

Fridli Sándor

**Trigonometrikus és Walsh-sorokkal kapcsolatos vizsgálatok
című
MTA doktori értekezéséről**

Fridli Sándor MTA doktori értekezése hat fejezetből áll. Trigonometrikus, Walsh-Paley, Walsh-Kaczmarz és esetenként némely feltételeknek eleget tevő általános ortonormált rendszerre vonatkozó eredményeket tartalmaz. Célja a szerző által elért eredmények bemutatása olyan egységes keretben, amely a közöttük levő logikai kapcsolatot helyezi előtérbe. Ennek a kapcsolatnak az alapját a különféle Sidon típusú egyenlőtlenségek adják. A 160 oldalas dolgozat az első bevezető, különféle - elsősorban a Walsh rendszerre és a Hardy terekkel foglalkozó - alapfogalmakat ismertető fejezet mellett további négy fejezetből, illetőleg a hatodik, a jelöléseket tartalmazó fejezetből áll.

A dolgozat érdemi részének első része a második fejezet, amely az értekezés címét adó Sidon típusú egyenlőtlenségekről, azaz Dirichlet magfüggvények lineáris kombinációi normájának becsléséről szól. Szeretném kiemelni a 2.1 és a 2.3 Tételeket, melyek megadják a legjobb az adott (c_k) konstansok permutációira invariáns becslést a trigonometrikus esetben. Ez a (c_k) együtthatók által generált lépcsősfüggvény egy átrendezésre invariáns Hardy jellegű normája. Fontos, alapvető eredménynek tartom, amely egyfajta értelemben lezárja a Sidon típusú egyenlőtlenségek keresésének kérdését. A szerző eredménye a Walsh-Paley és a Walsh-Kaczmarz rendszerekre vonatkozó megfelelő legjobb becslés is.

A 2.5 Tételben a trigonometrikus rendszerre igazolja ezt az eredményt egy olyan általánosított Sidon típusú függvényre, amely arról szól, hogy a Dirichlet magfüggvények csak egy adott de tetszőleges indextől „indulnak”. Ez messze nem triviális általánosítása a 2.1 és 2.3 Tételeknek, ugyanis a (c_k) együtthatóknak nem engedjük meg csak azokat a permutációit, amelyeknél az első meghatározott számú marad nulla. Ezt az általánosítást később a Walsh-Paley és a Walsh-Kaczmarz rendszerre is elvégzi. Bár a 2. fejezet eredményei önmagukban is érdekesek, értéküket nagyban növeli, hogy egy eszközt adnak a későbbi fejezetekben leírt L^1 konvergencia osztályok, erős szummációs vagy erős approximációs eredmények elérésére. Az értekezésben a jelölt igen nagyszámú eredménye szerepel, így terjedelmi okok következtében természetesen nem kerül sor az összes eredmény igazolására. Ugyanakkor az értekezés jól segíti a Sidon típusú egyenlőtlenségek és alkalmazásaik témakör áttekintését is és a szerző e témakörbe vágó munkásságának megismerését is.

A harmadik fejezetben az értekezés trigonometrikus és Walsh sorok integrálhatósági valamint L^1 -konvergencia feltételeivel, mint Sidon típusú egyenlőtlenségek alkalmazásaival foglalkozik.

Szeretném kiemelni a következő elegáns L^1 -konvergencia osztályokra vonatkozó eredményt, illetve még pontosabban egy részletét. A 3.6 Tétel - többek között azt mondja ki, hogy, ha az

$f \in L^1_{[0,1]}$ integrálható függvény trigonometrikus Fourier együtthatói differencia sorozatára igaz, hogy

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k|=n+1}^{[\lambda n]} |\Delta \hat{f}^T(k)| \log^+ |k \Delta \hat{f}^T(k)| = 0,$$

akkor az $S_n f$ Fourier részletösszegek pontosan akkor tartanak f -hez L^1 normában, ha

$$\hat{f}(n) \log |n| \rightarrow 0 \quad (|n| \rightarrow \infty).$$

Ennek a tételnek a 3.11 Tétel a Walsh-Paley sorokra vonatkozó megfelelője, azzal az eltéréssel, hogy nem Fourier együtthatója és $\log n$ szorzatának kell nullához tartania, hanem $\log n$ helyett csak n variációjával $V(n)$ -nel való szorzatának a norma konvergencia teljesüléséhez.

A 3. fejezet 3.5. alfejezetében többek között egy Telyakovskiĭ által 1964-ben igazolt cosinus sorokra vonatkozó pontonkénti konvergencia és a határfüggvény integrálhatóságát szavatoló a sor együtthatóira vonatkozó feltételt általánosít lényegesen. A 3.19 Tétel bizonyos a Telyakovskiĭ által megadott és Sidon jellegű feltételek teljesülése esetén garantálja, hogy a $\Phi = \{\phi_k\}$ ortonormált rendszerre vonatkozó $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k$ sor egy f integrálható függvény Φ -Fourier sora lesz, továbbá f a nevezett sor pontonkénti összefüggvénye. A 3.19 Tétel alkalmazhatóságára a motivációjul szolgáló cosinus rendszer mellett a Walsh-Paley és a Walsh-Kaczmarz rendszer is példa. A 3.19 Tétel tulajdonképpen azt mutatja, hogy a Telyakovskiĭ féle integrálhatósági eredmény egy Sidon-típusú egyenlőtlenség következménye. Azt gondolom, hogy ez is alátámasztja a második fejezet eredményeinek fontosságát.

A negyedik fejezet a jelölt különféle ortonormált rendszerek Fourier sora erős szummációs és erős approximációs tulajdonságaival foglalkozik. Tovább erősíti a pályázó által igazolt Sidon típusú egyenlőtlenségek értékét.

A 4.2 Tételben Fridli Sándor egy általánosan megfogalmazott - rendszertől független - dualitási kapcsolatra vonatkozó eredményt igazol. Ennek alapján az adott ortonormált rendszerre vonatkozó Sidon típusú egyenlőtlenség igazolása ekvivalens a megfelelő erős szummációs eredménnyel. Jól mutatja ezt a kapcsolatot a 4.3. Példa, amely szerint ha $1/p + 1/q = 1$, $f \in \mathcal{C}^\Phi$, akkor a Φ rendszer vonatkoztatva akkor és csakis akkor egyenletesen erős L^p szummábilis a függvény Fourier sora, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x < 1} \sum_{k=1}^n |S_k^\Phi f(x) - f(x)|^p = 0$$

ha a következő Sidon típusú egyenlőtlenség teljesül

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k(x, t) \right| dt \leq C \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |c_k|^q \right)^{1/q}.$$

A 4.5 Tételben az általa kifejlesztett technikák alkalmazásával egy Ψ "függvény alapú" erős szummációs tételt igazol a trigonometrikus, a Walsh-Paley és a Walsh-Kaczmarz féle rendszerekre vonatkozóan. Igazolja, hogy a pozitív eredmény pontosan akkor áll fenn, ha a Ψ függvény nem növekszik gyorsabban mint egy exponenciális függvény. A tétel a trigonometrikus rendszer esetében erősíti Totik Vilmos egy eredményét, amely megkövetelte a Ψ monoton növekedő függvény folytonosságát, de az értekezés írója ebben az eredményben belátta, hogy nem szükséges a folytonosságot feltenni.

A fejezet erős approximációs jellegű eredményei közül egy eredményt szeretnék kiemelni. Azt mondjuk, hogy Φ ortonormált rendszerre teljesül az $\mathfrak{S}$ tulajdonság az x pontban, ha a következő Sidon jellegű egyenlőtlenség teljesül.

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{2^n} c_k D_{k+l}(x, t) \right| dt \leq C \max_{0 \leq k < 2^n} |c_k|,$$

ahol $n, l \in \mathbb{N}$. A 4.3. Következmény azt mondja ki, hogy ha Ψ ortonormált rendszerre teljesül az egyenletes $\mathfrak{S}$ tulajdonság és a $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ legfeljebb polinomiálisan nő, akkor az erős ϕ eltérése a Fourier sor részletösszegeknek a függvénytől nem rosszabb mint a legjobb közelítés, azaz

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \phi(|S_k^\Phi f(x) - f(x)|) \leq C \phi(E_n^\Psi f), \quad (0 \leq x < 1, f \in \mathcal{C}^\Psi).$$

A tétel trigonometrikus rendszerre vonatkozó esete Totik Vilmos 1985-ös eredménye.

Az utolsó szakmai fejezet, azaz az ötödik fejezet multiplier kritériumokról szól. Nevezetesen, ha (ϕ) egy komplex számsorozat, akkor az általa generált multiplier transzformációt a Fourier együtthatók terén a $\widehat{T_\phi f}(k) = \phi(k) \hat{f}(k)$ ($f \in L^1$) egyenlőséggel szokás definiálni. Az erre a területre vonatkozó klasszikus Marcinkiewicz eredmény szerint, ha

$$\sup_{n \geq 0} \sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} |\Delta \phi(k)| < \infty,$$

akkor a trigonometrikus rendszerre vonatkoztatva a T_ϕ multiplier korlátos az $L_{2\pi}^p$ ($1 < p < \infty$) téren. A megfelelő Walsh rendszerre (igazából az általánosabb Vilenkin rendszerekre) vonatkozó eredményt Wo-Sang Young igazolta.

A pályázó - többek között - a Marcinkiewicz feltételnél erősebb ún. Hörmander-Mihlin feltétellel foglalkozik. Kiemelném a Walsh-Paley rendszerre vonatkozó 5.4 Tételt, amely azt mondja ki, hogy ha $1 < r \leq 2$ és $p > r/(2r - 1)$, valamint ϕ olyan korlátos sorozat, amely

$$\sup_{n \geq 0} 2^n \left(\sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} \frac{|\Delta \phi(k)|^r}{2^n} < \infty \right)^{1/r} < \infty,$$

akkor a T_ϕ operátor korlátos a $\mathbb{H}_{[0,1]}^p$ diadikus Hardy téren. A tételt Sidon típusú egyenlőtlenség technikával igazolja. Az 5.4 Tételbeli eredmény éles abban az értelemben, hogy a p -re tett $p > r/(2r - 1)$ feltételben az $r/(2r - 1)$ szám nem csökkenthető. A jelölt ugyanis belátja, hogy $p < r/(2r - 1)$, akkor van olyan korlátos ϕ sorozat, hogy a differencia sorozata kielégíti az előbbi feltételt, de T_ϕ nem korlátos a $\mathbb{H}_{[0,1]}^p$ diadikus Hardy térből az $L_{[0,1]}^p$ Lebesgue térbe. További érdekesség, hogy a $p = r/(2r - 1)$ eset jelenleg is nyitott.

Szeretnék feltenni néhány kérdést a pályázónak.

- (1) A Sidon egyenlőtlenségek a Dirichlet magfüggvények lineáris kombinációi normájának a becsléséről szól. Felhasználásaik normajellegű állításokhoz fűződnek. Majdnem

mindenütti konvergencia tételek igazolásához hasznos lenne, ha Dirichlet magfüggvények lineáris kombinációinak maximálfüggvényére (természetesen megfelelően le-normálva) tudnánk állításokat igazolni. Azaz, a következő integrálra tudunk-e (természetesen a (c_k) sorozattól függő) valamilyen felső becslést adni akárcsak a Walsh-Paley esetben?

$$\int_{\delta}^1 \sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k D_k \right|.$$

- (2) Mit lehet mondani, ha az egyes Sidon jellegű állításoknál kicseréljük a Dirichlet féle magfüggvények lineáris kombinációinak normáját. Mondjuk egy Hardy jellegű normára? Esetleg ahogy az L^1 jellegű állításhoz $L \log L$ jellegű tartozik, úgy $L \log L$ jellegű állításhoz $L \log^2 L$ jellegű?
- (3) Ha a (c_k) „Sidon együtthatókat” átrendezzük, akkor nyilván más függvény normáját kell becsülni és ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy rendezés független becsléseket keressünk, akkor lehet esetleg jobbat is találni. Gondolok itt például arra, hogy a

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} D_k \right| \quad \text{és a} \quad \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} D_k \right|$$

függvények normái esetenként jelentősen eltérnek.

A jelöltnek az értekezésben leírt nagyszámú eredménye szervesen és jól illeszkedik a Sidon-típusú egyenlőtlenségek és alkalmazásai tematikába. Az értekezés kiállítása, szervezettsége példaértékűen olvasóbarát. A bizonyítások korrektek. Értelemzavaró hibát nem, csak elgépéléseket találtam. Sokat azt sem.

Meglátásom szerint Fridli Sándor értekezése hasznos, érdekes és élvezetesen olvasható mű, amely összefoglalja a szerzőnek a tárgyalt témakörökben elért eredményeit, megvilágítja azok háttérét, alkalmazhatósági köreit. A jelölt munkássága ismert és elismert a nemzetközi diadikus harmonikus analízissel foglalkozó matematikusok körében. A jelölt eredményei erősségüket, színvonalukat, a tudományterületre kifejtett hatásukat tekintve megfelelnek az MTA doktori értekezéssel szemben elvártaknak, ezért mint az értekezés bírálója támogatom Fridli Sándor MTA doktori értekezése nyilvános vitára kitűzését, sikeres védelem esetén az MTA doktora cím odaítélését.

Nyíregyháza, 2015, február 2.

.....

Gát György,
MTA doktora, egyetemi tanár