

Válasz Gát György opponensi véleményére

Megköszönöm opponensemnek a dolgozatom figyelmes átolvasását, az eredmények értékelését, illetve az ezekkel kapcsolatos észrevételeket. Köszönöm a bíráló végén megfogalmazott pozitív összefoglaló véleményét.

Az opponensem által megfogalmazott három kérdés mindegyikét a témakör szempontjából relevánsnak tartom. A kérdések a Sidon-típusú egyenlőtlenségekkel vannak kapcsolatban, és ahogy a felvetésben említésre került az eredmények várhatóan több területen, mint például majdnem mindenütt való konvergencia, is közvetlenül alkalmazhatók. A szóban forgó problémák vizsgálata feltehetőleg még további kutatásokhoz fog vezetni. Az alábbiakban adott válaszok nem jelentik a problémák végleges lezárását, de további vizsgálatokhoz kiindulásként szolgálhatnak.

1. KÉRDÉS: *A Sidon egyenlőtlenségek a Dirichlet magfüggvények lineáris kombinációi normájának a becsléséről szól. Felhasználásaik normajellegű állításokhoz fűződnek. Majdnem mindenütti konvergencia tételek igazolásához hasznos lenne, ha Dirichlet magfüggvények lineáris kombinációinak maximálfüggvényére (természetesen megfelelően lenormálva) tudnánk állításokat igazolni. Azaz, a következő integrálra tudunk-e (természetesen a (c_k) sorozattól függő) valamilyen felső becslést adni akár csak a Walsh-Paley esetben?*

$$\int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right|.$$

VÁLASZ AZ 1. KÉRDÉSRE

A kérdésben szereplő integrál két vonatkozásban tér el a hagyományos Sidon-típusú egyenlőtlenségektől. Az egyik az, hogy az integrálási intervallum nem a teljes $[0, 1]$ intervallum, hanem annak csak egy, a 0 körüli környezeten kívüli része. Ezt a változatot neveztük a dolgozatban csonkolt Sidon-típusú problémának, amivel kapcsolatosan az első eredmény Móricz Ferenctől [Mor90] származik. A második eltérés az, hogy az integrálon belül egy maximálfüggvényt tekintünk. Ilyen típusú eredmény igazolt speciális együtthatókat véve Gát [Gat13] a 2-adikus egészek csoportjának karakter rendszerére, illetve Memic [Mem12] a Walsh-rendszerre. Az alábbiakban a kérdést először a Walsh, majd a trigonometrikus rendszerre vizsgáljuk meg.

Walsh eset

Ismeretes (ld. pl. [SchWadSim90]), hogy

$$(1) \quad D_k(x) \leq \min \left\{ k, \frac{2}{x} \right\} \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 1, 0 < x < 1).$$

i) Ha csak az indextől független $2/x$ részt tekintjük, akkor (1)-ből közvetlenül adódik a

$$(2) \quad \int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| \leq 2 \log \delta \cdot \sigma_N^*$$

becslés, ahol $\sigma_K^* = \sup_{n \geq K} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |c_j|$ ($K \in \mathbb{N}, K \geq 1$).

Ennél jobb eredményt kapunk, ha (1)-ben figyelembe vesszük az első tagot is. Ekkor a

$$(3) \quad \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| (x) \leq \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[2/x]} k |c_k| + \frac{1}{n} \frac{2}{x} \sum_{k=[2/x]+1}^n |c_k|, & n > [2/x]; \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k |c_k|, & n \leq [2/x] \end{cases}$$

($0 < x \leq 1$) egyenlőtlenségre jutunk.

ii) Legyen először $N \geq 2/\delta$. Az indextartományt felbontva

$$(4) \quad \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k(x) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{[2/\delta]} |c_k| \left(k \chi_{[\delta, 2/k]}(x) + \frac{2}{x} \chi_{[2/k, 1]}(x) \right) + \frac{1}{n} \frac{2}{x} \sum_{k=[2/\delta]+1}^n |c_k|$$

($0 < \delta < 1, n \geq N, \delta \leq x \leq 1$). Innen a $\sigma_{K,L}^* = \sup_{n \geq K} \frac{1}{n} \sum_{k=L+1}^n |c_k|$ ($K, L \in \mathbb{N}, K > L$) mennyiséget bevezetve azt kapjuk, hogy

$$(5) \quad \int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[2/\delta]} \left(2 + 2 \log \frac{k}{2} \right) |c_k| + \left(2 \log \frac{1}{\delta} \right) \sigma_{[2/\delta], N}^* \quad (N \geq 2/\delta).$$

iii) Legyen most $N < 2/\delta$. Az indextartomány és az integrálási tartomány megfelelő felbontásával

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| &= \int_{\delta}^{2/N} \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| + \int_{2/N}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| \\ &\leq \int_{\delta}^{2/N} \sup_{n \geq 2/\delta} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| + \int_{\delta}^{2/N} \max_{N \leq n < 2/\delta} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| \\ &\quad + \int_{2/N}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| \\ &= A_1 + A_2 + B. \end{aligned}$$

Kezdjük a B résszel. Erre érvényes az előző esetre adott becslés $\delta = 2/N$ választással:

$$B \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \left(2 + 2 \log \frac{k}{2} \right) |c_k| + 2 \log(N/2) \sigma_N^* \quad \left(\sigma_N^* = \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |c_k| \right).$$

Az A_1 tagra a (4)-beli becslésnek a $[\delta, 2/N]$ intervallumra való leszűkítését használhatjuk. Mivel ezen az intervallumon

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{[2/\delta]} |c_k| \left(k \chi_{[\delta, 2/k]}(x) + \frac{2}{x} \chi_{[2/k, 1]}(x) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N k |c_k| \chi_{[\delta, 2/N]}(x) + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{[2/\delta]} |c_k| \left(k \chi_{[\delta, 2/k]} + \frac{2}{x} \chi_{[2/k, 2/N]}(x) \right) \quad (\delta \leq x \leq 2/N), \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \frac{\delta}{2} \sum_{k=0}^N |c_k| k \left(\frac{2}{N} - \delta \right) + \frac{\delta}{2} \sum_{k=N+1}^{[2/\delta]} |c_k| \left(k \left(\frac{2}{k} - \delta \right) + 2 \log \frac{k}{N} \right) + \sigma_{[2/\delta]}^* \log \frac{2}{N\delta} \\ &\leq \frac{\delta}{2} \sum_{k=0}^N |c_k| k \left(\frac{2}{N} - \delta \right) + \frac{\delta}{2} \sum_{k=N+1}^{[2/\delta]} |c_k| \left(2 + 2 \log \frac{k}{N} \right) + \sigma_{[2/\delta]}^* \log \frac{2}{N\delta}. \end{aligned}$$

Az A_2 tag becsléséhez induljunk ki a (3) egyenlőtlenségből. Legyen $\delta \leq 2^{-j} < 2^{-(j-1)} \leq 2/N$. Ekkor

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| (x) \leq \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k |c_k|, & n \leq 2^{j+1} \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2^{j+1}} k |c_k| + \frac{1}{n} 2^{j+1} \sum_{k=2^{j+1}+1}^n |c_k|, & n > 2^{j+1} \end{cases} \quad (2^{-j} \leq x < 2^{-(j-1)}).$$

Innen

$$\begin{aligned} \max_{N \leq n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| (x) &\leq \max_{N \leq n \leq 2^{j+1}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| (x) + \max_{2^{j+1} < n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| (x) \\ &\leq \max_{N \leq n \leq 2^{j+1}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k |c_k| + 2^{j+1} \max_{2^{j+1} < n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{j+1}+1}^n |c_k| \end{aligned}$$

$(2^{-j} \leq x < 2^{-(j-1)})$, azaz

$$\int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \max_{N \leq n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| (x) dx \leq \frac{1}{2^j} \max_{N \leq n \leq 2^{j+1}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k |c_k| + 2 \max_{2^{j+1} < n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{j+1}+1}^n |c_k|$$

adódik. Ezt felhasználva kapjuk az

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\delta}^{2/N} \max_{N \leq n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| (x) dx \\ &\leq \left(\frac{1}{N} - \delta \right) \max_{N \leq n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k |c_k| + 2 \log \frac{2}{N\delta} \max_{N < n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |c_k| \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget. A három tagra igazolt egyenlőtlenségeket összegezve

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| &\leq A_1 + A_2 + B \\ &\leq \frac{\delta}{2} \sum_{k=0}^N |c_k| k \left(\frac{2}{N} - \delta \right) + \frac{\delta}{2} \sum_{k=N+1}^{[2/\delta]} |c_k| \left(2 + 2 \log \frac{k}{N} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{N} - \delta \right) \max_{N \leq n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k |c_k| + 2 \log \frac{1}{N\delta} \max_{N < n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |c_k| \\ &\quad + \log \frac{2}{N\delta} \sigma_{[2/\delta]}^* + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (2 + 2 \log k) |c_k| + 2 \log(N/2) \sigma_N^*. \end{aligned}$$

Két tagot összevonhatunk:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \sum_{k=0}^N |c_k| k \left(\frac{2}{N} - \delta \right) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N |c_k| (2 + \log 2k) &= \sum_{k=0}^N |c_k| \left(\frac{\delta}{N} k - \frac{\delta^2}{2} + \frac{2}{N} + \frac{2 \log k}{N} \right) \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (4 + 2 \log k) |c_k|. \end{aligned}$$

Így a fenti alakot egyszerűsíthetjük

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (4 + 2 \log k) |c_k| + \delta \sum_{k=N+1}^{[2/\delta]} |c_k| \left(1 + \log \frac{k}{N} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{N} - \delta \right) \max_{N \leq n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k |c_k| \\ &\quad + 2 \log \frac{1}{N\delta} \cdot \max_{N < n \leq 2/\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |c_k| \\ &\quad + \log \frac{2}{N\delta} \cdot \sigma_{[2/\delta]}^* + 2 \log \frac{N}{2} \cdot \sigma_N^* \quad (N < 2/\delta). \end{aligned} \tag{6}$$

A kapott becsléseket az c_k együtthatóknak a különböző index intervallumokon vett átlagaival sikerült kifejezni. Ezek számos konkrét sorozatra, mint pl. monoton vagy

lassan változó (c_k) sorozatokra, jól számolható, illetve becslhető.

Megjegyezzük, hogy az általános eset mellett vannak olyan speciális esetek, amikkel érdemes külön is foglalkozni pontosabb becslés reményében. Ilyen például a Sidon-típusú egyenlőtlenségekben egyébként is fontos szerepet játszó, a $c_k = 1$ ($k \in \mathbb{N}$) választásnak megfelelő Fejér magok esete:

$$\int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n D_k \right|.$$

Feltehetjük, hogy $\delta = 2^{-L}$, és $N = 2^M$. Tekintsük a Walsh-Fejér magokra vonatkozó ismert ([SchWadSim90]) egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned} |K_n| &\leq \sum_{j=0}^{m-1} 2^{j-m} \sum_{i=j}^{m-1} (D_{2^i} + \tau_{e_j} D_{2^i}) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} 2^{j-m} \sum_{i=j}^{m-1} D_{2^i} + 2^{j-m} D_{2^j} + \sum_{j=0}^{m-1} 2^{j-m} \sum_{i=j+1}^{m-1} \tau_{e_j} D_{2^i} \end{aligned}$$

($m, n \in \mathbb{N}$, $2^{m-1} \leq n < 2^m$).

Ha $i \geq L$, akkor $\text{supp } D_{2^i} \subset [0, 2^{-L})$. Hasonlóan, ha $j \geq L$, akkor $\text{supp } D_{2^j} \subset [0, 2^{-L})$, valamint $i > j$ miatt $\text{supp } \tau_{e_j} D_{2^i} \subset [0, 2^{-j}) \subset [0, 2^{-L})$. Emiatt a fenti becslésben az indexekre vonatkozó alábbi megszorítással élhetünk:

$$\begin{aligned} |K_n| &\leq \sum_{j=0}^{\min\{L-1, m-1\}} 2^{j-m} \left(2D_{2^j} + \sum_{i=j+1}^{\min\{L-1, m-1\}} D_{2^i} \right) \\ (7) \quad &+ \sum_{j=0}^{\min\{L-1, m-1\}} 2^{j-m} \sum_{i=j+1}^{m-1} \tau_{e_j} D_{2^i} \end{aligned}$$

($m, n \in \mathbb{N}$, $m > M$, $2^{m-1} \leq n < 2^m$).

Legyen $2^{-L} \leq x < 1$, és $m > L$, azaz $2^L \leq 2^{m-1} \leq n < 2^m$. Jelölje $j_0 \leq L$ azt a természetes számot, amelyre $2^{-j_0} \leq x < 2^{-j_0+1}$. Ezt az intervallumot tovább osztva vagy $2^{-j_0} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-(m-1)}$, vagy van olyan $j_0 \leq i_0 \leq m-2$ szám, hogy $2^{-j_0} + 2^{-i_0-1} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-i_0}$. Ekkor

$$\begin{aligned} |K_n(x)| &\leq \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{j-m} \left(2 \cdot 2^j + \sum_{i=j+1}^{j_0-1} 2^i \right) + 2^{j_0-1-m} \sum_{i=j_0-1}^{m-1} 2^i \\ &\leq 2^{-m+2j_0} + 2^{j_0-1} \\ &\leq 2^{j_0} \end{aligned}$$

$(2^{-j_0} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-(m-1)}, j_0 = 1, \dots, L)$, és

$$\begin{aligned} |K_n(x)| &\leq 2^{-m+2j_0} + 2^{j_0-1-m} \sum_{i=j_0+1}^{i_0} 2^i \\ &\leq 2^{-m+2j_0} + 2^{-m+j_0+i_0} \\ &\leq 2 \cdot 2^{-m+j_0+i_0} \end{aligned}$$

$(2^{-j_0} + 2^{-i_0-1} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-i_0}, j_0 = 1, \dots, L, i_0 = j_0, \dots, m-1)$.
Mivel $2^{j_0} \geq 2^{-m+j_0+i_0}$ ($m > L, j_0 = 0, \dots, L, i_0 = j_0 - 1, \dots, m-2$), ezért

$$\sup_{n \geq 2^M} |K_n(x)| \leq 2^{j_0} \quad (2^{-j_0} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-M}).$$

Másképp $2^{-m+j_0+i_0} \leq 2^{-M-1+j_0+i_0}$ miatt

$$\sup_{n \geq 2^M} |K_n(x)| \leq 2^{-M-1+j_0+i_0}$$

$(2^{-j_0} + 2^{-i_0-1} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-i_0}, j_0 = 0, \dots, L, i_0 = j_0 - 1, \dots, M-1)$,
Következésképpen $M \geq L$ esetén

$$\begin{aligned} \int_{2^{-L}}^1 \sup_{n \geq 2^M} |K_n(x)| dx &\leq \sum_{j_0=0}^L 2^{j_0} \cdot 2^{-M} + \sum_{j_0=0}^L \sum_{i_0=j_0}^{M-1} 2^{-i_0} \cdot 2^{-M-1+j_0+i_0} \\ &\leq 2^{L+1} \cdot 2^{-M} + 2^{-M-1} \sum_{j_0=0}^L 2^{j_0} (M - j_0) \\ &\leq 2^{L-M} (M - L + 3), \end{aligned}$$

azaz ha $N \geq \delta^{-1}$, akkor

$$\int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} |K_n(x)| dx \leq 4 \frac{1}{N\delta} (\log_2 N\delta + 3).$$

Megjegyezzük, hogy Memić [Mem12] ezzel analóg eredményt igazolt az $N \geq \delta^{-1}$ esetre, de nem foglalkozott az $N < \delta^{-1}$ esettel.

Tekintsük most ezt az utóbbi, az előzőnél technikásabb, az $M < L$ feltételnek megfelelő esetet. Az $n \geq 2^M$ indexeket osszuk két részre: $2^M \leq n < 2^L, 2^L \leq n$. Vegyük az ezeknek megfelelő felbontást

$$\sup_{n \geq 2^M} \frac{1}{n} |K_n| \leq \max_{2^M \leq n < 2^L} |K_n| + \sup_{n \geq 2^L} |K_n|.$$

A második tag a fenti módon becsülhető:

$$\int_{2^{-L}}^1 \sup_{n \geq 2^L} |K_n| \leq 3.$$

Térjünk át a $2^M \leq n < 2^L$ indextartományt tartalmazó első tagra:

$$|K_n| \leq \sum_{j=0}^{m-1} 2^{j-m} \left(2D_{2^j} + \sum_{i=j+1}^{m-1} D_{2^i} \right) + \sum_{j=0}^{m-1} 2^{j-m} \sum_{i=j+1}^{m-1} \tau_{e_j} D_{2^i}$$

$(2^{m-1} \leq n < 2^m, m = M + 1, \dots, L)$.

Adott m -re használjuk most is a $[2^{-L}, 1)$ intervallumnak az $M > L$ esetben alkalmazott felbontását, azaz jelölje $j_0 \leq L$ azt a természetes számot, amelyre $2^{-j_0} \leq x < 2^{-j_0+1}$. Ezt az intervallumot tovább osztva vagy $2^{-j_0} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-(m-1)}$, vagy van olyan $j_0 \leq i_0 \leq m-2$ szám, hogy $2^{-j_0} + 2^{-i_0-1} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-i_0}$. Ekkor $m-1 \leq j_0 \leq L$, vagyis $2^{-L} \leq x < 2^{-(m-1)}$ esetén

$$\begin{aligned} |K_n(x)| &\leq \sum_{j=0}^{m-1} 2^{j-m} \left(2 \cdot D_{2^j}(x) + \sum_{i=j+1}^{m-1} D_{2^i}(x) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} 2^{j-m} \left(2 \cdot 2^j + \sum_{i=j+1}^{m-1} 2^i \right) \\ &\leq 2^{m+1}. \end{aligned}$$

Ha $M < j_0 \leq m$, akkor $2^{-j_0} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-(m-1)}$ esetén

$$\begin{aligned} |K_n(x)| &\leq \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{j-m} \left(2^{j+1} + \sum_{i=j+1}^{j_0-1} 2^i \right) + 2^{j_0-1-m} \sum_{i=j_0-1}^{m-1} 2^i \\ &\leq 2 \cdot 2^{-m+2j_0} + 2^{j_0-1} \\ &\leq 3 \cdot 2^{j_0}, \end{aligned}$$

a $2^{-j_0} + 2^{-i_0-1} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-i_0}$ ($j_0 \leq i_0 \leq m-2$) esetben pedig

$$\begin{aligned} |K_n(x)| &\leq \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{j-m} \left(2^{j+1} + \sum_{i=j+1}^{j_0-1} 2^i \right) + 2^{j_0-1-m} \sum_{i=j_0-1}^{i_0} 2^i \\ &\leq 2 \cdot 2^{-m+2j_0} + 2^{-m+j_0+i_0} \\ &\leq 3 \cdot 2^{-m+j_0+i_0}. \end{aligned}$$

Összefoglalva

$$|K_n(x)| \leq \begin{cases} 2^{m+1}, & 2^{-L} \leq x < 2^{-(m-1)}; \\ 3 \cdot 2^{j_0}, & 2^{-j_0} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-(m-1)}, j_0 \leq m-1; \\ 3 \cdot 2^{-m+j_0+i_0}, & 2^{-j_0} + 2^{-i_0-1} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-i_0}, j_0 \leq m-1, \\ & i_0 = j_0, \dots, m-1. \end{cases}$$

$(2^{(m-1)} \leq n < 2^m, m = M + 1, \dots, L - 1)$.

Minden x pontban teljesül, hogy az adott becslés nem haladja meg a $4/x$ értéket. Mivel

$m > M$, és $2^{-m+j_0+i_0} < 2^{j_0}$, ezért a $[2^{-j_0}, 2^{-j_0} + 2^{-M})$ intervallumon $K_n(x) \leq 3 \cdot 2^{j_0}$ ($2^M \leq n < 2^L$). Másrészt a $3 \cdot 2^{-m+j_0+i_0}$ mennyiség lehetséges legnagyobb értéke a $[2^{-j_0} + 2^{-i_0-1}, 2^{-j_0} + 2^{-i_0})$ intervallumokon az $i_0 = j_0, \dots, M-1$ esetben $3 \cdot 2^{-M+j_0+i_0}$.

Ezeket figyelembe véve kapjuk az alábbi becslést

$$\max_{2^M \leq n < 2^L} |K_n(x)| \leq \begin{cases} 4/x, & 2^{-L} \leq x < 2^{-M}; \\ 3 \cdot 2^{j_0}, & 2^{-j_0} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-M}, \\ & j_0 = 0, \dots, M; \\ 3 \cdot 2^{-M+j_0+i_0}, & 2^{-j_0} + 2^{-i_0-1} \leq x < 2^{-j_0} + 2^{-i_0}, \\ & j_0 = 0, \dots, M, i_0 = j_0, \dots, M-1. \end{cases}$$

Innen a

$$\begin{aligned} \int_{2^{-L}}^1 \max_{2^M \leq n < 2^L} |K_n| &\leq 4(L-M) + 3 \cdot 2^{-M} \sum_{j_0=0}^M 2^{j_0} + 3 \cdot 2^{-M} \cdot \sum_{j_0=0}^M 2^{j_0} (M-j_0). \\ &\leq 4(L-M) + 12. \end{aligned}$$

Az $M < L$ esetben azt kaptuk, hogy

$$\int_{2^{-L}}^1 \sup_{n \geq 2^M} \frac{1}{n} |K_n| \leq \int_{2^{-L}}^1 \max_{2^M \leq n < 2^L} |K_n| + \int_{2^{-L}}^1 \sup_{n \geq 2^L} |K_n| \leq 4(L-M) + 15.$$

Következésképpen $N < \delta^{-1}$ esetén

$$\int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} |K_n| \leq 4 \log_2 \frac{1}{\delta N} + 15.$$

Trigonometrikus eset

A trigonometrikus esetben is érvényes egy, az (1)-hez hasonló pontonkénti becslés. Nevezetesen,

$$|D_n(t)| = \left| \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2} \right| \leq \min \left\{ \frac{1}{\pi} (n+1/2), \frac{1}{2t} \right\}$$

($n \in \mathbb{N}$, $-\pi \leq t \leq \pi$).

Ebből adódik, hogy az általános (c_k) sorozatok esetét tekintve a trigonometrikus Dirichlet-magokra is fennállnak a (2), (5), illetve (6)-nak megfelelő egyenlőtlenségek.

Ha a Fejér-magok

$$\int_{\delta}^{\pi} \sup_{n \geq N} |K_n(t)| dt$$

speciális esetét vesszük, akkor a Walsh-rendszerhez képest egyszerűbb a helyzet. Ez egyrészt a Fejér-magok pozitivitásának, másrészt a magok ismert zárt alakjának

$$K_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 t/2} \quad (-\pi \leq t \leq \pi, n \in \mathbb{N})$$

köszönhető.

A $|\sin \alpha| \geq \frac{2}{\pi}|\alpha|$ egyenlőtlenségből rögtön adódik, hogy

$$K_n(t) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n+1} \frac{1}{t^2} \quad (0 < |t| \leq \pi, n \in \mathbb{N}).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy $N \geq \delta^{-1}$ esetén

$$\int_{\delta}^{\pi} \sup_{n \geq N} K_n(t) dt \leq \int_{\delta}^{\pi} \frac{\pi}{2} \frac{1}{N+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{N\delta}.$$

Másrészt $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$ miatt

$$K_n(t) \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \frac{\frac{n+1}{2}t}{\frac{t^2}{\pi^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{t} \quad (0 < |t| \leq \pi, n \in \mathbb{N}).$$

Ezt kombinálva a Fejér-magra fenti vonatkozó előző egyenlőtlenséggel $N < \delta^{-1}$ esetén az alábbi felső becslésre jutunk

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\pi} \sup_{n \geq N} K_n(t) dt &= \int_{\delta}^{1/N} \sup_{n \geq N} K_n(t) dt + \int_{1/N}^{\pi} \sup_{n \geq N} K_n(t) dt \\ &\leq \int_{\delta}^{1/N} \frac{\pi}{2} \frac{1}{t} dt + \int_{1/N}^{\pi} \frac{\pi}{2} \frac{1}{N+1} \frac{1}{t^2} dt \\ &\leq \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{N\delta} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Összefoglalva

$$\int_{\delta}^{\pi} \sup_{n \geq N} K_n(t) dt \leq \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{N\delta} + \frac{\pi}{2}, & N < \delta^{-1}; \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{N\delta}, & N \geq \delta^{-1}. \end{cases}$$

Könnyű megmutatni, hogy a fenti becslés nagyságrendileg pontos. Az $N \geq \delta^{-1}$ esetre ugyanis a szokásos módon igazolható, hogy

$$\int_{\delta}^{\pi} K_N(t) dt \geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{N+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{N+1}{2}t}{t^2} dt \geq C \frac{1}{N\delta} \quad (N \geq \delta^{-1}, \delta \leq \pi/2).$$

Másrészt

$$\sin \frac{n+1}{2}t \geq \frac{n+1}{\pi}t \quad (0 \leq t \leq \pi/(n+1))$$

miatt

$$K_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \geq \frac{1}{\pi^2} \frac{n+1}{\pi} \geq \frac{1}{\pi^3} \frac{1}{t} \quad \left(\frac{\pi}{n+2} \leq t \leq \frac{\pi}{n+1} \right).$$

Ha tehát $N < \delta^{-1}$, akkor

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\pi} \sup_{n \geq N} K_n(t) dt &\geq \sum_{n=N}^{[\pi/\delta]-2} \int_{\pi/(n+2)}^{\pi/(n+1)} K_n(t) dt \\ &\geq \frac{1}{\pi^3} \int_{\pi/[\pi/\delta]}^{\pi/(N+1)} \frac{1}{t} dt \\ &\geq C \ln \frac{1}{N\delta}. \end{aligned}$$

Befejezésül azt talán érdemes megjegyezni, hogy a Fejér-magokra fent alkalmazott pontonkénti becslések felhasználhatók az általános esetben is. Ehhez kiindulásul szolgálhat a

$$\sum_{k=1}^n c_k D_k = \sum_{j=1}^{n-1} j \Delta c_j K_j + n c_n K_n$$

(Walsh esetre érvényes indexek) Abel-átalakítás.

2. KÉRDÉS: *Mit lehet mondani, ha az egyes Sidon jellegű állításoknál kicseréljük a Dirichlet féle magfüggvények lineáris kombinációinak normáját. Mondjuk egy Hardy jellegű normára? Esetleg ahogy az L^1 jellegű állításhoz $L \log L$ jellegű tartozik, úgy $L \log L$ jellegű állításhoz $L \log^2 L$ jellegű?*

VÁLASZ A 2. KÉRDÉSRE

A kérdés jogosultságát mutatja, hogy már az eddigi vizsgálatokban is felmerült a Dirichlet-magfüggvények lineáris kombinációi normájának az L^1 -től eltérő becslése. Nevezetesen, a kétdimenziós Hörmander-Mihlin korlátosságának bizonyításában ([DalFri08], értekezés 5.16 Lemma ii)) egy előzetesen lemmaként megfogalmazott L^2 -normás Sidon-típusú egyenlőtlenséget aklamaztunk. Mivel a kérdésben különös hangsúllyal szerepel a Hardy-normára vonatkozó becslés, ezért a továbbiakban ezzel foglalkozunk.

Walsh eset

Tekintsük a természetes számok halmazán értelmezett, az értekezés 3.4 pontjában, illetve eredetileg a [Fri01] cikkben bevezetett $\mathcal{H}_{\mathbb{N}}$ sorozat Hardy-teret. A 3.15 tételben megadtuk a $\mathcal{H}_{\mathbb{N}}$ tér Telyakovskiĭ-transzformálttal való jellemzését, valamint atomos struktúráját. A $\mathcal{H}_{\mathbb{N}}$ -beli atomok halmazát $A_{\mathbb{N}}$ -nel jelölve $a \in A_{\mathbb{N}}$ ha vagy valamilyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ -re

i)

$$a_k = \begin{cases} 1/n, & k = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

vagy

ii) vannak olyan $j, k \in \mathbb{N}$ természetes számok, hogy

$$\mathbf{a}_i = 0 \quad (i < j, i \geq k), \quad \sum_{i=j}^{k-1} \mathbf{a}_i = 0, \quad |\mathbf{a}_i| \leq (k-j)^{-1} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Az i)-beli sorozatokat első típusú, míg az ii)-belieket második típusú atomnak nevezzük. Tekintsük először a második típusú atomok, ezen belül is a diadikus atomok esetét. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{\mathbb{N}}$ diadikus atom, ha van olyan $s, n \in \mathbb{N}$, hogy a második típusú atom fenti definíciójában $j = s2^n$, $k = (s+1)2^n$. Vezessük be a $\mathcal{D}_{\mathbf{a}} = \sum_{i=s2^n}^{(s+1)2^n-1} \mathbf{a}_i D_i$ jelölést. A $\sum_{i=s2^n}^{(s+1)2^n-1} \mathbf{a}_i = 0$ feltétel miatt

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}} = w_{s2^n} \sum_{i=1}^{2^n} \mathbf{a}_{s2^n+i} D_i.$$

Ebből látható, hogy $\widehat{\mathcal{D}_{\mathbf{a}}}(j) = 0$, ha $j \notin \{s2^n, \dots, (s+1)2^n - 1\}$. Nyilvánvalóan van olyan $\ell \in \mathbb{N}$, amelyre $2^\ell \leq s2^n < (s+1)2^n \leq 2^{\ell+1}$. Ekkor

$$S_{2^k} \mathcal{D}_{\mathbf{a}} = \begin{cases} 0, & k \leq \ell \\ \mathcal{D}_{\mathbf{a}}, & k > \ell \end{cases},$$

azaz $\mathcal{D}_{\mathbf{a}}$ diadikus maximálfüggvénye $(\mathcal{D}_{\mathbf{a}})^*$ megegyezik $\mathcal{D}_{\mathbf{a}}$ -val: $(\mathcal{D}_{\mathbf{a}})^* = \mathcal{D}_{\mathbf{a}}$. A Walsh-rendszerre teljesül a *Schipp Ferenc* [Sch90] által bevezetett diadikus S -tulajdonság ((2.42) az értekezésben), amiből a [Fri01]-ben leírt módon második típusú diadikus atomokra

$$\|\mathcal{D}_{\mathbf{a}}\|_{\mathbb{H}_{[0,1]}} = \|\mathcal{D}_{\mathbf{a}}\|_1 \leq C$$

következik.

Folytassuk az úgynevezett speciális második típusú atomok esetével, azaz legyen $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{\mathbb{N}}$ olyan, amelyre alkalmas $k < n$ ($k, n \in \mathbb{N}$) számokkal

$$\mathbf{a}_j = \begin{cases} 2^{-(k+1)}, & 2^n - 2^k < j \leq 2^n; \\ -2^{-(k+1)}, & 2^n < j \leq 2^n + 2^k; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor

$$S_{2^\ell} \mathcal{D}_{\mathbf{a}} = \begin{cases} 0, & \ell < n; \\ 2^{-(k+1)} \sum_{j=2^n-2^k+1}^{2^n} D_j, & \ell = n; \\ \mathcal{D}_{\mathbf{a}}, & \ell > n. \end{cases}$$

Az $\ell = n$ esetre tekintsük az alábbi felbontást

$$\begin{aligned} S_{2^n} \mathcal{D}_{\mathbf{a}} &= 2^{-(k+1)} \sum_{j=2^n-2^k+1}^{2^n} D_j = 2^{-(k+1)} \cdot 2^k D_{2^n-2^k} + 2^{-(k+1)} w_{2^n-2^k} \sum_{j=1}^{2^k} D_j \\ &= \frac{1}{2} (D_{2^n} - w_{2^n-2^k} D_{2^k}) + \frac{1}{2} w_{2^n-2^k} K_{2^k}, \end{aligned}$$

ahol K_{2^k} a 2^k indexű Walsh-Fejér mag.

Ha $\ell > n$, akkor a fentihez hasonlóan

$$\begin{aligned} S_{2^\ell} \mathcal{D}_a &= \mathcal{D}_a = 2^{-(k+1)} \sum_{j=2^{n-2^k+1}}^{2^n} D_j - 2^{-(k+1)} \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+2^k}} D_j \\ &= \frac{1}{2} (D_{2^n} - w_{2^{n-2^k}} D_{2^k}) + \frac{1}{2} w_{2^{n-2^k}} K_{2^k} - \frac{1}{2} D_{2^n} - \frac{1}{2} w_{2^n} K_{2^k} \\ &= -\frac{1}{2} w_{2^{n-2^k}} D_{2^k} + \frac{1}{2} (w_{2^{n-2^k}} - w_{2^n}) K_{2^k}. \end{aligned}$$

Mivel $D_{2^j} \geq 0$, és $K_{2^j} \geq 0$ ($j \in \mathbb{N}$), ezért

$$(\mathcal{D}_a)^* \leq |S_{2^n} \mathcal{D}_a| + |S_{2^{n+1}} \mathcal{D}_a| \leq \frac{1}{2} D_{2^n} + D_{2^k} + \frac{3}{2} K_{2^k}.$$

Innen $\|D_{2^j}\|_1 = \|K_{2^j}\|_1 = 1$ ($j \in \mathbb{N}$) miatt az adódik, hogy speciális második típusú a atomokra

$$\|\mathcal{D}_a\|_{\mathbb{H}_{[0,1]}} \leq 3.$$

A [Fri13] cikkben megmutattuk, hogy minden a második típusú atom felbontható a következőképpen

$$a = 4 \sum_{i=1}^3 a^{(i)},$$

ahol $a^{(1)}$ speciális atom, $a^{(2)}$ és $a^{(3)}$ pedig diadikus atomok. Tetszőleges második típusú atomra igaz tehát a

$$\|\mathcal{D}_a\|_{\mathbb{H}_{[0,1]}} \leq C$$

becslés.

Tekintsük most az első típusú atomok esetét. Feltéhetjük, hogy a definícióban szereplő n egész szám kettő hatvány, azaz

$$a_k = \begin{cases} 2^{-n}, & k = 1, \dots, 2^n; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor $\mathcal{D}_a = K_{2^n}$, és

$$(\mathcal{D}_a)^* = \max_{k=0, \dots, n} |S_{2^k}(\mathcal{D}_a)| = \frac{1}{2^n} \max_{k=0, \dots, n} (2^k K_{2^k} + (2^n - 2^k) D_{2^k}).$$

Ismeretes (ld. pl. [SchWadSim90]), hogy

$$\begin{aligned} K_{2^k}(x) &= \frac{1}{2} \left((1 + 2^{-k}) D_{2^k}(x) + \sum_{j=1}^k 2^{j-1-k} D_{2^k}(x + 2^{-j}) \right) \\ &= \frac{2^k + 1}{2} \chi_{[0, 2^{-k})} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k 2^{j-1} \chi_{[2^{-j}, 2^{-j+2^{-k})} \end{aligned}$$

és

$$D_{2^k}(x) = \begin{cases} 2^k, & 0 \leq x < 2^{-k}; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezek alapján

$$|S_{2^k}(\mathcal{D}_a)|_{[2^{-j}, 2^{-j+1})} = \begin{cases} 2^k(1 + 2^{-n-1} - 2^{k-n-1}), & k \leq j-1; \\ 2^{k+j-n-2}\chi_{[2^{-j}, 2^{-j+2^{-k}})}, & k \geq j. \end{cases}$$

Következésképpen

$$(\mathcal{D}_a)^*|_{[2^{-j}, 2^{-j+1})} = 2^{j-1}(1 + 2^{-n-1} - 2^{j-n-2}) \quad (j = 0, \dots, n)$$

és

$$(\mathcal{D}_a)^*|_{[0, 2^{-n})} = \frac{2^n + 1}{2}.$$

Innen egyszerűen adódik, hogy

$$\|\mathcal{D}_a\|_{\mathbb{H}_{[0,1)}} = \|(\mathcal{D}_a)^*\|_1 \approx n.$$

Az atomokra kapott becslésekből az alábbi, a Walsh-Dirichlet magok vonatkozó Sidon-típusú egyenlőtlenséget kaphatjuk diadikus Hardy-normában.

Legyen $(c_k) \in \mathcal{H}_{\mathbb{N}}$. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j^{(1)} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu_{\ell} a_{\ell}^{(2)}$$

a (c_k) egy atomos felbontása, amelyben $a_{\ell}^{(2)} \in \mathbf{A}_{\mathbb{N}}$ ($\ell \in \mathbb{N}$) második típusú atom, $a^{(j)}$ ($j \in \mathbb{N}$) pedig a $\chi_{\{1, \dots, j\}}/j$ első típusú atomot jelöli. Ekkor

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k D_k \right\|_{\mathbb{H}_{[0,1)}} \leq C \left(\inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \log(j+1) + \sum_{\ell=1}^{\infty} |\mu_{\ell}| \right\} \right).$$

A fenti egyenlőtlenség ebben a formában nehezen alkalmazható. Legyen most $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy a (c_k) sorozat tagjaira $c_k = 0$ ($k > 2^n$) teljesül. Nyilvánvaló, hogy ekkor $(c_k) \in \mathcal{H}_{\mathbb{N}}$. A (c_k) sorozat atomos felbontásában most korlátozódjunk a $2^{-n}\chi_{\{1, \dots, 2^n\}}$ első típusú atomra, és az olyan második típusú diadikus atomokra, amelyek tartója része az $\{1, \dots, 2^n\}$ halmaznak. Felhasználva ezeknek az atomoknak a $\mathbb{H}_{[0,1)}$ diadikus Hardy-térbeli atomokkal való természetes megfeleltetését az alábbi Sidon-típusú egyenlőtlenséget kapjuk

$$\frac{1}{2^n} \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_k D_k \right\|_{\mathbb{H}_{[0,1)}} \leq C \left(\frac{n}{2^n} \left| \sum_{k=1}^{2^n} c_k \right| + \|\Gamma(c_1, \dots, c_{2^n})\|_{\mathbb{H}_{[0,1)}} \right),$$

ahol $\Gamma(c_1, \dots, c_{2^n}) = \sum_{k=1}^{2^n} c_k \chi_{[(k-1)2^{-n}, j2^{-n})}$.

Trigonometrikus eset

A trigonometrikus rendszerre hasonló eredmény igaz. Ennek igazolásához a konjugált magfüggvényeket használhatjuk. Jelölje $\widetilde{D}_k$ a k -adik konjugált Dirichlet-féle magfüggvényt. A Schipp Ferenc által [Sch92]-ben igazoltakból következik, hogy második típusú $a \in A_{\mathbb{N}}$ atom esetén

$$\|\widetilde{\mathcal{D}}_a\|_1 \leq C,$$

ahol $\widetilde{\mathcal{D}}_a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \widetilde{D}_k$.

Másrészt a konjugált Fejér-féle magfüggvények L^1 normájára [Fri97]-ben adott becslésből következik, hogy az

$$a_k = \begin{cases} 1/n, & k = 1, \dots, n; \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

első típusú atomra

$$\|\widetilde{\mathcal{D}}_a\|_1 \approx \log n.$$

Ezek felhasználásával Walsh-rendszerre igazoltakkal analóg eredmények kaphatók.

3. KÉRDÉS: *Ha a (c_k) Sidon együtthatókat átrendezzük, akkor nyilván más függvény normáját kell becsülni és ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy rendezés független becsléseket keressünk, akkor lehet esetleg jobbat is találni. Gondolok itt például arra, hogy a*

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} D_k \right| \quad \text{és} \quad \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} D_k \right|$$

függvények normái esetenként jelentősen eltérnek.

VÁLASZ A 3. KÉRDÉSRE

A Sidon-típusú egyenlőtlenségek bal oldala, azaz

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| \quad ((c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n)$$

olyan normát definiál az $\mathbb{R}^n$ téren, ami függ az együttható vektor elemeinek sorrendjétől, amit egyébként a kérdésben szereplő példa is jól illusztrál. Ezt a normát neveztük Sidon-normának az értekezésben. A Sidon-típusú egyenlőtlenségek interpretálhatóak úgy, mint a Sidon-normának ismert normákkal megfogalmazott felső becslése. A leginkább kézenfekvő alkalmazás, azaz az integrálhatósági feltételek esetén a klasszikus eredmények is tipikusan sorrendtől függő feltételeket (Kolmogorov-, Young-, Sidon-féle feltételek), mint például a monotonitás, konvexitás fogalmaznak meg. Az integrálhatósági feltételek területén azóta is számos ilyen eredmény született. Megjegyezzük azonban, hogy azokban az esetekben a differencia sorozat szerepel, és hogy a klasszikus eredményeket éppen átrendezésre invariáns Sidon-normák (pl. Fomin-féle feltétel) segítségével lehetett megjavítani. Másrészt azonban az értekezésben szereplő Telyakovskij-feltétel tipikusan sorrendtől függő feltétel.

Visszatérve a kérdésfelvetéshez, ha nem szorítkozunk az együtthatók rendezésétől független becslésekre, akkor valóban lehet jobb becslést találni. Erre példa a Schipp Ferenc [Sch90] által igazolt Hardy-típusú együttható becslés. A [Fri93], [Fri95] cikkekben azt mutattuk meg, hogy a cosinus és a Walsh rendszer esetén a Sidon-normát felülről becsülő legjobb átrendezésre invariáns norma olyan Orlicz-típusú norma, amihez tartozó M Young-függvény $M(x) = x \log x$. Ismeretes, hogy mind a diadikus, mind pedig a valós nemperiódikus Hardy norma kisebb vagy egyenlő, mint ez az Orlicz norma, azaz a sorrendtől függő Hardy-normás eredmények jobbak az összes sorrendtől független eredményénél. Ugyanakkor felmerül az a nehézség, hogy a Hardy-normákat csak nagyon bonyolultan lehet közvetlenül az együtthatókból kiszámolni. Megjegyezzük, hogy a kérdésben szereplő konkrét példa, azaz

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} D_k \right| \quad \text{és a} \quad \frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} D_k \right|$$

esetén mind a két Hardy-norma, és az Orlicz-norma is ugyanazt az eredményt adja:

$$\|\Gamma(1, 1/2, \dots, 1/(n-2), 1/(n-1))\|_X \approx \frac{1}{n} \log^2 n$$

és

$$\|\Gamma(1/(n-1), 1/(n-2), \dots, 1/2, 1)\|_X \approx \frac{1}{n} \log^2 n \quad (X = \mathbb{H}_{[0,1]}, \mathcal{H}_{[0,1]}, L_M)$$

$$(\Gamma(c_1, \dots, c_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \chi_{[(k-1)/n, k/n]}).$$

Ez következik abból, hogy mindegyik szóban forgó norma invariáns az $1/2$ -re történő argumentum tükrözésre. Ebből az is következik, hogy a monoton növekvő, illetve csökkenő eseteket nem választják szét, habár a Sidon-norma ezekre nagyságrendileg is eltérő lehet. A két Hardy-norma ugyan függ az együtthatók sorrendjétől, mégsem tesz különbséget a monoton növekvő, illetve csökkenő együttható sorozatok között. Tekintsük a természetes számok halmazán értelmezett, a 2. kérdésre adott válaszban is felhasznált $\mathcal{H}_{\mathbb{N}}$ sorozat Hardy-teret. Megmutattuk, hogy erre a sorozat Hardy-normára is érvényes egy Sidon-típusú egyenlőtlenség mind a trigonometrikus, mind pedig a Walsh rendszer esetén. Például

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right| \leq C \|(c_1, \dots, c_n, 0, \dots)\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{N}}}.$$

Az atomos technikát alkalmazva könnyű igazolni, hogy a fenti példát tekintve ezzel a normával már a megfelelő becsléseket kapjuk, ugyanis

$$\|(1, 1/2, \dots, 1/(n-2), 1/(n-1))\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{N}}} \approx \log n,$$

viszont

$$\|(1, 1/2, \dots, 1/(n-2), 1/(n-1))\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{N}}} \approx \log^2 n,$$

A példa jól illusztrálja az eredeti, a $[0, 1]$ intervallumon tekintett Hardy terek és a sorozat Hardy tér közötti különbséget, és egyben mutatja az utóbbi bevezetésének indokoltságát.

A sorozat Hardy-norma nemcsak, hogy függ az együttthatók sorrendjétől, de megfelelően visszaadja a monoton növekedő, illetve csökkenő esetek közötti különbséget.

HIVATKOZÁSOK

- [DalFri08] Daly, J.; Fridli, S. *Hörmander multipliers on two-dimensional dyadic Hardy spaces*, J. Math. Anal. Appl. **348** (2008), 977–989.
- [Fri93] Fridli, S. *An inverse Sidon type inequality*, Studia Math. **105** (1993), 283–308.
- [Fri95] Fridli, S. *An inverse Sidon type inequality for the Walsh system*, J. Math. Anal. Appl. **193** (1995), 715–736.
- [Fri97] Fridli, S. *On the L^1 -convergence of Fourier series*, Studia Math. **125** (1997), 161–174.
- [Fri01] Fridli, S. *Hardy spaces generated by an integrability condition*, J. Approx. Theory **113** (2001), no. 1, 91–109.
- [Fri13] Fridli, S. *On integrability and strong summability of Walsh–Kaczmarz series*, Analysis Mathematica **40** (2014), 197–214.
- [Gat13] Gát, Gy. *On the Fejér kernel functions with respect to the character system of the group of 2-adic integers*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **40** (2013), 257–267.
- [Mem12] Memić, N. *Estimates for the integral of maximal functions of Fejér kernel*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhzi (N.S) **28** (2012), 177–187.
- [Mor90] Móricz, F. *Sidon type inequalities*, Publ. de L’Inst. Math. **48** (1990), 101–109.
- [Sch90] Schipp, F. *On Sidon type inequalities*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai North-Holland (J. Szabados and K. Tandori ed.), Amsterdam-Oxford-New York **58** (1990), 603–614.
- [Sch92] Schipp, F. *Sidon-type inequalities*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Approx. Theory, Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong **138** (1992), 421–436.
- [SchWadSim90] Schipp, F.; Wade, W.R.; Simon, P. (with assistance from J. Pál) *“Walsh series”*, Adam Hilger, Bristol, New York, 1990.

Budapest, 2015. március 19.

Fridli Sándor