlenségek alapvető szerepet játszanak számos Fourier analízisbeli probléma kezelésében. Erre a tényre az opponens

hívta fel a figyelmet (lásd [Mor90]) és Schipp Ferencsel közösen írt dolgozatában (lásd [MorSch90]) elsőként vizsgálták Walsh sorok integrálhatóságát és L^1 -konvergenciáját Szidon típusú egyenlőtlenségek segítségével. Később a pályázó is több Szidon típusú egyenlőtlenséget bizonyított be a Walsh-Paley és Walsh-Kaczmarz rendszerekre (lásd [Fri95a] és [Fri13a]).

Az értekezés 3. fejezetében a pályázó 3.6. Tétele egy ún. Hardy-Karamata típusú feltétel, amelyből az addig ismert ilyen jellegű egyenlőtlenségek nagy része következményként adódik (lásd [Fri97b]). A 3.12-3.13. Tételek a diadikus $H_{[0,1]}$ és a nemperiodikus $\mathcal{H}_{[0,1]}$ Hardy terekre, míg a 3.14-3.15. Tételek a valós $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ és a $\mathcal{H}_{(0,\infty)}$ Telyakovskij-féle Hardy térre adnak értékes eredményeket (lásd [Fri00] és [Fri01]).

A 3.16-3.18. Tételekben a pályázó James Daly amerikai matematikussal közösen írt cikkeiben (lásd [DalFri10]) bizonyítja, hogy a $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$ Hardy tér duálisa a $\text{BMO}_{[0,\infty)}$ tér, míg a $\mathcal{H}_{\mathbb{N}}$ Hardy tér duálisa a $\text{BMO}_{\mathbb{N}}$ tér. Ezek a tételek értékes hozzájárulást jelentenek Charles Fefferman 1971-ben elsőként bizonyított tételéhez, amely szerint a klasszikus valós $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ Hardy tér duálisa a klasszikus valós $\text{BMO}_{\mathbb{R}}$ tér.

Az értekezés 4. fejezetében a pályázó az ortogonális rendszerek szerinti általánosított Fourier sorok erős szummálhatóságára és approximációjára vonatkozó tételeit foglalja össze. Megjegyezzük, hogy a hagyományos Fourier sorok erős szummálhatóságára az első tételt Hardy és Littlewood bizonyították 1913-ban. Az erős approximáció fogalmát Alexits György vezette be 1963-ban, majd Leindler László foglalta össze 1985-ben megjelent monográfiájában az erős approximációra vonatkozó addigi eredményeket.

A pályázónak Schipp Ferencsel közösen bizonyított 4.1. Tételében egy dualitási relációt fogalmaznak meg, amely a Fourier sorok erős szummálhatósága, approximációs tulajdonságai és a Szidon típusú egyenlőtlenségek közötti ekvivalenciáját fejezi ki (lásd [FriSch98]). Az erős szummálhatóságra vonatkozó 4.2 - 4.5. Tételeket is ebben a közös cikkükben bizonyították.

Az értekezés 5. fejezete, amelynek címe: Hörmander-Mihlin multiplierek, az értekezésnek szintén kiemelkedő része. Emlékeztetünk arra, hogy egy φ komplex számsorozattal generált T_{φ} multiplier transzformációt a Fourier együtthatók segítségével defináljuk:

$$(T_{\varphi}^{\wedge} f)^T(k) := \varphi(k) \hat{f}^T(k),$$

ahol

$$\hat{f}^T(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad f \in L_{2\pi}^1.$$

J. Marcinkiewicz klasszikus eredménye 1939-ben elegendő feltételt adott a multiplier operátorok L^p -korlátosságára, ahol $p > 1$. S. G. Mihlin 1956-ban új elégséges feltételt adott a multipliererek L^p -korlátosságára, amit L. Hörmander 1960-ban átfogalmazott és gyengített. Ennek a feltételnek az egydimenziós periodikus változata a következő: akkor mondjuk, hogy egy korlátos φ számsorozat kielégíti a Marcinkiewicz-Hörmander-Mihlin feltételt (rövidítve: az MHM feltételt), ha van olyan $r \geq 1$ kitevő, amelyre fennáll, hogy

$$\sup_{n \geq 0} 2^n \left(\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} \frac{|\Delta \varphi(k)|^r}{2^n} \right)^{1/r} < \infty,$$

ahol

$$\Delta \varphi(k) := \begin{cases} \varphi(k) - \varphi(k+1), & \text{ha } k \geq 0; \\ \varphi(k) - \varphi(k-1), & \text{ha } k < 0. \end{cases}$$

Az $r = 1$ speciális esetben az eredeti Marcinkiewicz feltételt kapjuk vissza.

A multiplier operátorok vizsgálatának fontosságát támasztja alá az a hasznos szerep, amit elméleti és gyakorlati téren egyaránt játszanak, mint például a differenciálegyenletek elméletében és a jelfeldolgozásban. Például a jelfeldolgozás egyik fontos fogalma a szűrő nem más, mint a multipliernek az ottani szaknyelvben meghonosodott elnevezése.

Az 5.1. Tételt a pályázó J. Daly-vel közösen írt cikkében bizonyította (lásd [DalFri05]), hogy létezik olyan korlátos változású φ számsorohat, amelyre teljesül, hogy

$$\varphi(-k) = \overline{\varphi(k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

de a T_φ multiplier operátor nem korlátos $H_{2\pi}$ -ből $L_{2\pi}^1$ -be. Ezzel szemben az 5.2. Tételükben azt bizonyították, hogy az MHM-feltétel már elégséges a multiplier korlátosságához, ha $r > 1$. Megjegyezzük, hogy az 5.2. Tétel bizonyításában szerepet játszó 5.3 Lemma az opponens egy tételének (lásd [Mor90]) kiterjesztése a konjugált Dirichlet magfüggvényre.

A Marcinkiewicz multiplier tétel analogonját a Vilenkin rendszerekre, így speciálisan a Walsh rendszerre is Wo-Sang Young (lásd [WoSa4]) igazolta. A pályázó J. Daly-vel közös cikkében (lásd [DalFri03]) az MHM feltétellel kapcsolatban nemcsak a $H_{[0,1]}^1$ diadikus Hardy téren való korlátosságot vizsgálta meg, hanem azt is, hogy az r kitevőtől függően a multiplier operátor korlátossága mely $0 < p < 1$ kitevő esetén áll fenn a $H_{[0,1]}^p$ diadikus Hardy terek esetében (lásd [DalFri03]).

Az 5. fejezet befejező részében a pályázó kétdimenziós MHM típusú Walsh multiplier operátorok korlátosságát biztosító feltételeket bizonyít. Mind az 5.14. Tétel bizonyítása,

mind az abban fontos szerepet játszó 5.16 Lemma bizonyítása (lásd [DalFri08]) olyan újszerű megfontolásokat igényelt a pályázótól és J. Daly-tól, amelyek a korábban alkalmazott Szidon típusú egyenlőtlenségektől eltérő jellegűek (ezen bizonyítások leírása a doktori értekezésben 11 oldal terjedelmet tesz ki).

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy Fridli Sándor doktori értekezésében több évtizedes tudományos munkásságának azon legjelentősebb eredményeit mutatja be a matematikai analízis témakörében, amelyet a klasszikus trigonometrikus és a Walsh rendszerek szerinti Fourier sorok tanulmányozása során ért el. Benyújtott doktori értekezésében 23 tudományos dolgozatának legfontosabb eredményeit ismerteti egységes terminológiát és jelölésrendszert használva. Ezek közül 12 saját, míg a további 11 társszerzőkkel közösen írt dolgozat. Ezek nagy része olyan jelentős matematikai folyóiratokban került közlésre, mint az Acta Math. Hungar. (1), Acta Sci. Math. (2), Analysis Math. (1), Appl. Analysis (1), Can. Math. Bull. (1), J. Approx. Theory (3), J. Math. Anal. Appl. (3) és Studia Math. (2).

Külön kiemelem, hogy a nemzetközileg is kiemelkedő magyar matematikai iskola több jeles képviselője kerül kellő súllyal ismertetésre az értekezésben, akiknek korábbi tételeit a pályázó általánosította és olyan függvényterekre terjesztette ki a vizsgálatokat, amelyek csak mostanában kerültek bevezetésre. Ezek között található Szidon Simon, Alexits György, Leindler László, Schipp Ferenc, Totik Vislmos, Weisz Ferenc és az opponens neve is. Továbbá nemzetközi téren olyan kiemelkedő kutatókra történik hivatkozás kutatási eredményeik továbbvitelében és/vagy általánosításában, mint J. Marcinkiewicz, Charles Fefferman, L. Hörmander, S.G. Mihlin és S.A. Telyakovskij. Ezen hatalmas ismeretanyagnak a bemutatásában a pályázó egységes terminológiát és jelölésrendszert használ értekezésében.

A pályázó által bizonyított újabb Szidon típusú egyenlőtlenségek rendkívül hasznosnak bizonyultak a különféle Hardy típusú terek (diadikus Hardy terek a $[0,1)$ intervallumon és a $[0,1)^2$ egységnégyzeten, a $[0,\infty)$ félegyenesen, a Telyakovskij-féle Hardy tér a $[0,\infty)$ félegyenesen, stb) és ezeknek a duális BMO terei. Azt is ki kell emelnünk, hogy az újabb multiplier operátorok korlátosságát biztosító tételek jól alkalmazhatók a differenciálegyenletek elméletében, sőt még a jelfeldolgozásban is sikerrel alkalmazhatók.

A pályázó által benyújtott doktori értekezés gépelése mintaszerű: jól olvasható, kellően áttekinthető, a hivatkozások jól nyomon követhetők. A 160 oldal terjedelmű értekezésében mindössze 2 sajtóhibát találtam:

(i) a 49. oldalon felülről a 3. sorban: 3.16 Tétel helyett 3.6 irandó.

(ii) a 118. oldalon az 5.2. Tétel kivetett képletének nevezőjében j helyett k irandó.

Mindezek alapján megállapíthatjuk, hogy Fridli Sándor "Trigonometrikus és Walsh-sorokkal kapcsolatos vizsgálatok" című MTA doktori értekezése hiteles adatokat tartalmaz, téziseit új tudományos eredményként fogadom el és a doktori értekezését nyilvános vitára alkalmasnak tartom.

Szeged, 2015. január 21.

Dr. Móricz Ferenc
a matematikai tudományok doktora