dc_837_14

Egyensúly a játékelméletben: egzisztencia és általánosítások

TÉZISEK

Írta: Forgó Ferenc

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

2014

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Az értekezés előzményei és célja

A nem-kooperatív játékok elméletében a kutatások és alkalmazások homlokterében az egyensúly valamilyen formája áll. Minden von Neumann (1928) és Nash (1950a, 1951) munkáival kezdődött, amikor a nem-kooperatív játékok egyensúlypontját előbb kétszemélyes zérus-összegű játékokra, majd pedig teszőleges n-személyes játékokra definiálták és az egyensúly egzisztenciáját bizonyították véges játékok kevert bővítésére. A definíció hallatlan karriert futott be és méltán viseli már régóta a Nash-egyensúly (NE) nevet. A játékelmélet alapjait érintő további kutatások az elmúlt több, mint hatvan évben a Nash-egyensúlypontot, mint egy origót tekintették, és két fő irányban indultak el. Egyrészt további racionális követelményeket támasztottak, amelyek célja vagy az volt, hogy bizonyos intuíció ellenes Nash-egyensúlypontokat kiszűrjenek (leghíresebb példa a részjáték tökéletes egyensúly, Selten (1975)), másrészt lazították a követelményeken és ezáltal vagy általánosabb feltételek mellett bizonyították az egzisztenciát, vagy magát a modellt általánosították, illetve módosították mindig meghatározott céllal. Ez utóbbira a leghíresebb példa a korrelált egyensúly, Aumann (1974).

Mindeközben szintén Neumanntól, és Nash-től elindulva a kooperatív játékok elméletében is kialakult két fő modelltípus: a karakterisztikus formában adott, a koalíciókra fókuszáló modell, von Neumann és Morgenstern (1944) és a játékosok alkupozícióira koncentráló Nash-modell (Nash, 1950b, 1953). Sőt, Nash elindította az azóta Nash-programnak nevezett kutatási irányt, amelynek célja a kooperatív megoldáskoncepciók kettős megalapozása: az axiómákkal alátámasztott kooperatív megoldást egy nem-kooperatív (általában alku) játék Nash-egyensúlyaként is előállítani. Ennek a programnak a sikerét az 50 éves évfordulón Serrano (2005) nagyon szépen foglalta össze.

A jelen disszertációban azokat az új eredményeimet mutatom be, amelyek szorosan kapcsolódnak a fenti, a játékelmélet fő sodrába tartozó területekhez. Három új fogalom segítségével, CF-konvexitás, Forgó (1994), a puha korrelált egyensúly, Forgó (2010) és a limit-Nash alkumegoldás, Forgó (1984) vizsgálom a Nash-egyensúlypont létezését a korábbinál általánosabb feltételek között, a korrelált egyensúly általánosításának a szerepét a társadalmi összhasznosság növelésében és a Nash-alkumegoldás olyan általánosítását, amely szoros kapcsolatot teremt a többkritériumú döntéselmélet és a játékelmélet között. Ugyancsak figyelmet szentelek annak, hogy egyes speciális játékok esetében milyen konkrét formát öltenek az általánosítások (Cournot oligopólium nem-konvex költségfüggvényekkel, torlódási játékok, klimatárgyalási játékok).

2. fejezet

Az értekezés szerkezete

A disszertációnak, amely túlnyomó részt saját kutatási eredményeimet tartalmazza, a szerkezete három kutatási irányhoz igazodik. Ezek a Nash-egyensúlypont egzisztenciája, a korrelált egyensúly általánosítása és a Nash-alkumegoldás vizsgálata nagy fenyegések esetén. Ennek megfelelően a disszertáció három fő fejezetre tagolódik. Mindegyik fejezet egy-egy olyan új fogalom köré épül, amelyet különböző munkáimban én vezettem be.

Az első fejezet a Nash-egyensúlypont létezésével foglalkozik különböző modellekben és feltételek mellett, különös tekintettel a sok egzisztencia tétel bizonyításában szerepet játszó CF-konvexitás, Forgó (1994) fogalmára. Ugyancsak itt vizsgálom a Nash-egyensúlypont és a kétfüggvényes minimax tételek kapcsolatát, Forgó (1999).

A második fejezetben a korrelált egyensúllyal és általánosításaival foglalkozom különös tekintettel a "puha korrelált egyensúlyra", Forgó (2010). Ez, mint egyéb általánosítások is, elsősorban azt célozza, hogy minél nagyobb társadalmi hasznosságot lehessen elérni egyensúlyban. Ugyancsak foglalkozom azzal, hogy ez az új fogalom hogyan teljesít egyes játékosztályokban, különös teintettel a tökéletes információjú extenzív játékokra, Forgó (2011) és egyes egyszerű torlódási játékokra, Forgó (2014).

A harmadik fejezet a Nash-alkumegoldásból származtatott limit-Nash alkumegoldással, Forgó (1984), annak különböző tulajdonságaival és implementációjával foglalkozik.

Minden fejezetben törekedtem a témához kapcsolódó új alkalmazást is bemutatni. Az első fejezetben a Cournot oligopólium tiszta Nash-egyensúlypontjára adok elégséges feltételeket nem lineáris keresleti függvény és nem konvex költségfüggvény esetében, Forgó (1995). A puha korrelált egyensúly alkalmazását bemutatom a klímatárgyalások egy játékelméleti modelljében, Forgó et al (2005). Nagy figyelmet szentelek a limit-Nash alkumegoldás alkalmazásának a többkritériumú döntési problémákban, Forgó és Szidarovszky (2003).

Az értekezéshez tartozik egy függelék, amelyben három tétel nehéz és hosszú bizonyítását közlöm. Az értekezés végén található a rövidítések jegyzéke és egy közel száz tételből álló irodalomjegyzék.

3. fejezet

Eredmények

A következőkben szükségünk lesz néhány definícióra és némi bevezetésre. Egy nemkooperatív G játékot normál formában a játékosok $N = \{1, \ldots, n\}$ halmazával, a játékosok stratégiahalmazaival és a kifizetőfüggvényeivel szokás megadni a jól ismert $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ formában, ahol minden $i \in N$-re S_i az i játékos nem üres stratégiahalmaza, $f_i \colon S \to \mathbb{R}$ a kifizetőfüggvénye, amely az $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ stratégiaprofil halmazon van értelmezve. Minden stratégiaprofilt felírhatunk az $s = (s_i, s_{-i})$ formában, ahol az s_{-i} csonka stratégiaprofil csak az s_i-t nem tartalmazza.

3.1. definíció (Nash (1950a))**.** *Egy $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$ stratégiaprofilt Nash-egyensúlypontnak (NEP) nevezünk, ha fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$f_i(s_i^\star, s_{-i}^\star) \geq f_i(s_i, s_{-i}^\star)$$

minden $s_i \in S_i$ és $i \in N$ esetén.

Nash klasszikus eredménye (Nash, 1950a, 1951) a következő:

3.2. tétel. *Véges játékok kevert bővítésének mindig van NEP-je.*

Itt az S_i halmazok a lehetséges valószínűségi keverések halmazai, az f_i függvények pedig a várható kifizetések. Világosan látszik, hogy a további általánosítások kereteit mi határozza meg. Általánosítani lehet a stratégiahalmazokat (a stratégiahalmazok alakját, a teret, amelyben definiálva vannak), a kifizetőfüggvények alakját, folytonosságát, simaságát stb. Ebben a szellemben született az első komoly általánosítás, a Nikaido-Isoda–tétel (Nikaido és Isoda, 1955).

3.3. tétel. *Ha minden $i \in N$-re*

(i) az S_i stratégiahalmazok véges dimenziós euklideszi terek konvex kompakt részhalmazai,

(ii) az f_i függvények folytonosak az S stratégiaprofil halmazon,

(iii) az $f_i(\cdot, s_{-i})$ függvények konkávok az S_i stratégiahalmazon,

akkor a G játéknak van legalább egy NEP-je.

Friedman (1977) közölte a legáltalánosabbat azok közül a tételek közül, amelyek a konvexitás klasszikus fogalmát használják és a véges dimenziós euklideszi térben maradnak.

3.4. tétel. *Legyen $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ egy nem-kooperatív játék, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek minden $i \in N$-re:*

1. *S_i véges dimenziós euklideszi tér nem üres, konvex, kompakt részhalmaza,*
2. *f_i felülről félig folytonos a stratégiaprofilok S halmazán,*
3. *bármely rögzített $s_i \in S_i$ esetén az $f(s_i, \cdot)$ függvény alulról félig folytonos az S_{-i} csonka stratégiaprofilok halmazán,*
4. *az $f_i(\cdot, s_{-i})$ függvények kvázikonkávok az S_i stratégiahalmazon.*

Ekkor a G játéknak van legalább egy NEP-je.

3.1. A Nash-egyensúlypont létezése konvexitás nélkül

A függvények alaki és folytonossági tulajdonságai is általánosabbak a 3.4. tételben, mint a 3.3. tételben. Mi a következőkben az alaki (konvexitási/konkávitási) tulajdonságok általánosításaival foglalkozunk. A legelső, a játékelméletben is felhasznált eredmény Fan (1952, 1953) nevéhez fűződik. Először definiáljuk a Fan-konkáv (F-konkáv) függvényeket.

3.5. definíció (F-konkávitás)**.** *Legyenek X és Y tetszőleges, nem üres halmazok. Az $f\colon X \times Y$ függvényt F-konkávnak nevezzük az X halmazon az Y halmazra vonatkozóan, ha bármely $x_1, x_2 \in X$ ponthoz és $\lambda \in [0,1]$ valós számhoz van olyan $x_0 \in X$, hogy*

$$f(x_0, y) \geq \lambda f(x_1, y) + (1 - \lambda) f(x_2, y)$$

fennáll minden $y \in Y$-ra.

Ky Fan klasszikus eredménye a következő (nem teljes általánosságában, mert mi az euklideszi térben maradunk):

3.6. tétel (Fan (1953))**.** *Legyen $G = \{S_1, S_2; f_1, f_2\}$ kétszemélyes zéró-összegű játék, ahol az S_1, S_2 stratégiahalmazok zártak és korlátosak, az f_1, f_2 kifizetőfüggvények felülről félig folytonosak és f_1 F-konkáv S_1-en az S_2-re vonatkozóan, f_2 F-konkáv S_2-n az S_1-re vonatkozóan. Ekkor a G játéknak van legalább egy NEP-je.*

Hosszú ideig azt gondolták, hogy ezt az eredményt egyszerűen át lehet vinni n-személyes játékokra. Ez nem is sikerülhetett, Joó (1986) konstruált egy ellenpéldát.

Forgó (1994) módosította az F-konkávitás definícióját, ami aztán lehetővé tette a Fan-típusú egzisztencia tétel bizonyítását akárhány játékos esetére.

3.7. definíció (CF-konkávitás, folytonos F-konkávitás)**.** *Legyen X egy véges dimenziós euklideszi tér nem üres részhalmaza, Y egy tetszőleges nem üres halmaz. Az $f\colon X \times Y$ függvényt CF-konkávnak nevezzük az X halmazon az Y halmazra vonatkozóan, ha van olyan $\psi\colon X \times X \times \mathbb{R} \to X$ folytonos függvény, hogy bármely $x_1, x_2 \in X$ pontok és $\lambda \in [0,1]$ valós szám esetében*

$$f(\psi(x_1, x_2, \lambda), y) \geq \lambda f(x_1, y) + (1-\lambda) f(x_2, y)$$

fennáll minden $y \in Y$-ra.

Szükségünk lesz még egy közismert definícióra és állításra.

3.8. definíció. *A $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ nem kooperatív játékhoz tartozó aggregátor függvénynek nevezzük az $A\colon S \times S \to \mathbb{R}$*

$$A(s,t) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i(s_i, t_{-i})$$

függvényt.

3.9. segédtétel (Nikaido és Isoda (1955))**.** *Ha van olyan $t^* \in S$ stratégiaprofil, hogy $A(t^*, t^*) \geq A(s, t^*)$ minden $s \in S$-re, akkor t^* a G játék NEP-je.*

A következő tétel általánosítása a 3.3. tételnek.

3.10. tétel (Forgó (1994))**.** *Ha*

a) S_i , $i \in N$ véges dimenziós euklideszi tér nem üres, konvex, kompakt részhalmaza,

b) f_i , $i \in N$ folytonos függvény az S stratégiaprofilok halmazán,

c) az A aggregátor függvény CF-konkáv S-en az S-re vonatkozóan,

akkor G-nek van NEP-je.

A CF-konkávitás definíciójától inspirálva, a 3.10. tétel különböző irányokban való általánosításaiként további egzisztencia tételek születtek az évek folyamán. Csak azokból, amelyekben expliciten a CF-konkávitást jelölik meg, mint egyik kiinduló pontot, megemlítjük a következő független munkákat: Kim és Kum (2005), Kim és Lee (2002, 2007), Hou (2009), Chang (2010), Kim (2011) és Cambini és Martein (2009) könyvét.

Az általánosítás egy másik iránya, amikor az euklideszi tereknél általánosabb terekben definiálunk konvex halmazokat és függvényeket. Forgó és Joó (1999) munkájában 13 fixpont és játékelméleti egzisztencia tétel szerepel teljesen egyéni terekben (un. pszeudokonvex terekben), amelyeknek definíciójában jól látható a CF-konkávítás, mint kiinduló pont.

3.2. Cournot oligopólium nem konvex költségfüggvényekkel

A klasszikus Cournot modell jól ismert. Egy iparágban, ahol n vállalat termel egy homogén termékfajtát, a vállalatok egymástól függetlenül hozzák meg volumen döntéseiket, vagyis az i vállalat választ egy x_i termelési szintet, $x_i \in [0,1]$, $i = 1, \ldots, n$. A vállalatok kapacitás szempontjából azonosak, lehetséges termelési szintjeiket a $[0,1]$ intervallumra normalizáltuk az egyszerűség kedvéért. Adott egy $P\colon [0,n] \to \mathbb{R}$ árfüggvény (inverz keresleti függvény), amely az iparág $q = \sum_{i=1}^{i=n} x_i$ teljes termeléséhez azt a legnagyobb árat rendeli, amelyen a piac kitisztul. Szintén adott az i vállalat $C_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ költségfüggvénye, amely az x_i termelési szinthez a $C_i(x_i)$ költséget rendeli. Költség szempontból a vállalatok különbözők lehetnek. Ezekből az elemekből tevődik össze az i vállalat $f_i\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ profitfüggvénye (költséggel csökkentett árbevétel)

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i P(x_i + \sum_{j \neq i} x_j) - C_i(x_i), \qquad x_i \in [0,1],\ i = 1, \ldots, n\ .$$

Bevezetve az $S_i = [0,1]$, $i = 1, \ldots, n$ jelölést, az S_i termelési halmazok és az f_i profitfüggvények, $i = 1, \ldots, n$ a $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ oligopólium játékot határozzák meg.

A különböző közgazdasági alkalmazásokban fontos kérdés, hogy a G oligopólium játéknak van-e egyensúlypontja a tiszta stratégiák halmazán. A klasszikus eredmény a következő:

3.11. tétel (Friedman (1977)). *Ha a P árfüggvény konkáv a $[0,n]$ intervallumon, a C_i költségfüggvények minden $i \in N$-re konvexek a $[0,1]$ intervallumon, akkor a G oligopólium játéknak van egyensúlypontja a tiszta stratégiák halmazán.*

Minthogy a költségfüggvények konvexitása egy nagyon erős feltétel, ennek a lazításával érdemes foglalkozni. A célcsoport a költségfüggvények egy olyan osztálya, amely a legtöbb iparágban inkább mondható tipikusnak, mint a konvex költségfüggvény. A termelés felfutásával a költségek egy pontig (az optimális kapacitáskihasználásig) csökkenő ütemben nőnek, majd ezen túl növekvő ütemben. Annak jelentőségére, hogy az oligopólium modellekben preferáljuk a tiszta NEP-et, többek között Tasnádi (2011) mutat rá. A P árfüggvényre és a C_i, $i \in N$ költségfüggvényekre az alábbi feltételeket tesszük:

a) P kétszer folytonosan differenciálható egy nyílt intervallumon, amely tartalmazza a $[0,n]$ intervallumot, a P értelmezési tartományát.

b) $P(q) > 0$ minden $q \in [0,n]$-re, vagyis a vállalatok termelési korlátai olyan szorosak, hogy még akkor is, ha mindenki teljes kapacitáson termel, az össztermelést pozitív áron el lehet adni.

c) $P'(q) < 0$ minden $q \in [0,n]$ -re, vagyis P szigorúan monoton csökkenő.

d) $P''(q) < 0$ minden $q \in [0, n]$ -re, vagyis P szigorúan konkáv.

e) P'' monoton csökkenő a $[0, n]$ intervallumon, vagyis az árak csökkenésének "gyorsulása" csökken az összkínálat növekedésével.

f) C_i kétszer folytonosan differenciálható egy nyílt intervallumon, amely tartalmazza a $[0, 1]$ intervallumot, a C_i értelmezési tartományát.

g) $C_i(x_i) \geq 0$ minden $x_i \in [0.1]$-re.

h) $C_i'(x_i) > 0$ minden $x_i \in [0.1]$-re, tehát a költségek monoton nőnek a termelés növekedésével.

i) Van egy olyan $u_i \in (0, 1)$ inflexiós pont, hogy C_i konkáv a $[0, u_i)$ és konvex a $(u_i, 1]$ intervallumon.

j) $C_i''(0) < 0$ és C_i'' szigorúan monoton növekvő a $[0, 1]$ intervallumon, vagyis a költségek növekedésének a gyorsulása nő a termelés növekedésével.

A NEP létezésére elégséges feltételeket adnak a következő tételek.

3.12. tétel (Forgó (1995))**.** *Ha $2P'(0) \leq C_i''(0)$ fennáll minden $i \in N$-re, akkor a G oligopólium játéknak van legalább egy NEP-je.*

3.13. tétel (Forgó (1995))**.** *Ha $C_i'(0) \leq -P'(0)$, minden $i \in N$-re, akkor a G oligopólium játéknak van legalább egy NEP-je.*

3.14. tétel (Forgó (1995))**.** *Ha minden $i \in N$ -re a költségfüggvény u_i inflexiós pontjára fennáll az $u_i < \frac{P'(0)}{C''(0)}$ egyenlőtlenség, akkor a G oligopólium játéknak van legalább egy NEP-je.*

Ezeknek az elégségességi tételeknek érdekes következménye van a költségfüggvény alakjára.

3.15. következmény. *Ha minden $i \in N$ -re $2P'(0) > C_i''(0)$, és a költségfüggvény konkáv része nem terjed túl a termelési kapacitás felén, akkor a G oligopólium játéknak van legalább egy NEP-je.*

Ha minden $i \in N$-re $2P'(0) \leq C_i''(0)$, akkor a 3.12. tétel biztosítja a NEP létezését. Nem tudunk semmit mondani arról az esetről, amikor bizonyos vállalatok esetén az egyik irányú, mások esetében pedig a másik irányú egyenlőtlenség áll fenn. Ez persze nem fordulhat elő a szimmetrikus esetben, vagyis, ha minden vállalatnak ugyanaz a költségfüggvénye. A NEP létezése szempontjából ekkor csak úgy lehet baj, ha az inflexiós pont az $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ intervallumba esik.

A vállalatok a termelési lehetőségeiket tekintve szimmetrikusak. Ez teszi lehetővé, hogy adjunk egy olyan elégséges feltételt, amely az iparágat alkotó vállalatok számára vonatkozik.

3.16. tétel (Forgó (1995))**.** *Ha $P(1) > C_i'(0)$ minden $i \in N$ -re, akkor van olyan $n_0 \geq 2$ vállalatszám, hogy a G oligopólium játéknak van legalább egy NEP-je minden $2 \leq n \leq n_0$ esetében.*

A feltétel szavakban azt jelenti, hogy ha az iparág teljes termelését egy vállalat adja, akkor az ár legyen nagyobb, mint a 0 termelésnél a határköltség. Általános tanulságként megállapíthatjuk, hogy még nemlineáris árfüggvény esetén sem szükséges a NEP létezéséhez a költségek konvexitása, igen széles költségfüggvény osztályok is "kellemesek" ebből a szempontból.

Valamiért azért kitüntetett szerep jut a konvex költségfüggvényeknek. Csak az $n = 2$ esettel (duopóliomakkal) foglalkozunk. A modell lényegében változatlan, azzal a kivétellel, hogy általános árbevétel függvénnyel számolunk, az árbevétel nem feltétlenül mennyiségszer egységár, akár mennyiségi diszkontár is megengedett. Tehát az (általánosított) G duopólium játék

$$\begin{aligned} G &= \{[0,1],[0,1]; f_1, f_2\} \\ f_i(x_1,x_2) &= R_i(x_1,x_2) - C_i(x_i), \quad x_i \in [0,1],\ i = 1,2 \ , \end{aligned}$$

ahol $R_i\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ az árbevétel (revenue) függvény, C_i a költségfüggvény. Az alábbi tétel egy szükséges feltételt ad a költségfüggvény alakjára.

3.17. tétel (Forgó (1995))**.** *Ha a G duopólium játéknak minden konkáv árbevétel függvény mellett van NEP-je, akkor a költségfüggvény konvex.*

3.3. Kétfüggvényes minimax tételek

Az egyfüggvényes minimax tétel, legalábbis a legegyszerűbb formájában, bevezető játékelméleti kurzusok témája és jelentősége köztudott. Nem ez a helyzet a kétfüggvényes minimax tételekkel.

Legyenek X, Y nem üres halmazok és $f, g\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ két valós értékű függvény, ahol $f \leq g$. A kérdés az, hogy milyen feltételek mellett áll fenn a következő egyenlőtlenség:

$$\inf_Y \sup_X f \leq \sup_X \inf_Y g \ .$$

Azokat a tételeket, amelyek az X, Y, f, g-re tett bizonyos feltételek mellett a fenti egyenlőtlenség fennállását mondják ki, kétfüggvényes minimax tételeknek nevezik. Azon túlmenően, hogy a problémának matematikai jelentősége van, Forgó (1999) megmutatta, hogy ezeknek a tételeknek milyen szerepe lehet a Nash-egyensúlypont létezésének bizonyításában.

Egy igen általános kétfüggvényes minimax tételt sikerült bizonyítani elemei eszközökkel. A tétel megfogalmazásához szükségünk van az "átlagoló függvény" definíciójára.

3.18. definíció. *Egy $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt átlagoló függvénynek nevezünk, ha mindkét változójában növekvő, valamint*

$$\rho(\lambda,\lambda) = \lambda \ \textit{ és } \lambda \neq \mu \Longrightarrow \min\{\lambda,\mu\} < \rho(\lambda,\mu) < \max\{\lambda,\mu\} \ .$$

Könnyű látni, hogy pl. a súlyozott számtani átlag függvény eleget tesz a fenti feltételeknek.

3.19. tétel (Forgó és Joó (1998)). *Legyenek ρ_1 és ρ_2 átlagoló függvények, X és Y nem üres halmazok, $f, g\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, $f \leq g$ korlátos függvények, amelyekre fennállnak a következő feltételek:*

(i) bármely $x_1, x_2 \in X$-hez található olyan $x_3 \in X$, hogy $y \in Y \implies f(x_3, y) \geq \rho_1(f(x_1, y), g(x_2, y))$,

(ii) bármely $y_1, y_2 \in Y$-hoz található olyan $y_3 \in Y$, hogy $x \in X \implies g(x, y_3) \leq \rho_2(f(x, y_1), g(x, y_2))$,

Ekkor bármely $F \subset X$ véges halmazra fennáll

$$\inf_Y \max_F f(x,y) \leq \sup_X \inf_Y g(x,y) \ .$$

A feltételekben fellelhető az F- és CF-konkávitás szelleme. Ezt a tételt az évek folyamán többen általánosították, Forgó (2001), Cheng és Lin (2001, 2003), Cheng (2004, 2010), Jin et al (2006), Tang és Cheng (2008), de az általánosabb feltételek némelyike már "elég mesterkélt" lett, szemben az átlagoló függvény természetességével.

3.4. A korrelált egyensúly egy általánosítása: a puha korrelált egyensúly

A korrelált egyensúly, CE fogalma Aumanntól (Aumann, 1974) származik. Egy G véges játék kevert bővítésének a leggyakoribb interpretációja a következő forgatókönyvhöz kapcsolódik. Minden játékos a saját kevert stratégiája (valószínűségeloszlás a véges stratégiahalmazon) szerint végrehajt egy sorsolást és a sorsolás eredményét játssza. Egyensúlyban egyik játékosnak sem érdeke egyoldalúan másik stratégiát választani, mert várható értékben nem jár jobban. Aumann forgatókönyve szerint is van egy sorsolás a játék effektív lejátszása előtt, amit egy játékvezető hajt végre és egy adott p valószínűségeloszlás szerint kisorsol egy stratégiaprofilt. Minden játékossal közli (javasolja, hogy ezt játssza), hogy mi az ő stratégiája ebben a stratégiaprofilban, de a többiekét titokban tartja. A játékvezető javaslatát meg lehet fogadni, de lehet mást is játszani. A p valószínűségeloszlást CE-nek nevezzük, ha egyik játékosnak sem érdeke (várható értékben nem kap nagyobb kifizetést) egyoldalúan eltérni a játékvezető javaslatától. Tulajdonképpen a sorsolással és tanácsadással kibővített játék NEP-jéről van szó.

A CE általánosítása a NEP-nek abban az értelemben, hogy minden NEP által a stratégiaprofilokon generált valószínűségeloszlás egy CE. Könnyű viszont találni olyan játékokat, amelyekben van olyan CE, amelyhez tartozó társadalmi hasznosság, SW (többnyire ezen a játékosok kifizetéseinek összegét értik) nagyobb, mint bármely NEP-ben. Más forgatókönyvvel sok esetben nagyobb SW-t lehet elérni, mint a CE-vel.

A CE első általánosítása ebben az irányban a Moulin és Vial (1978) által definiált gyenge korrelált egyensúly, WCE. A forgatókönyv itt is azzal kezdődik, hogy a játékvezető egy köztudott q valószínűségeloszlás szerint kisorsol egy stratégiaprofilt. Mielőtt azonban bármit is közölne a játékosokkal, felteszi nekik a kérdést egyenként, hogy szándékoznak-e vakon engedelmeskedni a javaslatának. Ha a felelet "igen", akkor azt kell csinálni, ami ki lett sorsolva, ha pedig a felelet "nem", akkor bármit csinálhat szabadon. A q valószínűségeloszlás egy WCE, ha egyik játékos sem érhet el várható értékben nagyobb kifizetést a vak engedelmességtől való egyoldalú eltéréssel. Látható, hogy a WCE-ben a játékosok elkötelezettsége erősebb, mint a CE-ben. Sok példát lehet mutatni arra, hogy a WCE nagyobb kifizetést ad, mint a CE. Azonban ismét maradnak olyan fontos játékok (mint pl. a nótórius fogolydilemma), amelyeken még ez sem segít.

Forgó (2010) javasolta a CE-nek egy másik általánosítását, amit puha korrelált egyensúlynak, SCE nevezünk. A WCE forgatókönyvét azon a ponton módosítjuk, amikor egy játékos megtagadja a vak engedelmességet. Most is azt a stratégiát választhatja, amit akar, kivéve azt az egyet, ami ki lett sorsolva. Az SCE olyan játékoknál is tud az SW-n javítani a CE-hez képest, amelyeknél a WCE kudarcot vall. A fogolydilemma közéjük tartozik.

A korrelált egyensúlyok halmazát u.n. ösztönző feltételekkel tudjuk leírni. Ezekben az engedelmesség várható hasznát állítjuk szembe az engedelmesség megtagadásával. Nézzük az SCE-k halmazának leírását ösztönző feltételekkel. Legyen $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ a vizsgált játék. Az ösztönző feltételeket az i rögzített játékosra írjuk fel és az egyszerűség kedvéért ezt az indexet elhagyjuk. A következő jelöléseket használjuk:

- $N = \{1, \dots, n\}$: a játékosok halmaza.
- $I = \{1, \dots, m\}$: az i játékos stratégiahalmaza, a stratégiákat a stratégiák indexei reprezentálják.
- S_-: az i játékos kivételével az összes többi játékos stratégiahalmazainak Descartes szorzata (a csonka stratégiaprofiliok halmaza)
- $s_- \in S_-$: egy csonka stratégiaprofil.
- (j, s_-), $j \in I$, $s_- \in S_-$: egy (teljes) stratégiaprofil.
- $S = \{(j, s_-)\colon j \in I,\ s_- \in S_-\}$: a (teljes) stratégiaprofilok halmaza.
- $f(j, s_-)$: az i játékos kifizetése, ha ő a j stratégiát játssza, a többiek pedig s_--t.
- p: egy valószínűségeloszlás S-en.
- $p(j, s_-)$: az a valószínűség, amelyet a p eloszlás a (j, s_-)stratégiaprofilhoz rendel.

Egy rögzített $j \in I$-re az alábbi feltételek összességét

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{s_- \in S_-} f(l, s_-)p(j, s_-) \text{ minden } l \in I\text{-re},$$

nevezzük j-halmaznak. Tekintsük a $K = \prod_{j=1}^{m}(I \setminus \{j\})$ halmazt, amelynek elemeit megengedett (index)halmaznak hívjuk. Az SCE ösztönző feltételeit az $i \in N$ játékos számára az alábbi egyenlőtlenségekkel definiáljuk:

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k_j, s_-)p(j, s_-) \ ,$$

minden $(k_1, \ldots, k_m) \in K$ megengedett halmazra.

Az SCE ösztönző feltételeinek száma az i játékosra $(m-1)^m$. Ez nagyon sok, de szerencsére a feltételek számát drasztikusan le lehet csökkenteni.

3.20. tétel (Forgó (2010)). *Minden $i \in N$ játékos esetében van olyan lineáris egyenlőtlenségrendszer, amelynek mérete (a változók és feltételek száma) kvadratikusan nő a stratégiák számának növekedésével és az általa meghatározott lehetséges tartomány alkalmas vetítése megegyezik az SCE-k halmazával.*

Mivel az SCE fogalomalkotásnak a legfőbb célja az, hogy "jobb várható kifizetéseket érjünk el, mint a CE-vel, az általánosítás erejét azzal lehet demonstrálni, hogy mutatunk olyan fontos játékosztályokat, ahol az SCE jobban teljesít. Nevezzünk egy $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ játékot binárisnak, ha minden játékosnak csak két stratégiája van. Nem nehéz belátni, hogy a WCE és a CE egybeesik bináris játékok esetében. Az SCE-k halmaza nem szűkebb, mint a WCE-k halmaza, amint azt az alábbi egyszerű tétel kimondja.

3.21. tétel (Forgó (2010)). *Bináris játékokban minden WCE egyúttal SCE is.*

A következő tétel egy elégséges feltételt ad arra, hogy az SCE minden játékos számára jobb legyen, mint egy Pareto-dominált tiszta NEP ($PNEP$).

3.22. tétel (Forgó (2010)). *Ha s^* egy szigorúan Pareto-dominált $PNEP$ egy $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ véges játékban, akkor van olyan SCE, amely szigorúan Pareto-dominálja s^*-ot.*

A fogolydilemma a 3.22. tétel hatálya alá esik.

3.5. Puha korrelált egyensúly egyszerű, két-kiszolgálós, nem-csökkenő, lineáris torlódási játékokban

Az egyszerű torlódási játékokban a játékosok választhatnak bizonyos kiszolgálók között, amelyeknek a szolgálatait szeretnék igénybe venni. Egy játékos hasznossága (kifizetése) csak attól függ, hogy hányan használják (választották) az illető kiszolgálót. Mi csak két-kiszolgálós torlódási játékokkal foglalkozunk és ezen belül is csak azokkal, ahol a torlódás növekedésével lineárisan csökken a játékos által elérhető hasznosság. A két-kiszolgálós torlódási játék egy bináris játék, és mint azt láttuk a korábbiakban (3.21.

tétel) bináris játékokban jó esély van arra, hogy az SCE jól teljesítsen. Az SCE erejének mérésére két mutatószámot használunk, amelyeket Ashlagi et al (2008) javasoltak a CE-re. Ezek a "mediációs érték" és a "kényszerítési érték".

Legyen C a véges játékok egy osztálya és $G \in C$. Jelölje $P(G)$ a G stratégiaprofiljain értelmezett összes valószínűségeloszlások halmazát, $M(G)$ a G kevert NEP-jei által generált valószínűségeloszlások halmazát, $MP(G)$ a G játék $PNEP$-jei által generált valószínűségeloszlások halmazát, és $S(G)$ az SCE-k halmazát. Jelöljük $SW(p)$-vel a p eloszláshoz tartozó várható társadalmi hasznosságot (a játékosok várható hasznosságainak az összege). Definiáljuk az SCE-hez tartozó $MV(G)$ és $MVP(G)$ mediációs értékeket a következőképpen

$$\begin{aligned} MV(G) &= \frac{\max_{p \in S(G)} SW(p)}{\max_{p \in M(G)} SW(p)} , \\ MVP(G) &= \frac{\max_{p \in S(G)} SW(p)}{\max_{p \in MP(G)} SW(p)} , \end{aligned}$$

az $EV(G)$ kényszerítési értéket pedig az alábbi módon

$$EV(G) = \frac{\max_{p \in P(G)} SW(p)}{\max_{p \in S(G)} SW(p)} .$$

Az SCE MV és $MPVP$ mediációs értékeit és az EV kényszerítési értékét a C játékosztályon pedig így definiáljuk

$$MV = \sup_{G \in C} MV(G) , \quad MVP = \sup_{G \in C} MVP(G) , \quad EV = \sup_{G \in C} EV(G) .$$

Az MV és az MVP tulajdonképpen egy "legjobb-eset elemzés" eredménye. Minél nagyobb az MV és az MVP értéke, annál többet javít az SW-n a játékot megelőző "mediáció" (nevezzük így a játékvezető ténykedését is tartalmazó protokollt) a legjobb esetben. Az EV egy valódi "legrosszabb-eset elemzés" eredménye és azt mutatja, hogy (relatíven) maximum mennyit veszíthetünk az SW maximumához képest. Nyilván az $MV = \infty$, $MVP = \infty$ és az $EV = 1$ a legjobb értékek.

Az SCE-re vonatkozó eredményeinket, Forgó (2013) a következő táblázatban összegezzük:

Játékosok száma	MV	MVP	EV
2	∞	∞	1
3	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	1
4	?	$\geq \frac{4}{3}$	$1,007478\ldots$
...	...	...	...
n	?	$\geq \frac{n^2}{4(n-1)}$	$\leq \frac{4}{3}$

3.6. Puha fa-korrelált egyensúly

Ha az SCE protokollját extenzív formában adott játékokra akarjuk alkalmazni, akkor az az út, hogy előbb átalakítjuk normál formára, nem járható az exponenciális méretnövekedés miatt. Az SCE protokollját kell az extenzív forma sajátosságaihoz igazítani.

A CE protokolljának alkalmazását extenzív játékokra többen tanulmányozták különböző modellekben, Forges (1986, 1993), Myerson (1986), von Stengel és Forges (2007). Az SCE alapötlete és alkalmazása klímatárgyalási játékokra először Forgó et al (2005)-nál jelenik meg. Az alkalmazott modellhez talán von Stengel és Forges (2007) "ügynök-alakú korrelált egyensúly"-a (agent-form correlated equilibrium) áll a legközelebb. Az alapvető különbség a mi és von Stengel és Forges (2007) megközelítése között az, hogy a randomizáció a játékfa levelein történik és nem az információs halmaz lehetséges lépésein. Ezt az teszi lehetővé, hogy a vizsgálatunk tökéletes információjú játékokra (minden információs halmaz egy elemű) vonatkozik, ahol a játékfa minden pontjához tartozó elérési valószínűségek egyértelműen kiszámíthatók a levelek elérési valószínűségeiből. Véges normál formájú játékoknál a stratégiaprofilokon és a kifizetések halmazán való randomizálás lényegében ugyanaz. Az extenzív formájú játékoknál a kifizetések a játékfa levelein történnek meg és a levelek száma sokkal kisebb a stratégiák számánál, még akkor is, ha a tökéletes információjú véges játékokra korlátozzuk magunkat, mint ahogyan azt meg is tesszük.

A legegyszerűbb esetet vizsgáljuk: a véges, kétszemélyes, tökéletes információjú játékokat, ahol nincs szerepe az externális véletlennek (no chance moves) és minden kifizetés különböző. Ezeknél a játékoknál a játékfa leveleihez (végpontokhoz) rendelt valószínűségeloszlásból egyértelműen ki tudjuk számolni az egyes döntési pontokhoz tartozó feltételes valószínűséget és természetesen fordítva is, a feltételes valószínűségekből a levelek valószínűségeit. A döntési pontokhoz tartozó feltételes valószínűségeket viselkedési (behavioral) valószínűségeknek fogjuk nevezni. Legyen $T = (V, E)$ a G véges, tökéletes információjú extenzív játék fája, ahol V a csúcspontok (döntési pontok és levelek) halmaza, E az élek halmaza. A levelek L halmazán értelmezett p valószínűségeloszlást fa-korrelált stratégiának (tree-correlated strategy) nevezzük. Ezt a minden játékos által ismert eloszlást használva a játékvezető minden egyes döntési pontban kisorsol egy lépést és javaslatot tesz az abban a pontban döntést hozó játékosnak, hogy melyik lépést válassza. Attól függően, hogy a játékosok mekkora mértékű elkötelezettséget vállalnak, a CE, WCE és az SCE "viselkedési" változatát kapjuk, amit a $TCE, TWCE$ és $TSCE$ rövidítésekkel jelölünk (A T első betű a "tree" szóra utal). Ha semmilyen elkötelezettséget sem vállalnak, akkor a TCE-t, ha teljes az elkötelezettség, de ha ezt a játékos nem vállalja, akkor bármit léphet, a $TWCE$-t, és ha nem kötelezi el magát, akkor bármit léphet annak a kivételével, ami ki lett sorsolva, a $TSCE$-t. A teljes protokollban arról is kell rendelkezni, hogy mi történjék akkor, ha a játékvezető javaslatát nem fogadják el valamikor a játék lejátszása folyamán. Elméletileg megengedve más lehetőségeket is, alapvetően azzal a feltételezéssel élünk, hogy amikor először történik ez meg a játék folyamán, a játékvezető beszünteti tevékenységét és ettől a ponttól kezdve a játék játékvezető és mindenféle javaslattevés, bármiféle korreláció nélkül folytatódik.

Mindhárom ($TCE, TWCE$, $TSCE$) forgatókönyv esetében a játékfa levelein értelmezett valószínűségeloszlást egyensúlyinak nevezzük, ha várható értékben egyik játékos sem tudja a kifizetését javítani azzal, ha nem veszi igénybe és nem fogadja meg a játékvezető javaslatait minden olyan csúcspontban, amikor ő következik lépésre, feltéve, hogy az összes többi játékos így tesz. Jegyezzük meg, hogy abban a részfában, amelyben már nincs játékvezető és amely véges, tökéletes információjú extenzív játék, egyetlen részjáték tökéletes NEP létezik, amelyet a visszafele indukció módszerével határozhatunk meg a jól ismert módon (lásd Osborne és Rubinstein (1994). A NEP unicitását az a feltételünk biztosítja, amely szerint minden kifizetés különböző.

A részjáték tökéletesség a legerőteljesebb finomítási eszköz az extenzív játékok körében. Amióta Selten (1975) bevezette a fogalmat, szinte alapvető követelmény, hogy az extenzív formájú játékokban megköveteljük illetve biztosítsuk a teljesülését, ami tulajdonképpen a nem hihető fenyegetések kizárását jelenti. Elég természetes, hogy a három fa-korrelált egyensúlytól is követeljük meg valamely formájának teljesülését. Ez ebben az esetben azt jelenti, hogy a TCE, $TWCE$, $TSCE$, hogy ha egy részjátékra (részfára) korlátozzuk a játékot és az egész játékban egyensúlyi valószínűségeloszlást kicseréljük arra az eloszlásra, amely azokat a feltételes valószínűségeket rendeli a részfa leveleihez, amelyek az egész fára vonatkozó valószínűségek azzal a feltétellel, hogy a részfa gyökerét elértük, az így kapott valószínűségek a részfában is alkossanak egyensúlyi (TCE, $TWCE$, $TSCE$) valószínűségeloszlást. A részjáték tökéletesség megóvja a játékvezetőt attól, hogy a hitele csorbuljon azáltal, hogy módosítgatja a valószínűségeket a játék lejátszásának folyamán. A részjáték tökéletesség megkövetelése túl sok a TCE, $TWCE$ esetében. Az általánosítás elveszíti erejét és nem marad más, mint a Nash-egyensúly.

3.23. tétel (Forgó (2011)). *Ha megköveteljük a részjáték tökéletességet, akkor a $TWCE$ (és ezáltal a TCE sem) nem tudja Pareto-javítani a NEP-et.*

A $TSCE$ viszont tud részjáték tökéletes Pareto-javítást produkálni, például a közismert százlábú játékban.

Rendszerint sok korrelált stratégia van, amely kielégíti az ösztönző feltételeket. Ha kombinálni szeretnénk a stabilitást, amelyet az ösztönző feltételek fejeznek ki és amelyeket a különböző protokollokból vezetünk le, és ki szeretnénk választani a játékvezető (vagy valamilyen más személy vagy testület) szempontjából a lehetséges korrelált egyensúlyok közül a legjobbat (optimálisat), akkor egy optimumfeladatot kell megoldanunk.

A fa-korrelált egyensúly esetében a változók a fa minden egyes $l \in L$ leveléhez rendelt valószínűségek (ezeknek az összege 1 kell legyen). Azon túl, hogy a fa leveleihez a játékosok által elért hasznosságot rendeljük, amit akkor tudnak elérni, ha a játék abban a levélben végződik, minden egyes fa-korrelált egyensúlyhoz hozzárendelhetjük azt a hasznosságot, amelyet a játékvezető (vagy valamilyen mögötte álló szervezet) ér el. Speciális eset az, ha minden levélhez egy valós számot rendelünk hozzá, ami azt a hasznosságot reprezentálja, amelyet a játékvezető ér el akkor, ha a játék az adott levélben végződik. Ezeknek a hasznosságoknak a várható értékét a fa-korrelált egyensúly valószínűségeivel számolva kapjuk a játékvezető várható hasznosságát, ami a valószínűségek lineáris függvénye. Ebben a speciális esetben a játékvezető várható hasznosságának maximalizálása a fa-korrelált egyensúly lineáris ösztönző feltételei mellett egy lineáris programozási feladat. A játékvezető hasznossági függvényének nem kell köztudottnak lenni.

A $TSCE$ gondolata először az Európai Unió megbízásából, a széndioxid kibocsátás csökkentésére alkalmazott stratégiák vizsgálatának témakörében írt tanulmányban vetődött fel, Tóth et al (2001), majd a tanulmány játékelméleti vonatkozásait tárgyaló cikkben Forgó et al (2005) részletesebben is ki lett fejtve. A használt komplex modell egy extenzív formában adott játék köré épül. A játékosok egyes országcsoportok, amelyek különböző időpontokban hozhatnak döntéseket arról, hogy mekkora erőfeszítéseket tesznek egy adott periódusban a GHG (üvegházhatású) gázok atmoszférikus koncentrációjának csökkentésére. A játékosok szekvenciálisan (nincsenek szimultán döntések) döntenek a GHG csökkentésre tett erőfeszítés mértékéről (véges számú lehetőségből választhatnak), saját maguk és a többiek korábbi döntéseit ismerve. Az utolsó periódus végén történnek meg a kifizetések, amelyeket a Nordhaus és Yang (1996) kombinált éghajlat és makroökonómiai modell segítségével számoltunk ki. A modell részletei megtalálhatók az idézett citetToth2001 tanulmányban. Csak annyit említünk meg itt, hogy az illető játékos (országcsoport) országainak az egész időhorizonton vett, jelenértékre visszadiszkontált fogyasztása jelenik meg a játékfa végpontjaiban. A stratégiaválasztás szerepe abban van, hogy a periódusokon keresztül megválasztott GHG redukcióra fordított költségek az atmoszféra változásra, és ezen keresztül a gazdasági teljesítményre hatást gyakorolnak. Ennek következtében kapjuk a kifizetéseket a fa leveleiben. A "játékvezető" célfüggvénye a várható globális hőmérsékletváltozás minimalizálása volt. A stabilitást az országcsoportok összfogyasztására követeljük meg megfelelő ösztönző feltételekkel, míg a "globális jólét" növekedését a hőmérséklet növekedés csökkenése jelenti.

3.7. Az L-Nash alkumegoldás

Nash nem csak a nem-kooperatív játékok egyensúlyi vizsgálatának alapját fektette le, hanem a kooperatív játékelmélet területén is elindított egy máig is virulens kutatási irányt, Nash (1950b, 1953), amely különbözik a von Neumann és Morgenstern (1944) megközelítéstől. A Nash által vizsgált modell csak a lényegre koncentrál: a lehetséges kimenetelek halmazából (a hasznossági térben) kell egy elemet kiválasztani, amely jól fejezi ki a játékosok "alkupozícióját". A kiválasztott elemet alkumegoldásnak (bargaining solution) nevezte, ami később Nash-alkumegoldás, NAM néven vált közismertté.

Jelöljük F-el a lehetséges kimenetelek (kifizetések) halmazát és $d = (d_1, \dots, d_n)$-nel az "egyet nem értési" (status quo) kifizetést. Az (F, d) párost, ahol $F \subset \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^n$, n-személyes alkuproblémának nevezzük. Most is a játékosok halmaza $N = \{1, \dots, n\}$. Feltesszük, hogy F konvex, kompakt és van olyan $x \in F$, hogy $x > d$. A (kooperatív) játék abból áll, hogy a játékosok tárgyalnak egymással arról, hogy F melyik elemét válasszák. Ha sikerül megegyezni, és a választás $x^* \in F$, akkor a i játékos megkapja az x^*_i kifizetést, $i \in N$. Ha nem sikerül megállapodniuk, akkor az i játékos a d_i, $i \in N$ "büntető" kifizetést kapja. Jelöljük A-val az alkuproblémák halmazát. Egy $\psi\colon A \to \mathbb{R}^n$ függvényt megoldásfüggvénynek, vagy röviden megoldásnak nevezünk. Az axiomatikus megközelítés igyekszik követelményeket megfogalmazni, amelyek intuitíven elfogadhatók, és egyértelműen meghatároznak egy megoldást. Nash axiómái (követelményei) a következőek:

1. Lehetségesség: minden (F, d) alkuproblémára $\psi(F, d) \in F$.

2. Racionalitás: minden (F, d)-re $\psi(F, d) \geq d$. Mindegyik játékos szeretne legalább annyit kapni, mint amennyit akkor is kapna, ha nem születik semmilyen megegyezés.

3. Pareto-optimalitás: ha $f \in F$, és $f \geq \psi(F, d)$, akkor $f = \psi(F, d)$. Ez a klasszikus Pareto-elv az alkuprobléma kontextusában megfogalmazva.

4. Skála függetlenség: ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tetszőleges, és

$$\begin{aligned} d' &= (\alpha_1 d_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n d_n + \beta_n) \ , \\ F' &= \{(\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n x_n + \beta_n) : (x_1, \ldots, x_n) \in F\} \ , \end{aligned}$$

   akkor $\psi(F', d') = (\alpha_1 \psi_1(F, d) + \beta_1, \ldots, \alpha_n \psi_n(F, d) + \beta_n)$. A megoldás ne függjön attól, hogy milyen mértékegységben számolunk és hová tesszük a mérési skála kiindulópontját.

5. Kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség: ha $F' \subset F, (F', d) \in A$, és $\psi(F, d) \in F'$, akkor $\psi(F', d) = \psi(F, d)$. Az optimumszámítás "relaxációs" elvének megfelelő kikötés. Ha a lehetséges kimenetelek halmazát úgy szűkítjük, hogy a megoldás a szűkebb halmazban is benn van, akkor a szűkebb lehetséges kimenetelű problémának is ez kell legyen a megoldása.

6. Szimmetria: Ha van olyan i és j indexpáros, hogy $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \in F$ akkor és csak akkor, ha $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in F$ és $d_i = d_j$, akkor $\psi_i(F, d) = \psi_j(F, d)$. Más szóval, a játékosok minden lényeges tulajdonsága (alkuereje, rendelkezésre álló lehetőségek halmaza, stb.) a modell része kell legyen, semmi külső különbség ne legyen közöttük.

Tekintsük a következő maximum feladatot, amelynek célfüggvényét Nash-szorzatnak nevezzük:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{i=n} (x_i - d_i) \quad \to \max \\ \text{s.t.} \quad & (x_1, \ldots, x_n) \in F, \qquad\qquad x_i \geq d_i \text{ minden } i \in N\text{-re.} \end{aligned}$$

Ennek a feladatnak pontosan egy megoldása van, melyet Nash-alkumegoldásnak, NAM nevezünk. Legyen φ az a megoldásfüggvény, amely minden alkuproblémához a NAM-ot rendeli.

3.24. tétel (Nash (1950b))**.** *φ az egyetlen megoldásfüggvény, amely az 1-6 követelményeket kielégíti.*

Nash eredetileg két játékosra fogalmazta meg a modellt és az axiómákat, de az általánosítás n játékos esetére szinte magától megy. Mint az látható, egy alkuprobléma két dologtól függ: az F lehetséges kimenetelek halmazától és a d egyet nem értési kifizetéstől. Sokan vizsgálták, hogy miként függ a NAM a d-től rögzített F mellett. Thomson (1994) áttekintő cikke a legjobb referencia. Semmilyen figyelmet nem szenteltek annak a problémának, hogy mi történik, ha az egyet nem értési pont valamilyen irányban a végtelenhez tart. Ez több szempontból sem érdektelen probléma. Egyrészt sok esetben annak az "ára", hogy az alku időben elhúzódik és nem születik megegyezés folyamatosan nőhet és nem feltétlenül egyenlő arányban sújtja a játékosokat. Másrészt, mint azt látni fogjuk, szoros kapcsolat alakítható ki a NAM és a véges, többbritériumú döntési probléma között.

Legyen $C(\alpha) = (F, -\alpha r)$ egy n-személyes alkuprobléma, ahol $r \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, és α egy pozitív paraméter. Az r vektort egyet nem értési iránynak nevezzük. Bármely α-ra a NAM az α paraméter $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ függvénye. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} r_j \right) x_i \ , \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \left(\prod_{k \neq i,j} r_k \right) x_i x_j \ .$$

Tekintsük a következő lineáris célfüggvényű feladatot:

$$\begin{array}{rl} L(x) & \to \max \\ \text{s.t.} \quad x \in F & \end{array} \qquad (LC)$$

Ha ennek egyetlen x^1 megoldása van, akkor legyen $x^0 := x^1$. Ha több optimális megoldása van, akkor oldjuk meg az alábbi kvadratikus célfüggvényű feladatot:

$$\begin{array}{rrcl} & \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} r_j \right)^2 x_i^2 & & \to \min \\ \text{s.t.} & x & \in & F \\ & L(x) & = & \max_{x \in F} L(x) \end{array} \qquad (QC)$$

és legyen x^0 a kvadratikus feladat egyetlen optimális megoldása.

3.25. tétel (Forgó és Szidarovszky (2003))**.** $x^0 = \lim_{\alpha \to \infty} b(\alpha)$.

Az így definiált x^0 vektort az F lehetséges halmazhoz és r egyet nem értési irányhoz tartozó limit-Nash alkumegoldásnak, $LNAM$-nak nevezzük, magát a problémát pedig limit alkuproblémának és $(F, -r)^L$-el jelöljük. A tétel következménye, hogy az $LNAM$-ot legfeljebb két "jól viselkedő" matematikai programozási feladat megoldásával megkaphatjuk. Érdekes és egyúttal gyakorlati kérdés is, hogy vajon megkaphatjuk-e az $LNAM$-ot egyetlen NAM megoldásaként, ha α elég nagy? Erről szól a következő tétel.

3.26. tétel (Forgó és Szidarovszky (2003))**.** *Ha F egy nem üres politóp, akkor van olyan $\alpha_0 > 0$, hogy minden $\alpha \geq \alpha_0$, esetén az $(F, -\alpha r)$ alkuprobléma $b(\alpha)$ NAM-ja az F lehetséges halmazhoz és r egyet nem értési irányhoz tartozó $(F, -r)^L$ limit-alkuprobléma $LNAM$-ja.*

A NAM-ot eddig egy "kiválasztási" probléma (choice problem) megoldásaként kezeltük és "ésszerű" axiómák által határoztuk meg. Nash azonban nem elégedett meg ennyivel. Konstruált egy olyan nem-kooperatív játékot, amelynek, bizonyos értelemben, egyetlen NEP-jének kifizetése megegyezik a NAM-mal. Ez a játék explicitté teszi az alkufolyamatot, és mintegy más oldalról világítja meg ugyanazt a dolgot. Ezt az eljárást, amikor egy axiomatikusan meghatározott kooperatív megoldást előállítunk egy nem-kooperatív alku-játék (lehetőleg egyetlen) NEP-jeként,implementálásnak nevezzük (nem azonos a klasszikus implementációval, de közeli rokona, Serrano (2005)). Ezt természetesen nem csak a NAM-ra lehet megtenni, hanem egyéb megoldásokra is.

Magának a NAM-nak is többféle implementációja van. Ezek közül két olyant tekintünk az $n = 2$ esetben, amelyek alapgondolatát viszonylag könnyen lehet alkalmazni az $LNAM$ implementálására. Rubinstein (1982) váltakozó ajánlattételes, VA modelljét gyakorlatilag minden változtatás nélkül lehet alkalmazni az $LNAM$ implementálására is, ha van olyan véges $\alpha > 0$, hogy $LNAM = NAM$ és az alkuprobléma paramétereiből tudunk erre az α-ra becslést adni. Forgó (2006) ad egy ilyen becslést arra az esetre, ha F politóp. Megmutatja, hogy síma Pareto-határ esetében is működik a VA, de ebben az esetben, csakúgy, mint az eredeti Rubinstein modellben, az implementáció aszimptotikus.

A NAM-nak azonban van egzakt implementációja is. Howard (1992) implementációja ilyen és csak belső paraméterek irányítják. Nincs kívülről adott leállási (breakdown) valószínűség, amely fontos szerepet játszik a Rubinstein-modellben. Howard implementációját át lehet úgy alakítani, hogy alkalmas legyen az $LNAM$ implementációjára. Semmilyen külső paramétert nem használunk és egzakt implementációra törekszünk: a játék minden alkotórésze vagy primer adat, vagy a játékosok döntési változója.

Az $LNAM$, amit implementálni szeretnénk az $F \subset \mathbb{R}^2$ lehetséges halmazból, amiről feltesszük, hogy a pozitív kvadráns konvex, kompakt részhalmaza és az $(1, r), r > 0$ egyet nem értési irányból áll. Az, hogy az egyet nem értési irány első komponensét 1-en rögzítettük nem sérti az általánosságot. Nevezzük a két játékost $P1$-nek és $P2$-nek. Teszünk még egy feltételt, aminek az a célja, hogy ahol csak lehet a játékosoknak egyértelmű legjobb lépésük legyen.

Pareto-optimális választás feltétele: Bármely $g(x_1, x_2)$ célfüggvényt maximalizálva az F halmazon, a feladat optimális megoldásai közül a Pi $(i = 1, 2)$ játékos azt a Pareto-optimális pontját választja, amelyiknek az x_{3-i}, $(i = 1, 2)$ koordinátája a legnagyobb.

Ez a feltétel egy kis magyarázatra szorul. Miért törődik a $P1$ játékos a $P2$ játékos kifizetésével? Azért mert, ha a $P1$ játékos egy ajánlatot tesz (választ egy $(x_1, x_2) \in F$ pontot) és nem tud x_1-nél többet elérni, akkor okosan cselekszik, ha x_2-őt olyan magasra választja, amennyire csak lehet anélkül, hogy saját magának kevesebbet kérne, mivel ezzel növeli annak az esélyét, hogy a $P2$ játékos elfogadja az ajánlatot. Ez pedig érdeke a $P1$ játékosnak, hiszen azért javasolta az (x_1, x_2) pontot, mert x_1-el meg lenne elégedve.

Nézzük most a következő H dinamikus játékot, amely négy fő lépésből áll.

1. $P1$ választ egy $(y_1, y_2) \in F$ pontot (ajánlat) és egy $\alpha > 0$ számot (ez a büntető paraméter).

2. $P2$ választ egy $(x_1, x_2) \in F$ pontot (ajánlat) és egy $p \in [0, 1]$ számot (ez a megállási paraméter).

3. Egy sorsolás van, amelyben a játék p valószínűséggel folytatódik és $1-p$ valószínűséggel véget ér, amikor is mindkét játékos kifizetése 0.

4. $P1$ választ a következő két lehetőség közül:

   a) Elfogadja a $P2$ játékos (x_1, x_2) ajánlatát, a játék kimenetele (x_1, x_2) és a játékosok a következő kifizetést kapják:
   $$\left(x_1 + \alpha(1 - \frac{1}{p}), x_2 + \alpha(r - \frac{1}{p})\right) .$$

   b) Egy sorsolás van, amelyben a játék $1-p$ valószínűséggel véget ér és mindkét játékos kifizetése 0.

   p valószínűséggel a játék kimenetele (y_1, y_2) és a kifizetések az alábbiak:
   $$\left(y_1 + \alpha(1 - \frac{1}{p^2}), y_2 + \alpha(r - \frac{1}{p^2})\right) .$$

Mielőtt az implementációs tételt megfogalmazzuk, tekintsük a Nash-feladatot az $\alpha = 0$ büntetés mellett:

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \to \max \\ \text{s.t.} \quad & (x_1, x_2) \in F \ . \end{aligned}$$

Legyen az $\alpha = 0$ büntetés mellett a NAM a $(z_1(0), z_2(0))$ pont. Az implementációban, mielőtt a H játék elkezdődne, válasszuk a játékosok indexeit úgy, hogy a $\frac{z_2(0)}{z_1(0)} \leq r$ egyenlőtlenség fennálljon.

3.27. tétel (Forgó és Fülöp (2008))**.** *A Pareto-optimális választás feltétele és a játékosok megfelelő indexelése mellett a H játék implementálja az $LNAM$-ot vagy pontosan, ha van olyan véges büntető paraméter, amely mellett $LNAM = NAM$, vagy aszimptotikusan, ha nincs ilyen véges büntető paraméter.*

3.8. Az alkuprobléma és a többkritérimú döntések

A legegyszerűbb véges többkritériumú döntési probléma, (TDP) a következő. Egy döntéshozónak, (DH) az alternatívák m-elemű $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$ véges halmazából kell kiválasztani egyet, amelyet legjobbnak tart. Minden alternatívát egy valós n-elemű vektorral jellemzünk, amelynek elemei az alternatívák hasznosságát adják egy adott kritérium szerint. Jelöljük a kritériumok n-elemű halmazát $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$-el. Így a problémát meg lehet egy $D = [d_{ij}]$ $n \times m$-es döntési mátrixszal adni, amelynek d_{ij} eleme azt jelenti, hogy a DH a C_i kritérium szerint mekkora hasznossághoz jut, ha az A_j alternatívát választja.

A TDP-t általánosabban is megfogalmazhatjuk, ha az alternatívák valószínűségi keverését is megengedjük. Így tehát lehetséges döntés az is, ha az alternatívákat valamilyen $p \in \mathbb{R}^m$ valószínűségeloszlás szerint véletlenszerűen választjuk ki. Ekkor a döntési alternatívák halmaza az A elemein értelmezett összes P valószínűségeloszlás.

Ha még tovább szeretnénk általánosítani, akkor a lehetséges döntések halmazáról csak annyit teszünk fel, hogy nem üres, konvex és kompakt.

Milyen alapon válasszon a döntéshozó a lehetséges döntések közül? A két leggyakrabban használt megközelítés a

(i) súlyozásos módszer (weighting or scoring) és a

(ii) referencia pont módszer (reference point method).

A súlyozásos módszer esetében a kritériumokat fontosságuk szerint súlyozzuk a "súlyfüggvény" segítségével és a legnagyobb súlyú alternatív(áka)t választjuk. A leggyakrabban a lineáris súlyozást használják. A referencia pont módszer esetében van egy $r \in \mathbb{R}^n$ "ideális" alternatíva, ami általában nem eleme az A halmaznak és mintegy "aspirációs szintként" funkcionál. Itt a leggyakoribb eset az, amikor a DH olyan alternatív(áka)t választ, amely(ek) valamilyen távolságfüggvény szerint a legközelebb van(nak) a referencia ponthoz. A másik eset az, amikor a referencia pont egy nagyon rossz alternatíva, amely szintén lehet egy "ideálisan rossz" mesterséges alternatíva, de lehet egy valódi alternatíva is. A DH ilyenkor szeretne olyan alternatívát választani, amely lehetőleg minél távolabb van (valamely távolságfüggvény szerint) az ideálisan rossz ponttól.

A játékelmélet és a TDP közötti kapcsolatot már elég korán észrevették és tanulmányozták. Ezt azonban csak abból a szempontból vizsgálták, hogy a nem-kooperatív játékok körében mit tud nyújtani a többcélfüggvényes matematikai programozás elmélete és gyakorlata a NEP kiterjesztéséhez vektorkifizetésű játékok esetére, Shapley (1959). Először Forgó (1984) vette észre, hogy a játékelméleti megfogalmazás új eszközöket ad a TDP elméleti és gyakorlati kezeléséhez. Nevezetesen, a TDP megfogalmazható alkuproblémaként is. Az egyes kritériumokat kell játékosokként értelmeznünk. Minden játékosnak azonos a stratégiahalmaza: az alternatívák A halmaza. A játékosok egymástól függetlenül választanak egy-egy alternatívát. Ha valamennyien ugyanazt az alternatívát választják, mondjuk A_j-t, akkor az i játékos kifizetése d_{ij}. Ha a játékosok nem valamennyien választják ugyanazt az alternatívát, akkor egy "egyet nem értési", A_0 alternatíva valósul meg (ez lehet modellen kívüli, de akár valamelyik eredeti alternatíva is), d_{i0} "igen rossz" kifizetésekkel. Az így definiált nem-kooperatív játék lehetséges kifizetései, ha a valószínűségi keveréseket is megengedjük és alternatívának tekintjük, az egyes A_j alternatívákhoz tartozó $d_1, \ldots, d_m$ kifizetésvektorok F konvex burka $\mathbb{R}^n$-ben. Ezt a kutatási irányt követte többek között Christensen et al (1996) majd Andersen és Lind (1999), akik a TDP-ből konstruált kooperatív játék Shapley értékét és a nukleoluszát használták a kritériumok súlyának meghatározására.

A kritériumoknak játékosokként való értelmezése sokszor direktben is nagyon közel van a valósághoz. Első sorban akkor, ha a kritériumok mögött egyének, testületek, szervezetek vannak, amelyek, ha rajtuk múlna, csak a saját szempontjukat vennék figyelembe a "legjobb" alternatíva kiválasztásánál. A több kritérium létezése éppen azt jelenti, hogy ezeket a kritériumokat (a mögötte lévő játékosokat) össze kell egyeztetni. Ennek az egyeztetésnek (alkunak) az eredménye az alkumegoldás, jelen esetben a NAM vagy az $LNAM$.

Az előző alfejezet terminológiáját használva a fenti probléma, ami eredetileg egy TDP volt, egy (F, d_0) alkuprobléma lett, ahol d_0 a rossz kifizetések "egyet nem értési" vektora, F pedig a lehetséges halmaz. Erre aztán bármilyen alkumegoldást, többek között a NAM-ot, vagy akár az $LNAM$-ot lehet alkalmazni.

A TDP alkuproblémává való átfogalmazása különösen akkor hasznos, ha az egyet nem értési vektor a probléma természetéből közvetlenül adódik. Ha például az alternatívák arról szólnak, hogy hogyan lehet egy "nagyon rossz" helyzeten javítani, akkor a megegyezés hiánya a rossz helyzet fennmaradását jelenti és ilyenkor az alkumegoldás azt a lehetséges kifizetést választja ki, amely a Nash-szorzat szerint a lehető legmesszebb van a rossz helyzettől. Ha a döntésképtelenség a jelenlegi helyzetet fokozatosan rontja minden kritérium szerint, de eltérő arányban, akkor az $LNAM$ az adekvát megoldás.

A lineáris súlyozási módszer, LWM minden i kritériumhoz hozzárendel egy $w_i > 0$ súlyt, $i = 1, \ldots, n$. Egy $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F$ kifizetés vektor "értéke" (score) $\sum_{i=1}^n w_i x_i$. A DH a maximális értékű kifizetés vektort szeretné meghatározni és ezért megoldja a következő feladatot:

$$\begin{array}{rl} & L(x,w) := \sum_{i=1}^n w_i x_i \quad \to \max \\ \text{s.t.} & x \in F \ . \end{array}$$

A LWM itt megáll. Ha ennek a feladatnak több optimális megoldása van, akkor közülük is választani kell valahogy. Tegyük ezt az alábbi feladat megoldásával, amelynek csak egyetlen x^0 optimális megoldása van

$$\begin{array}{rl} & Q(x,w) := \sum_{i=1}^n w_i^2 x_i^2 \quad \to \min \\ \text{s.t.} & x \in F \\ & wx = \max_{x \in F} L(x,w) \ . \end{array}$$

Nevezzük "kiterjesztett súlyozási módszernek", EWM azt az eljárást, amely egy TDP-hez azt az $x^* \in F$ kifizetés vektort (ezzel együtt vagy egy eredeti alternatívát, vagy azoknak valamilyen valószínűségi keverését) rendeli, amely vagy az L célfüggvényű feladat egyetlen optimális megoldása, vagy ha ennek több optimális megoldása is van, akkor a Q célfüggvényű feladat egyetlen optimális megoldása. A következő tétel az $LNAM$ és az EWM kapcsolatára világít rá.

3.28. tétel (Forgó és Szidarovszky (2003))**.** *Az EWM megoldása megegyezik annak az alkuproblémának az $LNAM$-jával, amelynek az r egyet nem értési irányának komponensei a megfelelő súlyok reciprokai.*

Az EWM-et is lehet axiomatizálni, Forgó és Szidarovszky (2003). Az $n = 2$ esetben a Nash-axiómákhoz hasonló axióma rendszerrel, az $n \geq 3$ esetben egy további, speciális axióma hozzáadásával.

A játékelmélet és a TDP "összehozására" más megközelítések is vannak. Erre egy példa Zhou et al (2009), ahol a kritériumokat szintén játékosok testesítik meg, de a súlyokat nem egy NAM, hanem egy megfelelően definiált nem-kooperatív játék NEP-jeként kapjuk.

Meg kell jegyezzük, hogy az EWM a kimenetel-térben határoz meg egy egyértelmű megoldást. Ezt viszont, ha nem egy eredeti "tiszta" alternatíva kifizetés vektora, hanem valamely alternatívák keverséé, akkor akár többféle keverés is előállíthatja az EWM által meghatározott kifizetés vektort.

4. fejezet

Következtetések

A Nash-egyensúlypont létezésének bizonyításánál lehetséges elhagyni a "konvexitási paradigmát". Ezt nem csak az általános, normál formában adott játékoknál, hanem egyes konkrét játékoknál (pl. Cournot oligopólium) is meg lehet tenni. Potenciális szerepe lehet a két-függvényes minimax tételeknek ezen a téren és érdemes erőfeszítéseket tenni a Nash-egyensúlypont létezése és a két-függvényes minimax egyenlőtlenségek kapcsolatának mélyebb felderítésére.

A korrelált egyensúly általánosításainak egy ígéretes útja az új, az egyes játékok specialitásaihoz igazodó, technikailag is megvalósítható protokollok konstruálása abból a célból, hogy a társadalmi hasznosságot úgy lehessen növelni, hogy a játékosoknak minél nagyobb döntési szabadsága maradjon. Ugyancsak foglalkozni kell az egyes általánosítások egymáshoz való viszonyának feltárásával és az általánosítások erejének mérésével.

Érdekes kutatási irány a Nash-alkumegoldáson kívül más alkumodellek és a többkritériumú döntések kapcsolatának feltárása. Az L-Nash alkumegoldás implementálása tetszőleges számú játékos esetében szintén egy megoldatlan probléma, a két játékosra vonatkozó konstrukciókat nem lehet egyszerűen kiterjeszteni az általános esetre.

5. fejezet

Rövidítések jegyzéke

NEP	Nash-egyensúlypont
F-konkáv	Fan-konkáv
CF-konkáv	folytonos Fan-konkáv
RD	véletlen mechanizmus
CE	korrelált egyensúly
NE	Nash-egyensúly
$PNEP$	tiszta Nash-egyensúlypont
SW	társadalmi hasznosság
WCE	gyenge korrelált egyensúly
SCE	puha korrelált egyensúly
MV	mediációs érték
EV	kényszerítési érték
MVP	tiszta mediációs érték
TCE	fa-korrelált egyensúly
$TWCE$	gyenge fa-korrelált egyensúly
$TSCE$	puha fa-korrelált egyensúly
NAM	Nash-alkumegoldás
$LNAM$	limit-Nash alkumegoldás
VA	váltakozó ajánlattétel
TDP	többkritériumú döntési probléma
DH	döntéshozó
LWM	lineáris súlyozási módszer
EWM	kiterjesztett súlyozási módszer

Irodalomjegyzék

Andersen K, Lund M (1999) Computing the NTU-Shapley value of NTU games defined by multiple objective programs. International Journal of Game Theory 28:585-597

Ashlagi I, Monderer D, Tennenholz M (2008) On the value of correlation. Journal of Artificial Intelligence 33:575–613

Aumann R (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies. Journal of Mathematical Economics 1:67–96

Cambini A, Martein L (2009) Generalized convexity and optimization: Theory and applications. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 616. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York

Chang S (2010) Inequalities and Nash equilibria. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 73(9):2933–2940

Cheng C (2004) Two-function upward-downward minimax theorems. Journal of Mathematical Analysis and Applications 296(1):183–189

Cheng C (2010) A general two-function minimax theorem. Acta Mathematica Sinica 26(3):595–602

Cheng C, Lin B (2001) A minimax therem involving two-functions. Taiwanese Journal of Mathematics 5(3):647–657

Cheng C, Lin B (2003) Some alternative principles and mixed minimax theorems involving two functions. Acta Mathematica Hungarica 100(8):177–186

Christensen F, Lind M, Tind J (1996) On the nucleolus of NTU games defined by multiple objective programs. Mathematical Methods of Operations Research 43:337-352

Fan K (1952) Fixedpoint and minimax theorems in locally convex topological spaces. Proceedings of the National Academy of Sciences 38:121–126

Fan K (1953) Minimax theorems. Proceedings of the National Academy of Sciences 39:42–47

Forges F (1986) An approach to communication equilibria. Econometrica 54:323–358

Forges F (1993) Five legitimate definitions of correlated equilibrium in games with incomplete information. Theory and Decision 35:277–310

Forgó F (1984) A game theoretic approach for multicriteria decision making. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 229, SpringerVerlag, 41–46

Forgó F (1994) On the existence of Nash equilibrium in n-person generalized concave games. Könyv: Komlósi S, Rapcsák T, Schaible, S. (ed) Generalized Convexity, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 405, SpringerVerlag, Berlin, 53–61

Forgó F (1995) Cournot Nash equilibrium in non-concave oligopoly games. Pure Mathematics and Applications 6(2):161–169

Forgó F (1999) On two-function minimax inequalities: A guided tour. Szigma 29:221–230

Forgó F (2001) A nontopological two-function minimax theorem with monotone transformations of the functional values. Könyv: Gianessi F et al. (ed) Optimization Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 99–110

Forgó F (2006) Az L-Nash megoldás implementációjáról kétszemélyes alkuproblémák esetén. Szigma 37:113–125

Forgó F (2010) A generalization of correlated equilibrium: A new protocol. Mathematical Social Sciences 60:186–190

Forgó F (2011) Generalized correlated equilibrium for two-person games in extensive form with perfect information. Central European Journal of Operations Research 19:201–213

Forgó F (2013) Gondolatok az egyensúlyról a játékelméletben. Könyv: Csekő I (ed) Matematikai Közgazdaságtan: elmélet, modellezés, oktatás. Tanulmányok Zalai Ernőnek, Műszaki Kiadó, Budapest, 73–86

Forgó F (2014) Measuring the power of soft correlated equilibrium in 2-facility simple nonincreasing linear congestion games. Central European Journal of Operations Research 22(1):139–155

Forgó F, Fülöp J (2008) On the implementation of the L-Nash bargaining solution in two-person bargaining games. Central European Journal of Operations Research 16:359–378

Forgó F, Joó I (1998) A general nontopological two-function minimax theorem. Archiv der Mathematik 71:376–383

Forgó F, Joó I (1999) Fixed point and equilibrium theorems in pseudoconvex spaces. Journal of Global Optimization 14:27–54

Forgó F, Szidarovszky F (2003) On the relation between the Nash bargaining solution and the weighting method. European Journal of Operational Research 147:108–116

Forgó F, Fülöp J, Prill M (2005) Game theoretic models for climate change negotiations. European Journal of Operational Research 160:252–267

Friedman JW (1977) Oligopoly and the theory of games. NorthHolland, Amsterdam

Hou J (2009) Characterization of the existence of a pure-strategy Nash equilibrium. Applied Mathematics Letters 22(5):689–692

Howard JV (1992) A social choice rule and its implementation in perfect equilibrium. Journal of Economic Theory 56:142-159

Jin C, Cheng C, Jin Y, Li J (2006) Minimax theorems involving two functions and strictly monotone transformations of their values. Acta Mathematicae Applicate Sinica 22(4):607–614

Joó I (1986) Answer to a problem of M. Horváth and A. Sövegjártó,. Annales Univ Sci Budapest Sect Math 29:193–198

Kim WK (2011) Generalized C-concave conditions and their applications. Acta Mathematica Hungarica 130(12):140–154

Kim WK, Kum S (2005) Existence of Nash equilibria with C-convexity. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 63(57):1857–1865

Kim WK, Lee K (2002) The existence of Nash equilibrium in n-person games with C-concavity. Computers and Mathematics with Applications 44(89):1219–1228

Kim WK, Lee K (2007) Nash equilibrium and minimax theorem with C-concavity. Journal of Mathematical Analysis and Applications 328(2):1206–1216

Moulin H, Vial J (1978) Strategically zero-sum games: the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon. International Journal of Game Theory 7:201-221

Myerson R (1986) Multistage games with communication. Econometrica 54:323–358

Nash JF (1950a) Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences 36(1):48–49

Nash JF (1950b) The bargaining problem. Econometrica 18:155–162

Nash JF (1951) Non-Cooperative Games. The Annals of Mathematics 54(2):286–295

Nash JF (1953) Two person cooperative games. Econometrica 21:128–140

von Neumann J, Morgenstern O (1944) Theory of games and economic behavior. Princeton University Press

Nikaido H, Isoda K (1955) Note on noncooperative convex games. Pacific Journal of Mathematics 5:807–815

Nordhaus WD, Yang Z (1996) RICE: A regional dynamic general equilibrium model of alternative climate change strategies. The American Economic Review 86:726–741

Osborne M, Rubinstein A (1994) A course in game theory. The MIT Press, Cambridge MA

Rubinstein A (1982) Perfect equilibrium in a bargaining model. Econometrica 50:97--109

Selten R (1975) Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. International Journal of Game Theory 4:25–55

Serrano R (2005) Fifty years of the Nash program, 1953-2003. Investigaciones Económicas 29(2):219-258

Shapley LS (1959) Equilibrium points in games with vector payoffs. Naval Research Logistics Quarterly 6:5763

von Stengel B, Forges F (2007) Extensive form correlated equilibrium: Definition and computational complexity. Research Report LSE-CDAM-2006-04

Tang G, Cheng C (2008) Some minimax theorems with strictly monotone transformation. Applied Mathematics J Chinese Univ 23(1):69–78

Tasnádi A (2011) Tiszta és vegyes oligopóliumok. MTA doktori értekezés, Budapest

Thomson W (1994) Cooperative models of bargaining. Könyv: Aumann R. Hart S (ed) Handbook of Game Theory, vol. II., Elsevier Science, Amsterdam, 1237–1284

Tóth F, Ciscar J, Courtois P, Forgó F (2001) Strategic Integrated Assessment of Dynamic Carbon Emission Reduction Policies. SIADCERO Final Report of EU project ENG-1999-00011

von Neumann J (1928) Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Mathematische Annalen 100:295–320

Zhou L, Liu W, Xu, Y, Wang, LZ. (2009) A game method for multiple attribute decisionmaking without weight information. Könyv: Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Information and Automation, June 22-25, 2009 Zhuhai/Macau, China, p 1302-1307

Az értekezésem témaköréhez kapcsolódó legfontosabb könyveim és tanulmányaim jegyzéke megjelenésük sorrendjében

Szép J, Forgó F (1974) Bevezetés a játékelméletbe. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

Forgó F (1981) Döntés több kritérium alapján: egy játékelméleti megközelítés. Szigma 15:29–38

Szép J, Forgó F (1983) Einführung in die Spielthorie. Akadémiai Kiadó, Budapest, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main

Forgó F (1984) A game theoretic approach for multicriteria decision making. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 229, SpringerVerlag, 41–46

Szép J, Forgó F (1985) Introduction to the theory of games. Akadémiai Kiadó, Budapest, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland

Forgó F, Olajos M (1991) A family of cost allocation methods for a tree. Pure Mathematics and Applications 20:5–13

Forgó F (1992) A hatékony és racionális elosztás (in)konzisztenciája. Szigma 23:1–6

Forgó F (1994) On the existence of Nash equilibrium in n-person generalized concave games. Könyv: Komlósi S, Rapcsák T, Schaible S. (ed) Generalized Convexity, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 405, SpringerVerlag, Berlin, 53–61

Forgó F (1995) Cournot Nash equilibrium in non-concave oligopoly games. Pure Mathematics and Applications 6(2):161–169

Forgó F, Joó I (1997) Necessary conditions for maxmin=minmax. Acta Mathematica Hungarica 77:123–135

Forgó F, Joó I (1998) Necessary conditions for two-function minimax inequalities. Könyv: Vajda S, Gianessi F, Komlósi S, Rapcsák T (eds) New Trends in Mathematical Programming, Kluwer Academic Publishers, 59–64

Forgó F, Joó I (1998) A general nontopological two-function minimax theorem. Archiv der Mathematik 71:376–383

Forgó F (1999) On two-function minimax inequalities: A guided tour. Szigma 29:221–230

Forgó F, Joó I (1999) Fixed point and equilibrium theorems in pseudoconvex spaces. Journal of Global Optimization 14:27–54

Forgó F, Szép J, Szidarovszky F (1999) Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods, Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London

Forgó F, Szidarovszky F (1999) On consistency of income and cost sharing. Socio-Economic Planning Sciences 33:221–230

Forgó F, Szidarovszky F (2000) A Nash-féle alkumegoldás „nagy" fenyegetések esetén. Könyv: Glatz F (ed) MTA Közgyűlési Előadások, MTA Kiadó, 557–563

Forgó F (2001) A nontopological two-function minimax theorem with monotone transformations of the functional values. Könyv: Gianessi F et al. (ed) Optimization Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 99–110

Forgó F, Szidarovszky F (2003) On the relation between the Nash bargaining solution and the weighting method. European Journal of Operational Research 147:108–116

Forgó F, Zalai E (2003) Neumann János hozzájárulása a játékelmélethez és a matematikai közgazdaságtanhoz. Könyv: Kovács G (ed) Ki volt igazából Neumann János?, Nemzeti Tankönyvkiadó, 99–137

Forgó F (2004) John von Neumann's contribution to modern game theory. Acta Oeconomica 54:73–82

Forgó F (2000) John Forbes Nash, Jr. Könyv: Bekker Z (ed) Közgazdasági Nobel-díjasok 1969-2004, KJK-Kerszöv, 605–614

Forgó F, Fülöp J, Prill M (2005) Game theoretic models for climate change negotiations. European Journal of Operational Research 160:252–267

Forgó F (2006) Az L-Nash megoldás implementációjáról kétszemélyes alkuproblémák esetén. Szigma 37:113–125

Forgó F, Pintér M, Simonovits A, Solymosi T (2006) Játékelmélet, elektronikus tankönyv. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest

Forgó F, Fülöp J (2008) On the implementation of the L-Nash bargaining solution in two-person bargaining games. Central European Journal of Operations Research 16:359–378

Forgó F (2009) Mivel foglalkozik a játékelmélet? Magyar Tudomány 170:515–527

Forgó F (2010) A generalization of correlated equilibrium: A new protocol. Mathematical Social Sciences 60:186–190

Forgó F (2011) Generalized correlated equilibrium for two-person games in extensive form with perfect information. Central European Journal of Operations Research 19:201–213

Forgó F (2013) Gondolatok az egyensúlyról a játékelméletben. Könyv: Csekő et al (ed) Matematikai Közgazdaságtan: elmélet, modellezés, oktatás. Tanulmányok Zalai Ernőnek, Műszaki Kiadó, Budapest, 73–86

Forgó F (2014) Measuring the power of soft correlated equilibrium in 2-facility simple nonincreasing linear congestion games. Central European Journal of Operations Research 22(1):139–155